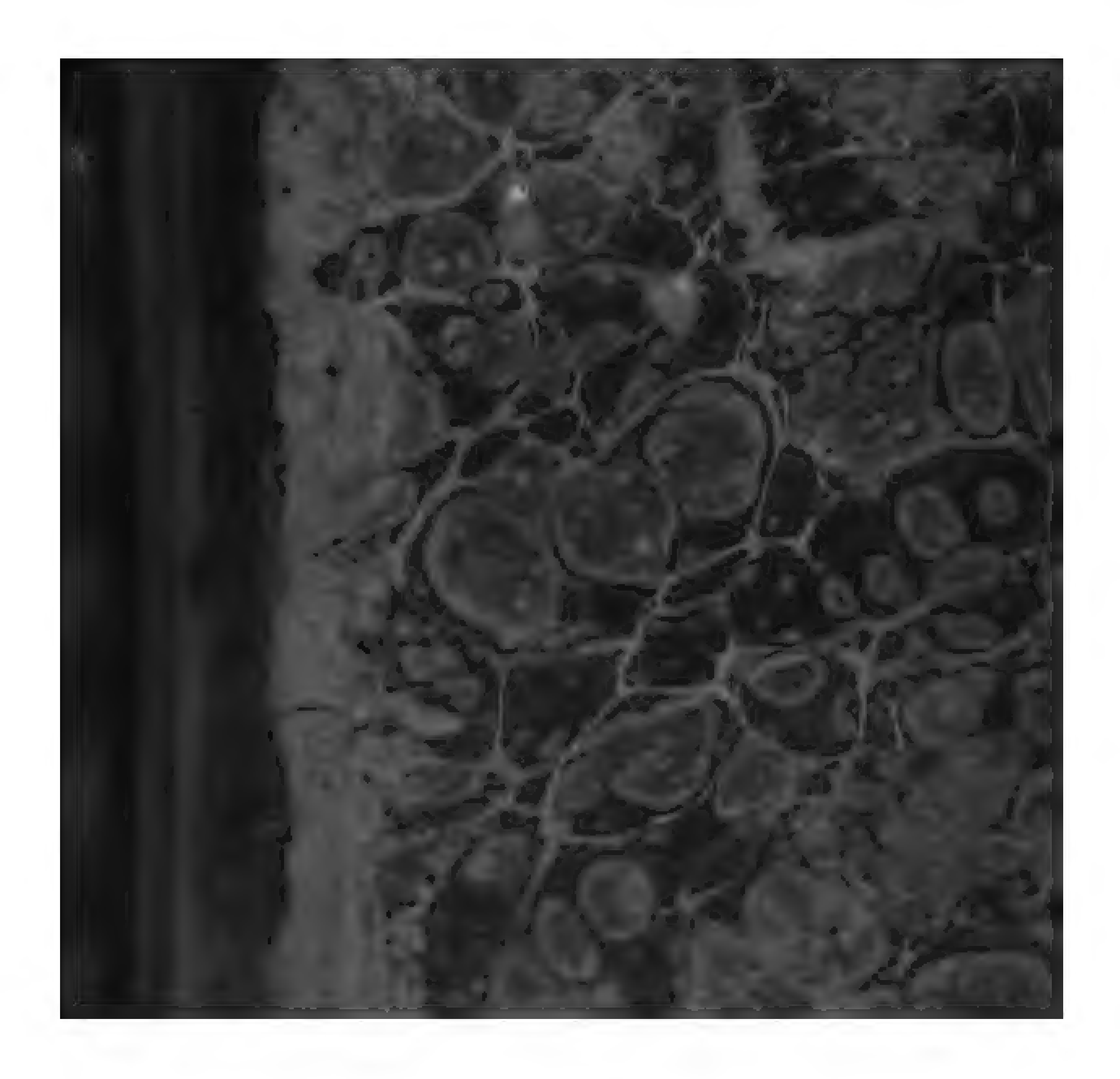
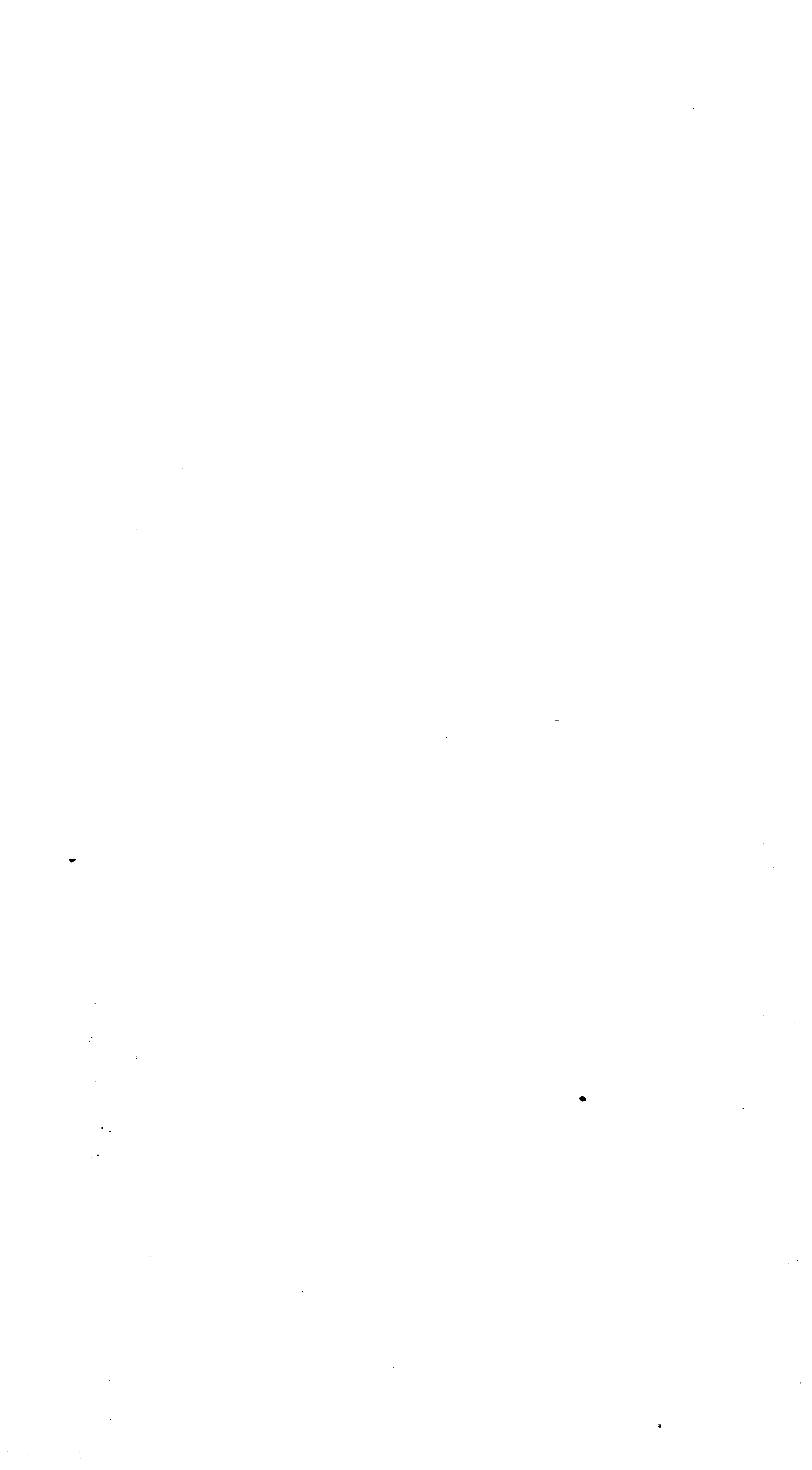
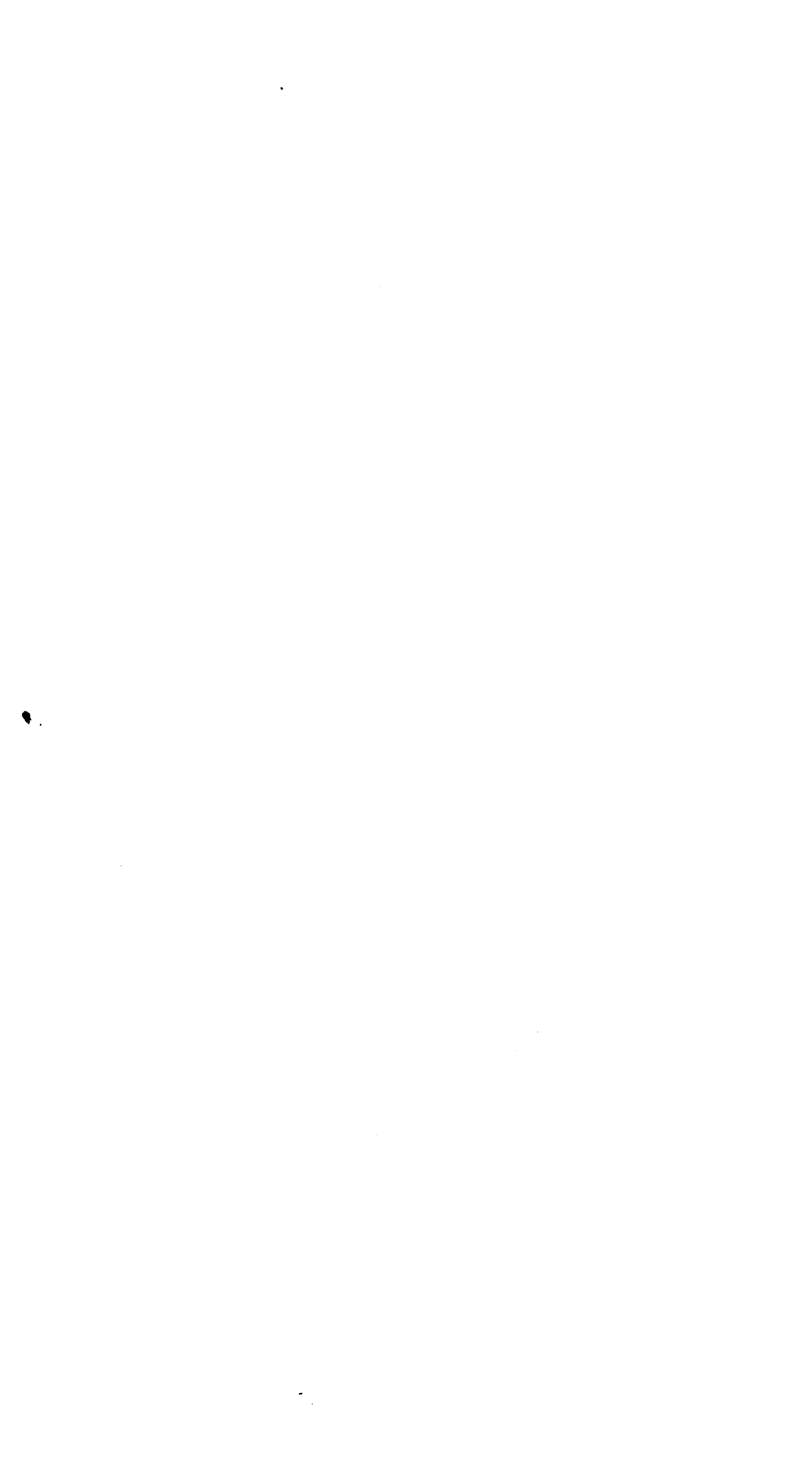



A. L. Crelle.







Archiv

der

reinen und angewandten Mathematik

herausgegeben

von

Carl Friedrich Hindenburg.

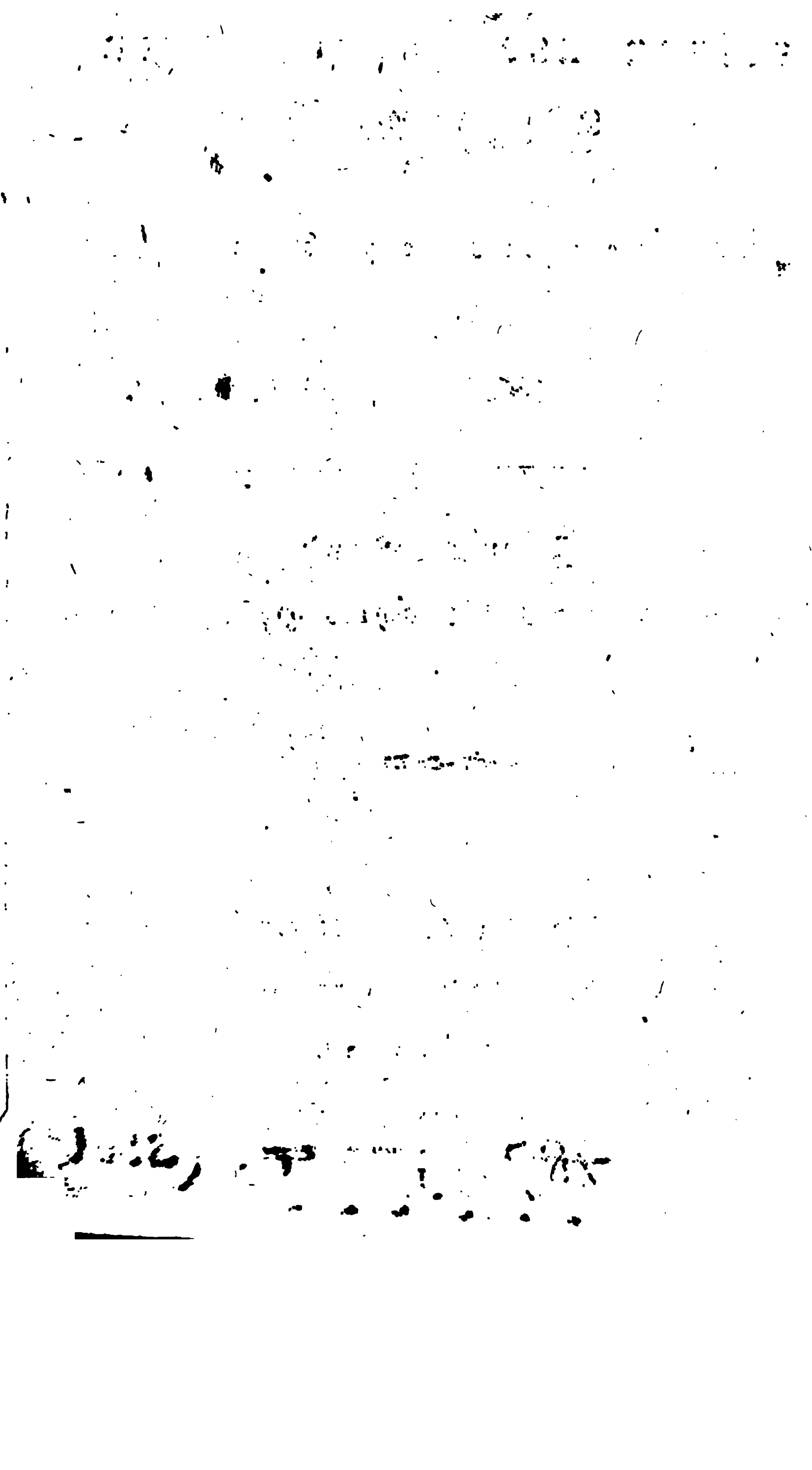
Zweyter Band

Fünftes bis achtes Heft.



Mit vier Kupfertafeln.

Leipzig, 1798.
in der Schäferischen Buchhandlung.



Inhalts=Anzeige.

Fünftes Heft.

Sechstes Heft.

Sieben-

Siebentes Heft.

Achtes Heft.

Archiv

Archiv

der

reinen und angewandten

Mathematik.

Fünftes Heft. 1796.

I.

Ueber die astronomische Strahlenbrechung; von J. F. Hennert, Professor der Mathematik zu Utrecht.

Lehrsatz.

§. 1. Wenn ein Lichtstrahl durch flüßige Materien (*media*) von verschiedner, aber zunehmender Dichte gehet, so ist der Winkel, welchen der erste einfallende Strahl mit dem zuletzt gebrochenen Strahle macht, gleich der Summe aller vorhergehenden Strahlenbrechungen.

Beweis.

Die horizontalen Linien HN, PI, LB, ME der Figur bezeichnen die Gränzen der Schichten (*strata*) der verschiedenen flüßigen Materien. Auf dem Einfallspunkt I des einfallenden Strahls SI richte man das Perpendikel ZIP, der gebrochne Strahl sey IR, welcher mit dem verlängerten Einfallsstrahl SIi den Winkel iIR macht,

welchen die Astronomen die Strahlenbrechung nennen; sie heiße R″. Auf gleiche Weise richte man ein Perpendikel ARp auf, so wird der Winkel BRr = R′ die zweyte Strahlenbrechung bedeuten. Ebenfalls soll der Winkel ErO = R die dritte Strahlenbrechung u. s. w. anweisen. Man verlängere den zuletzt gebrochenen Strahl Or bis G, wo derselbe den zweyten und verlängerten gebrochenen Strahl IRB schneidet, so ist rGB = BRr + RrG oder OrE = R′ + R. Man verlängere auch diesen Or, bis derselbe den erst einfallenden Strahl SIi bey F schneidet, folglich der Winkel iFr = iIR + RGF oder rGB = R″ + R′ + R = der Summe aller vorhergehenden Strahlenbrechungen.

§. 2. Lehrsatz. Die scheinbare oder beobachtete Höhe ist gleich der wahren Höhe, vermehrt mit der Summe aller Strahlenbrechungen.

Beweis. Weil die Linien HN, ME horizontal sind, so ist der Winkel HIS die wahre Höhe des Gegenstands S. Wird nun der zuletzt gebrochene Strahl rO, der ins Auge bey O fällt, nach Orhſ fortgezogen, so sieht das Auge O den Gegenstand S längst Ohſ, der also unter der Höhe Hhſ erscheint, folglich ist Hhſ die scheinbare Höhe = Nho = hIF + IFh = HIS + iFr = der wahren Höhe + der Summe aller Strahlenbrechungen (§. 1.).

§. 3. Aufgabe. Das Verhältniß der Strahlenbrechungen zu den entsprechenden Höhen oder Abständen vom Scheitelpunkte zu finden.

Auflösung. Es ist bekannt, daß das Verhältniß der sinus des Einfalls- und Brechungswinkels in zwey nehmlichen Materien, für alle Einfallswinkel beständig ist: Also setze man: sin SIZ : sin PIK = m : n, auch

sin

sin PIR oder sin IRA: sin rRp. = n: p, auch sin rKp: sin DrO = p: q, folglich SIZ: sin DrO = m: p. Nun ist SIZ der wahre Abstand des Sterns vom Zenith, und San = ZhH die scheinbare Höhe = h, auch ist OrD = 90° — h.

Nun ist die wahre Höhe H + allen Strahlenbrechungen = h. Ist der scheinbare Abstand = orD = Z, so ist der wahre Abstand oder SIZ = 90° — H = 90° — h + allen Str. Br. = Z + Summe der Str. Br. Diese Summe = R″ + R′ + R + sey gleich nR, oder ein *Multiplum* der letzten Strahlenbrechung; also SIZ = Z + nR. Folglich sin (Z + nR): sin Z = m: q. Also für einen andern scheinbaren Abstand Z′ und der zugehörigen Strahlenbrechung = r, wird eine ähnliche Proportion statt finden, nämlich sin (Z′ + nr): sin Z′ = m: q, also sin (Z′ + nR): sin Z = sin (Z′ + m): sin Z′. Aber zufolge der trigonometrischen Formeln bekommt man, sin Z cos nR + cos Z. sin nR: sin Z = sin Z′ cos nr + cos Z′ sin nr: sin Z′, woraus folgt, daß cos nR + cot Z sin nR = cos nr + cot Z′ sin nr. Weil nun nR und nr kleine Winkel sind, so kann man $\cos nR = 1 - \frac{n^2R^2}{2}$, und $\sin nr = nr - \frac{(nr)^3}{6}$ setzen, woraus diese Gleichung entspringt $-\frac{nR^2}{2}$

$$+ R \cot Z - \frac{n^2R^3}{6} \cot Z = -\frac{nr^2}{2} + r \cot Z'$$

$-\frac{n^2r^3}{6} \cot Z'$. Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt:

$$n = -\frac{3}{2} \cdot \frac{(r+R)(r-R)}{r^3 \cot Z' - R^3 \cot Z} \pm \sqrt{\left(\frac{6(r \cot Z' - R \cot Z)}{r^3 \cot Z' - R^3 \cot Z} + D^2\right)},$$

 wenn

wenn man durch D den ersten Terminus des zweyten Gliedes bezeichnet.

§. 4. Wären zwey beobachtete Strahlenbrechungen, R und r für die Abstände Z und Z′ bekannt, so könnte die unbekannte Grösse n bestimmt werden. Wir wollen zu der Absicht zwey Beobachtungen aus den Tafeln des Bradley nehmen, eine für den Abstand $Z' = 89°$, wo die Strahlenbrechung oder $r = 24' 28'', 6$ die andre für $Z = 86°$, dessen Strahlenbrechung oder $R = 11' 51'', 1$ ist. Um den Werth des Coefficienten aus diesen Beobachtungen durch Rechnung abzuleiten, muß man auf zwey Stücke Acht geben 1) daß die Bogen in Theilen des Radius $= 1$ müssen bestimmt werden, durch die bekannte Proportion des Bogens, der dem Radius gleich ist, oder $206264'' = S : 1 = nR : \frac{nR}{S}$ Also muß man überall für nR und nr, nR : S und nr : S schreiben. 2) Um die Rechnung geschwinder zu machen, ist es rathsam $\frac{1}{m}$ für n zu setzen, wodurch man folgende Gleichung erhält:

$$m = -\frac{(r+R)(r-R)}{4S(R\cot Z - r\cot Z')} \pm \sqrt{\frac{R^3 \cot Z - r^3 \cot Z'}{6S^2(R\cot Z - r\cot Z')} + D^2}.$$

Der Zähler $R^3 \cot Z - r^3 \cot Z'$ läßt sich unter dieser Form $R^3 \left(\cot Z - \frac{r^3 \cot Z'}{R^3}\right)$ leicht berechnen.

Ich finde,

$$m = -0{,}0830516 \pm \sqrt{(-0{,}000048811 + 0{,}006897573)}$$
$$= -0{,}0830516 - 0{,}0827571 = -0{,}1658087.$$

Also ist $n = -\frac{1}{m} = -6{,}0310.$

§. 5.

§. 5. Man kann $n = -6$ setzen, weil die R und r kleine Größen sind. Die allgemeine Gleichung wird also in diese bestimmtere verwandelt $\sin Z' : \sin(Z' - 6r) = \sin Z : \sin(Z - 6R)$. Daß der angenommene Werth für n dem wahren sehr nähert, kann man aus der Rechnung beweisen, weil $\log \sin Z' - \log \sin Z = 0,0009930$ giebt, und $\log \sin(Z' - 6r) - \log (Z - 6R) = 0,0009941$.

§. 6. Wenn man für Z′ einen gewissen Abstand $= 89^\circ$ und für r die Strahlenbrechung $= 24' \, 28'',6$ annimmt, so bekömmt man eine gemächliche Formel, um die Refraction für einen gegebenen Abstand Z zu bestimmen; nämlich weil $\sin 89^\circ : \sin 86^\circ \, 33' \, 8',4 = \sin Z : \sin(Z - 6r)$, so ist $\log \sin(Z - 6r) = \log \sin Z + 9,9992795$. Man sieht z. E. die Strahlenbrechung für den Horizont, wo $Z = 90^\circ$, also $0 + 9,9992795 = \log 86^\circ \, 42' \, 2''$. Folglich ist $Z - 6R = 86^\circ \, 42' \, 2''$, also $6R = 90^\circ - 86^\circ \, 42' \, 2'' = 3^\circ \, 17' \, 58''$, endlich die Strahlenbrechung oder $R = 32' \, 59'',5$. Nach dieser Formel habe ich einige Strahlenbrechungen berechnet, die von der Bradleyschen wenig abgehen.

Z	90°	89	88	87	86
Berechnete Strahlenbrech.	32′ 59″, 5	24′ 28″, 6	18′ 34″, 5	14′ 35″	11′ 51″, 1
Bradleysche Strahlenbrech.	33′	24′ 28″, 6	18′ 35″	14′ 35″, 6	11′ 51″, 1

Z	85	84	83	82
Berechnete Strahlenbrech.	9′ 52″, 3	8′ 26″, 6	7′ 21″, 1	6′ 28″, 3
Bradleysche Strahlenbrech.	9′ 54″, 3	8′ 27″, 8	7′ 20″, 5	6′ 29″, 4

§. 7. Die Bradleysche Formel, um die Strahlenbrechung zu finden, kann aus der vorhergehenden abgeleitet werden. Es war §. 5. $\sin Z' : \sin(Z' - 6r)$

= sin

$= \sin Z : \sin(Z - 6R)$, also $\sin Z' + \sin(Z' - 6r) : \sin Z' - \sin(Z' - 6r) = \sin Z + \sin(Z - 6R) : \sin Z - \sin(Z - 6R)$; $\tang\left(\frac{2Z' - 6r}{2}\right) : \tang\frac{6r}{2}$ oder $= \tang\left(\frac{2Z - 6R}{2}\right) : \tang\frac{6R}{2}$, oder $\tang(Z' - 3r) : \tang 3r = \tang(Z - 3R) : \tang 3R$. Sind die Strahlenbrechungen klein, nämlich wenn Z kleiner als 86° ist, so kann man $\tang 3R = 3R$ setzen: dann erst bekommt man die Bradleysche Regel, nämlich $\tang(Z' - 3r) : R$. Es erhellet, daß diese Proportion nur eine approximirte ist; und daß der Gebrauch derselben weitläuftiger ist als die unsrige. Weil man die Strahlenbrechung R für den gegebenen Abstand nicht weiß, muß man dieselbe erst ohngefähr finden, durch diese Proportion, $\tang(Z' - 3r) : r = \tang Z : R$, und hernach das gefundene R in der ersten Proportion substituiren, um die verbesserte Strahlenbrechung genauer zu bestimmen. Wir gebrauchen nur eine Proportion.

§. 8. Die zwey Lehrsätze (§. 1. 2.) können auch bewiesen werden, wenn man anstatt gerade horizontale Linien, concentrische Schichten nimmt, in welche der Luftkreis um die Erde vertheilet sey. Man ziehe aus dem Mittelpunct der Erde, Linien nach den Puncten der einfallenden Strahlen, so entstehen die Einfallswinkel, nur daß man auf der Erde eine Tangente ziehen muß, welche den Horizont vorstellt; nach diesem verlängere man den ersten einfallenden und den zuletzt gebrochenen Strahl, so wird man ebenfalls finden, daß der Unterschied der scheinbaren und wahren Höhe der Summe aller Refractionen gleich sey. Also lassen sich auch die gefundnen Formeln auf den Luftkreis anwenden.

§. 9.

§. 9. Simpson hat (*Mathematical-Dissertations*, London 1743. p. 46-59) die Strahlenbrechung aus der anziehenden Kraft, welchem die Lichtstrahlen in der Luft unterworfen sind, sinnreich abgeleitet. Er findet zwey Formeln, eine für die Strahlenbrechungen, wo die Abstände vom Zenith kleiner als 70° sind, wo die Tangenten der Abstände sich wie die Strahlenbrechungen verhalten. Diese Formel folgt aus der approximirten Bradleyschen; wenn nämlich 3 R sehr klein in Ansehung des Z ist, so ist tang (Z — 3 R): R wie tang Z: R. *).

Die zweyte Formel ist für die Strahlenbrechung der Abstände die grösser als 20° sind. Diese Formel kommt mit der unsrigen überein, nur daß Simpson $\frac{11}{2}$ oder 5,5 für unser n annimmt. Nämlich die Simpsonsche Proportion würde diese seyn: 1: sin 86° 58½ oder 0,9986 = sin Z: sin (Z — 5,5 R), welche auf die Horizontal-Refraktion = 33′ gegründet ist. Boscovich hat dieselbe Materie aus der Lehre der anziehenden Kraft abgeleitet. „Die Auflösung ist im Wesentlichen von der Simpsonschen nicht unterschieden. Boscovich findet nur die approximirte Formel des Bradleys, nämlich daß tang (Z — 3 R) wie R ist.“ Aber diese Formel ist nicht so genau als die Simpsonsche oder die unsrige (*Astronomie par M. de la Lande*, §. 2200-2203).

§. 10. Die Auflösungen von Simpson und Boscovich sind insbesondere auf die Voraussetzung gegründet, daß die Dichte der Luft einförmig von oben nach unten zunimmt. Weil nun aber unsre Auflösung auf

 keiner

*) Diese Simpsonsche Proportion kann aus der Gleichung cos n R + cot Z. sin n R = cos n + cot Z′ sin m abgeleitet werden, wenn man cos n R und cos n r = 1, und sin n R = n R und sin n r = n r setzt, woraus entstehet R cot Z = r. cot Z′, also R : r = cot Z′: cot Z = tang Z: tang Z′. Also hat dieses Verhältniß nur für sehr kleine Refractionen statt.

keiner physischen Hypothese beruhet, nur aus einfachen optischen Grundsätzen abgeleitet ist, so könnte die Voraussetzung der einförmig zunehmenden Dichte der Luft dadurch einigermaßen bestätigt werden. Ich werde mich bemühen, die Lehre der Strahlenbrechung, wenn dieselbe den Veränderungen des Luftkreises, mit Rücksicht auf Thermometer und Barometer unterworfen ist, in einem andern Aufsatze abzuhandeln.

Utrecht, den 27. Oktober 1795.

II.

Wie Körper leuchten, die kein eigenthümliches Licht haben. Averroes, Roger Baco, Euler.

Der Franciscaner, Roger Baco, welcher 1292 oder 1294 starb, ist wegen seiner mathematischen Einsichten und Entdeckungen berühmt. *Rogerii Baconis*, Angli, viri eminentissimi Specula mathematica, in qua de Specierum multiplicatione, earumdemque in inferioribus virtute agitur; liber, omnium Scientiarum studiosis apprime utilis; editus Opera et Studio Joh. Combachii, Philos. Prof. in Ac. Marburgensi ordinarii, ist zu Frankfurt 1614 in Quart herausgekommen. Enthält außer einigem Allgemeinen über die Mathematik, optische Lehren. Im ersten Theile, distinct. 4. cap. 1. p. 33... wird vom Lichte der Sterne geredet. Baco glaubt dem Aristoteles, daß alle Sterne ihr Licht von der Sonne haben, den Beweis geben die Mondfinsternisse,

sternisse, der Schattenkegel reicht nur bis an Merkurs Kreis, daher kömmt der Mond allein in ihn.

Nun glaubt totum vulgus Studentium quod lumen quod venit ad nos de luna et stellis, quod sit lux Solis reflexa a superficibus earum, sed hoc est impossibile propter aequalitatem angulorum incidentiae et reflexionis ...

Baco zeigt dieses durch eine Figur. Von der Sonne fällt ein Strahl auf den Mond, und der wirft ihn nach dem Gesetze der Reflexion auf die Erde. Dieser Strahl kömmt an eine bestimmte Stelle der Erde, und so, sagt Baco, werde es mit allem Lichte seyn, das auf des Mondes Fläche fällt; es sey Alles wie ein Strahl, falle in ungleichen Winkeln auf die Oberfläche des Mondes, und werde nach einem bestimmten Theile reflectirt. Folglich wenn dieses Licht so auf die Erde käme, würde der Mond nur einen bestimmten Theil des Horizonts erleuchten, aber wir sehen, daß er die ganze Halbkugel erleuchtet, wie die Sonne. Also ist das Licht, das vom Monde und von den Sternen kömmt, nicht reflectirtes.

Baco erwähnt Auer. 2. Coeli et Mundi, brauche diesen Beweis, und bestätige durch sein Ansehen, das Licht, das von den Sternen zu uns kömmt, sey nicht Sonnenlicht, von der Sterne Oberfläche reflectirt, eductam tamen de potentia materiae in corpore stellae, per virtutem Solis venientis ad stellam, quae virtus alterat et transmutat stellam, et facit lumen in ea, et quando habet lumen naturaliter genitum in ea, sicut Sol habet lucen creatam, tunc potest multiplicare lucem a se undique sicut Sol, et tunc concedendum quod lumen Solis reflectitur a Superficie lunae; sed non venit ad terram sed ad aliam par-

tem mundi declinat, in coelestibus secundum aequalitatem angulorum incidentiae et reflexionis.

Euler lehrt bekanntermaßen, dunkle undurchsichtige Körper werden von uns nicht deswegen gesehen, weil sie Licht, das etwa die Sonne auf sie sendet, nach den Gesetzen der Reflexion zurücksenden, sondern, weil durch das auffallende Licht die kleinsten Theile, die sich in ihrer Oberfläche befinden, in eine gewisse Bewegung kommen, durch welche Strahlen erregt werden, wie für sich leuchtende Körper, durch die Bewegung ihrer Theile in der umliegenden Materie des Lichts erregen.

Euler, lettres à une princesse d'Allemagne, T. I. St. Petersbourg 1768, Lettre 25. p. 96. Eulers Briefe über verschiedene Gegenstände aus der Naturlehre ... von Kries. Leipz. 1792. 1. B. 26. Br, 139 S.

Findet man nicht in dieser Lehre, Baco's, aus dem Alhazen angeführte: *virtutem Solis ... multiplicare lucem a se undique sicut Sol?*

Wie Baco sich vorstellt, daß die irdischen Körper uns sichtbar werden, die wir dunkle nennen, kann ich nicht sagen, er erwähnt dergleichen nicht.

Daß wir sie nicht durch zurückgeworfne Strahlen sehen, schließt Euler daraus, weil wir sie selbst sehen, nicht auf ihnen Bilder der Gegenstände, die ihnen Licht zusenden. Der Schluß hat mir nie sehr bündig geschienen. Der Spiegel zeigt ein Bild, weil seine glatte Fläche die Strahlen nach der Ordnung zurücke wirft wie sie dieselben bekömmt; macht man seine Fläche rauh, so bleibt er nicht Ein Spiegel; jede Ungleichheit der Oberfläche, ist durch mehrere Ebenen begränzt, wenn deren jede das Licht wie ein kleiner Spiegel zurückwirft; so ist deutlich, daß alle zusam-

zusammen die auffallenden Strahlen nicht in der Ordnung nach dem Auge senden wie sie solche bekommen. Eben also läßt sich gar leicht erklären, warum rauhe Flächen keine Spiegel sind, so wie gegentheils jeder Körper spiegelt, wenn er eine glatte Oberfläche erhalten kann deren äußere Theile für sich von dem Auge nicht unterschieden werden.

Euler ist also durch eine ganz andre Reihe von Gedanken auf seine Lehre gekommen, als der Araber, welches man zu seiner Rechtfertigung anführen könnte, wenn er eine gegen den Einfall brauchte: seine Erklärung, wie dunkle Körper uns sichtbar werden, sey von Averroes genommen.

Daß der Mond das Sonnenlicht uns nicht so zusendet, wie ein erhabener Spiegel thun würde, ist richtig. Ein solcher Spiegel würde um die Opposition, statt des Vollmondes uns eine glänzende Stelle zeigen, deren scheinbare Größe etwa 4 Secunden wäre, wie ich in meiner Abhandlung de objecti in Speculo Sphaerico visi magnetudine apparente gewiesen habe. *Novi Commentar. Soc. Sc. Gott. Tom.* VIII. *ad* 1777, *p.* 114. Aber das lehrt nur so viel: Die Oberfläche des Mondes sey nicht glatt, sondern voll Ungleichheiten, wovon freylich zu Bacos Zeiten, außer dem Manne im Monde noch nichts bekannt war.

A. G. Kästner.

III.

III.

Wie viel Steinchen müßte der Rabe ins Gefäß werfen? berechnet von A. G. Kästner.

---

1. Plinius Naturg. X. B. 43. Cap. berichtet: Ein durstiger Rabe habe in ein Gefäß Steine geworfen, damit das Wasser im Gefäß in die Höhe getreten sey, und von ihm habe können erreicht werden.

Harsdörfer hat zu dieser Erzählung ein Exempel berechnet. Mathematische und philosophische Erquickstunden, zweyter Theil (als Fortsetzung von Schwenters Erquickstunden) Nürnb. 1677, im dritten Theile (der dritten Abtheilung) 26 Aufgabe, 121. Seite.

2) Wenn man mit Harsdörfer das Gefäß cylindrisch annimmt, die Steine kugelförmig, so läßt sich die Frage so abfassen:

Ein Cylinder habe zum Durchmesser c. Es steht in ihm Wasser auf die Höhe b, man soll n Kugeln hineinwerfen, jede vom Durchmesser = e, damit das Wasser auf die Höhe b+h steigt.

3) Diese n Kugeln also müssen soviel Raum ausfüllen, als ein Cylinder hat, dessen Durchmesser = c; Höhe = h.

Ich sage nicht, diesen **Cylinder ausfüllen**; das können sie begreiflich nicht, so wenig als die Quadratfuße, die den Inhalt eines Dreyecks angeben, das Dreyeck ausfüllen.

4) Ich stelle mir zween Cylinder vor; I. Cyl. dessen Durchmesser = seiner Höhe = e; II. Cyl. dessen Durchmesser = c; Höhe = h; So ist:

Kugel

Kugel vom Durchmesser e : I Cyl. $= 2 : 3$
I Cyl. II Cyl. $= e^3 : c^2 . h$

Kugel : II Cyl. $= 2 . e^3 : 3 . c^2 . h$

Oder: Kugel $= \frac{2 . e^3}{3 . c^2 . h}$. II Cyl.

Sollen also n Kugeln = II Cyl. seyn (3), so ist $\frac{1}{n} = \frac{2 . e^3}{3 . c^2 h}$ und $n = \frac{3 . c^2 h}{2 . e^3}$.

5) Man nehme zum Längenmaße die Dicke eines Gerstenkorns, und setze den Durchmesser eines Steinkügelchens = 3 Gerstenkörner = e, des Cylinders Durchmesser = $\frac{1}{4}$ Elle = 32 Gerstenkörner = c; das Wasser um $\frac{1}{8}$ Elle = 16 Gerstenkörner = h zu erheben, so kömmt $n = \frac{3 . 32^2 . 16}{2 . 27} = \frac{32 . 32 . 8}{9} = \frac{1024 . 8}{9} = 910 + \frac{2}{9}$.

6) Harsdörfer giebt dieses Exempel. Er sagt: man rechne acht Querfinger auf eine Elle, und auf einen Querfinger 4 Gerstenkörnlein, daß also auf $\frac{1}{4}$ Elle 32 kommen, folglich ist die erste Angabe ein Schreibe- oder Druckfehler, und soll heißen, acht Querfinger auf $\frac{1}{4}$ Elle. Nach dieser Berichtigung stimmen H. Zahlen unter sich überein, und er findet einerley mit mir, aber viel weitläuftiger, weil er nach der Verhältniß 7 : 22 Gefäß und Kugeln ausrechnet.

7) Da diese Verhältniß nicht die schärfste ist, so könnte jemand, der so wie H. aber mit einer schärfern Verhältniß rechnete, erwarten; etwas genaueres als H. zu finden.

Das geschieht aber deswegen nicht, weil die Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise, aus der Rechnung herausgeht;

ausgeht: hätte H. statt ihrer 1 : 3 genommen oder gar eine falsche; so hätte er doch n eben so richtig heraus gebracht. Wenn man Räume vergleicht, die durch den Kreis begränzt werden, so geht die Verhältniß des Durchmessers zum Umfange aus der Vergleichung, oder auch man kann die Vergleichung so anstellen, daß diese Verhältniß gar nicht gebraucht wird, wie mein Verfahren in (4) zeigt.

8) Wie hoch das Wasser anfangs stand, kömmt in (4) gar nicht vor, weil man nur zu wissen verlangt wieviel nach Einwerfung der Kugeln seine Oberfläche höher steht als anfangs.

Indessen nahm nach (2) das Wasser allein anfangs den Raum $\frac{1}{4}\pi c^2 b$ ein; jede Kugel nimmt den Raum $\frac{2}{3}\pi.$ $\frac{e^3}{4}$ ein, also die n Kugeln (4) den Raum $\frac{1}{4}\pi. c^2. h$; folglich Wasser und Kugeln zusammen den Raum $\frac{1}{4}\pi. c^2. (b+h)$. Solchergestalt muß die wagrechte Oberfläche des Wassers nur um $b+h$ über des Cylinders Grundfläche stehn; ob sich gleich nicht alles Wasser über den Kugeln befindet, manches noch den Boden benetzt.

9) Wie die Kugeln im Cylinder liegen, wie viel in einer Schicht, wie viel Schichten über einander, das kömmt auf die Verhältniß der Durchmesser, einer Kugel und des Cylinders an, und läßt sich nicht einmal allgemein angeben.

10) Weil nur die Frage ist, den Raum $\frac{1}{4}\pi. c^2. h$ auszufüllen, so leisteten eben das n Würfel jeder so groß als jede der Kugeln. Die Seite eines solchen Würfels wäre $= e. \sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}$; und so Körperchen von andern Gestalten. Die Voraussetzung von Kugeln machte nur die Darstellung und Rechnung am leichtesten.

11) Ob

11) Ob übrigens Situla in monumento beym Plinius ein Cylinder heißen kann, das wird wohl hier gleichgültig seyn, wo nur gewiesen wird, wie sich die Rechnung bey angenommener Gestalt des Gefäßes führen läßt. Die Nachricht vom durstigen Raben steht auch beym Aelian 2. B. 45. C. mit der metaphysischen Bemerkung, daß die Raben also wissen: Zween Körper können nicht an einem und demselben Orte seyn. Noch kann man völlig auf die Art berechnen, wie viel sich aus einem Cylinder Bley, dessen Länge = h, Durchmesser = c, Schrotkügelchen vom Durchmesser = e gießen lassen, nach Raben zu verschießen.

IV.

Grundsätze der neuen französischen Zeitrechnung, samt ausführlichen Tafeln zur Vergleichung des neuen und alten Calenders; von J. F. Wurm.

Die neue politische Zeitrechnung der Franzosen, wie man auch sonst von ihrem Werthe denken, und wie kurz auch vielleicht der Zeitraum ihrer Dauer seyn mag, behält doch, wegen so vieler ursprünglich nach ihr datirter Ereignisse, für die Geschichte unserer Tage einen gewissen Grad von Wichtigkeit, und ihre genauere Kenntniß wird zur Reduction vieler Epochen der neuesten Weltbegebenheiten auf die gewöhnliche Zeitrechnung, immer nothwendig bleiben. Chronologie, ein Theil der angewandten Mathematik, läßt sich nur mit Hülfe mathematischer, vorzüglich astronomischer Sätze, richtig beurtheilen.

Ich

Ich glaubte daher, manchen Lesern des Archivs durch gegenwärtigen kleinen Aufsatz um so mehr einigen Dienst zu erweisen, da ich bemerkt habe, daß die Begriffe des teutschen Publikums von der französischen Zeitrechnung in neuern Schriften, politischen Blättern u. d. gl. zum Theil sehr schwankend und unrichtig, auch sogar viele durchaus falsche französische Calender in Teutschland im Umlaufe sind. So sah ich z. B. einen zu Basel bey Flick in 8. erschienenen „Neuen französischen „Calender vom dritten Jahre der franz. Republik, wel„ches anfängt den 22 Herbstmonat 1794, und endet „den 21 Herbstmonat 1795." Schon der Titel ist falsch: denn das dritte französische Jahr endete sich am 22 Herbstmonat 1795, und war ein Schaltjahr. Dieß beweist nicht nur Real's bekannte Schilderung des 12 und 13 Vendemiaire (4. und 5. Oct.) 1795, wo Begebenheiten vom sechsten *Jour complémentaire*, oder vom Schalttage des 3ten Jahrs (22. Sept. 1795) erwähnt werden (s. Minerva von Archenholz, Dec. 1795), sondern auch die astronomisch berechnete *Connoissance des temps pour l'année* 1795, so wie der neueste Band der „*Connoissance des temps pour l'année* 4 *du* 23 *Sept.* „1795 *au* 21 *Sept.* 1796." Auch selbst das Journal: **Frankreich im Jahre** 1796, enthält auf der letzten Seite des 1sten Stücks einen irrigen Calenderauszug unter der ungegründeten Voraussetzung, daß das vierte, und nicht das dritte franz. Jahr ein Schaltjahr sey. Die gründliche Beurtheilung dieses ganzen Gegenstandes gehört, wie aus dem folgenden erhellen wird, vor das Forum der Astronomie; daher ist auch vom gesetzgebenden Corps in Paris beschlossen worden, daß die astronomischen Mitglieder des neuen *Institut National*, die zugleich *Membres du Bureau des Longitudes* sind, jährlich der Gesetzgebungsstelle den Entwurf des französischen Calenders

lenders auf das nächstfolgende Jahr übergeben sollen, um die von Staats wegen abgefaßten Calender, als Muster der übrigen, darnach reguliren zu können. Einen lesenswerthen Aufsatz über die auffallende Aehnlichkeit des Neufranzösischen mit dem Altpersischen Calender, samt verschiedenen literarischen Notizen, enthält der Reichsanzeiger vom 29. Dec. 1794. — Dieß vorausgeschickt, suche ich hier die Grundsätze der französischen Zeitrechnung selbst, auf eine auch für bloße Liebhaber der Mathematik verständliche Art zu entwickeln.

§. 1. Bekanntlich beruht die Einrichtung des Gregorianischen Calenders, welcher seit 1777 als allgemeiner Reichscalender gilt, außer der Methode das Osterfest zu berechnen, hauptsächlich darauf, daß in 4 Jahrhunderten je 3 Schalttage ausfallen, so daß z. B. das Jahr 1600 ein Schaltjahr, hingegen die Jahre 1700, 1800, 1900, ungeachtet sie durch 4 theilbar wären, gemeine Jahre sind. Das Auslassen dieser Schalttage gründet sich auf die wahre Größe des Sonnenjahrs, welches ungefähr um 11 Minuten kürzer ist, als das im Julianischen Calender zu 365 Tagen 6 Stunden angenommene, und daher alle 4 Jahre Einen Schalttag erfodernde Sonnenjahr.

§. 2. Ganz genau wäre diese Gregorianische Art, die Schalttage abzugleichen, nur alsdann, wenn das tropische Sonnenjahr 365 Tage 5 Stunden 49′, 12″ oder $365\frac{97}{400}$ Tage wäre: so würden wirklich in 400 Jahren nur 97 Schalttage, statt 100, erfordert. Allein, da das tropische Sonnenjahr nach den neuesten Bestimmungen, die man wenigstens auf 2 bis 3 Secunden für sicher zu halten berechtigt ist, nur 365 T. 5 St. 48′ 48″ gefunden wird, so nimmt der Gregorianische Calender offenbar das Jahr um 24 Sec. zu groß.

§. 3. In der neuen französischen Zeitrechnung wird das Jahr in 12 Monate, jeder zu 30 Tagen oder zu 3 Decaden, abgetheilt: am Ende der 12 Monate werden, um die Zahl der Tage bis auf 365 auszufüllen, 5 Ergänzungstage, anfänglich *Sansculottides*, jetzt *Jours complémentaires* genannt, und in einem Schaltjahre 6 Ergänzungstage eingeschaltet.

§. 4. Sowohl der Anfang des Jahrs als der damit genau zusammenhängende Schalttag werden in der französischen Jahrrechnung anders, als in der Gregorianischen bestimmt. Da die Sonne scheinbar in einem Kreise läuft; so ist, an sich betrachtet, der Anfang des Sonnenjahrs ziemlich gleichgültig; kein Punct des Kreises verdient mehr, als ein anderer, der erste zu seyn. Nun hat der französische National-Convent im Jahr 1793 decretirt, daß eine neue Jahrrechnung von der Gründung, oder, wenn man der Wahrheit gemäßer sprechen will, von der Ausrufung der französischen Republik den Anfang nehmen sollte. Diese Ausrufung geschah am 21. Sept. 1792, und der folgende Tag, der 22. Sept. 1792, ist, zufolge des Decrets, der erste Tag des ersten Jahrs: man wählte diesen, und nicht den vorhergehenden Tag, weil der 22. Sept. zugleich mit der astronomischen Herbstnachtgleiche gerade zusammentraf.

§. 5. Das nämliche Decret (§. 4.) setzte folgendes fest, was man als ersten, das neue chronologische System ganz umfassenden, Grundsatz zu bemerken hat. „Die „Mitternachtsstunde vor der Herbstnachtgleiche bestimmt jedesmal den Jahreswechsel." Nach der Vorschrift des Decrets muß also der Anfang eines jeden Jahrs so bestimmt werden, daß man aus astronomischen Tafeln den Eintritt der Sonne in die Waage, nach wahrer Zeit zu Paris, eigentlich nach wahrer Zeit der Sternwarte

warte der Republik berechnet; mit der unmittelbar vorhergehenden wahren Mitternacht fängt das Jahr und dessen erster Tag an. So fiel, laut der eignen Worte des Decrets, „die Herbstnachtgleiche 1792 am 22 Sept. „Abends 9 St. 18′ 30″ wahrer Zeit der Sternwarte zu „Paris,“ und daher fieng das erste Jahr mit dem 22 Sept. 1792 an.

§. 6. Bey der Größe des Sonnenjahrs zu 5 Stunden 48 Min. 48 Sec. über 365 Tage (§ 2.) wird die Herbstnachtsgleiche alle Jahr ungefähr um 5 St. 48′ 48″ später eintreffen: die kleinern Ungleichheiten des Sonnenlaufs lassen keine vollkommene Gleichförmigkeit zu. Traf nun z. B. die Herbstnachtgleiche in einem gewissen Jahre auf den 22 Sept. 7 Stunden 0 Minuten **Abends**, so ist offenbar, daß sie im nächsten Jahre auf den 22 Sept. 12 St. 49 Min., das heißt, nach bürgerlicher Rechnung auf den 23 Sept. 0 St. 49 Min. **Morgens**, fallen, und also der Anfang des Jahres um einen ganzen Tag sich verspäten muß. Und dieß ist die Bedingung, unter welcher neufranzösische **Schaltjahre** entstehen. Allgemein ist ein franz. Jahr ein Schaltjahr, wenn die Herbstnachtgleiche des folgenden Jahrs etwas früher als 5 St. 49 Min. nach der wahren Mitternacht einfällt. So trat die Sonne in die Waage 1795 am 23 Sept. 2 St. 43′ 35″ Morgens wahrer Zeit zu Paris: das dritte französische Jahr war demnach das erste Schaltjahr des neuen Systems; denn es hatte mit den 22. Sept. 1794 angefangen, und sein letzter Tag war der 22. Sept. 1795, weil am 23. Sept. 1795 das 4te Jahr anfieng.

§. 7. Da im französischen Calender der **Schalttag** jedesmal durch astronomische Berechnung der Herbstnachtgleiche sich von selbst bestimmt (§. 6.); so ist leicht zu erachten, daß in Fällen, wo die Herbstnachtgleiche sehr

nahe, und nur ein Paar Minuten vor oder nach der wahren Mitternacht sich ereignet, der Anfang des Jahrs, und also auch, ob es ein gemeines oder ein Schaltjahr seyn soll, von der Genauigkeit der Sonnentafeln abhängt. So wird, wie ich aus den Delambreschen Tafeln gefunden, die Sonne in die Waage treten: 1873 am 22 Sept. 11 St. 53′ 24″ wahrer Zeit zu Paris; nach Hrn. Obristwachtmeisters von Zach Tafeln, um 11 St. 47′ 2″. In Frankreich wird man für diesen Zweck wohl meistentheils französische Tafeln brauchen: die genauesten unter den letztern sind gegenwärtig die von Hrn. Delambre (*Astronomie par la Lande* 1792, *Tome* I.) welche mit den von Hrn. von Zach 1792 zu Gotha in 4to herausgegebenen *Tabulae motuum Solis etc.* immer auf wenige Secunden übereinstimmen. Die Sonnenlänge müßte indeß im Jahre 1873 bey Hrn. Delambre um 16 Sec. und bey Hrn. von Zach um 32 Sec größer seyn, um die Nachtgleiche über die Mitternacht hinaus, und also den Anfang des Jahrs auf den 23 Sept. zu bringen: bey beiden Tafeln aber steigt, wenigstens für die gegenwärtige Zeit, der Fehler nicht leicht auf 10 Sec.

§. 8. Nach §. 1 werden im Gregorianischen Calender die Schalttage, welche bey fortgesetzter vierjähriger Einschaltung zuviel sind, so herausgeschaltet, daß in vier Jahrhunderten dreymal nur alle acht Jahre ein Schaltjahr angenommen wird. Das französische neue System von Zeitrechnung, bey welchem der Anfang eines jeden Jahrs immer auf unmittelbare astronomische, und demnach immer mit dem Himmel übereinstimmende Rechnungen sich gründet, bedarf jener künstlichen, und (§. 2.) doch nicht vollkommen genauen Anordnung nicht. Von selbsten aber bringt es der astronomische Calcul, ohne weitere dießfalls nöthige Vorschriften, mit sich, daß eine

eine Franciade — so heißt im neuen Calender ein mit einem Schaltjahre sich schließender Zeitraum von vier Jahren — in gewissen Fällen fünf Jahre, statt der gewöhnlichen vier Jahre, in sich begreift. So finde ich z. B. für die ersten hundert Jahre des französischen Calenders (Vergl. die Tafel bey §. 10.), daß zwischen den Schaltjahren 15 und 20, eben so zwischen 48 und 53, zwischen 77 und 82, Franciaden von fünf Jahren enthalten sind, und daß überhaupt je die 7de oder 8te Franciade eine von dieser Art seyn muß. Durch solche außerordentliche fünfjährige Franciaden fällt dann mehr allmählich, und, wie es scheint, auf eine etwas einfachere ungekünsteltere Weise die nöthige Anzahl von Tagen aus, welche bey der Gregorianischen Einrichtung, um den Calender mit dem Himmel in Harmonie zu erhalten, auf eine mehr gewaltsame und willkührliche Art herausgeworfen wird.

§. 9. Nimmt man, statt des etwas zu großen Gregorianischen Sonnenjahrs von $365\frac{97}{400}$ Tagen, und des damit zusammenhängenden Cyclus von 400 Jahren (§. 2.) mit den neueren Astronomen, z. B. Hrn. von Zach und Hrn. La Lande, das Sonnenjahr zu 365 Tage 5 St. 48′ 48″ oder zu $365\frac{109}{450}$ Tage an, so fallen in 450 Jahren nur 109, oder in 900 Jahren nur 218 Schaltjahre, also 7 Schaltjahre weniger, als bey vierjähriger ununbrochener Einschaltung, welche in dieser Zeit 225 Schaltjahre fordert, geschehen müßte, und mithin bleibt im Durchschnitte, alle $128\frac{573\ldots}{1000\ldots}$ Jahre Ein Schalttag des vierjährigen Intercalationssystems zurück. An diesen möglichst genauen, aus den neuesten Beobachtungen hergeleiteten Cyclus von 900 Jahren, schließt sich nun der französische Calender vollkommen an. In diesen 900 Jahren nämlich fallen allemal 28 außerordentliche Fran-

ciaden von 5 Jahren (§. 8.), welche zusammen 140 Jahre umfassen. Nun sollten in 140 Jahren, bey vierjähriger Einschaltung, 35 Tage eingeschaltet werden, oder diese 140 Jahre sollten 35 gewöhnliche Franciaden enthalten; da aber die letztere in 28 außerordentliche Franciaden mit nicht mehr als 28 Schalttagen sich verwandelt haben, so fallen damit die 7 Schalttage, jeder zu seiner Zeit, regelmäßig aus, deren Auslassung, wie oben angeführt worden, der Cyclus von 900 Jahren mit sich bringt.

§. 10. Um die bisher vorgetragenen Grundsätze der französischen Zeitrechnung anschaulich, und auf eine Reihe von Beyspielen angewendet, darzustellen, theile ich die hier folgende **Tafel für das erste Jahrhundert des neuen Calenders** mit, welche ich so berechnet habe, daß ich die Herbstnachtgleiche, wodurch der Anfang jedes Jahrs und das Schaltjahr bestimmt wird (§. 5. 6.), aus den **Delambreschen** Tafeln mit hinreichender Genauigkeit herleitete. Der Inhalt dieser Tafel ist von selbsten klar: man findet in derselben 1) mit welchem Tage des gewöhnlichen Gregorianischen Calenders jedes französische Jahr von 1792 bis 1891 sich anfängt, und 2) ob es ein gemeines oder ein Schaltjahr ist. Nach derselben wird z. B. das 7te Jahr der französischen Zeitrechnung am 22 Sept. 1798 anfangen, und (weil der erste Tag des 8ten Jahrs der 23 Sept. ist) am 22 Sept. 1799 sich schließen, demnach, wie auch der beygesetzte Buchstabe B (*annus Bissextilis*) anzeigt, ein **Schaltjahr** seyn.

I. Taf.

I. Tafel. Anfang der ersten hundert Jahre der französischen Zeitrechnung.

Jahr	Anfang.	Jahr	Anfang.
1	22 Sept. 1792. B.	26	23 Sept. 1817
2	22 - 1793	27	23 - 1818
B. 3	22 - 1794	B. 28	23 - 1819
4	23 - 1795	29	23 - 1820. B.
5	22 - 1796. B.	30	23 - 1821
6	22 - 1797	31	23 - 1822
B. 7	22 1798	B. 32	23 - 1823
8	23 - 1799	33	23 - 1824. B.
9	23 - 1800	34	23 - 1825
10	23 - 1801	35	23 - 1826
B. 11	23 - 1802	B. 36	23 - 1827
12	24 - 1803	37	23 - 1828. B.
13	23 - 1804. B.	38	23 - 1829
14	23 - 1805	39	23 - 1830
B. 15	23 - 1806	B. 40	23 - 1831
16	24 - 1807	41	23 - 1832. B.
17	23 - 1808. B.	42	23 - 1833
18	23 - 1809	43	23 - 1834
19	23 - 1810	B. 44	23 - 1835
B. 20	23 - 1811	45	23 - 1836. B.
21	23 - 1812. B.	46	23 - 1837
22	23 - 1813	47	23 - 1838
23	23 - 1814	B. 48	23 - 1839
B. 24	23 - 1815	49	23 - 1840. B.
25	23 - 1816. B.	50	23 - 1841

ciaden von 5 Jahren (§. 8.), welche zusammen 140 Jahre umfassen. Nun sollten in 140 Jahren, bey vierjähriger Einschaltung, 35 Tage eingeschaltet werden, oder diese 140 Jahre sollten 35 gewöhnliche Franciaden enthalten; da aber die letztere in 28 außerordentliche Franciaden mit nicht mehr als 28 Schalttagen sich verwandelt haben, so fallen damit die 7 Schalttage, jeder zu seiner Zeit, regelmäßig aus, deren Auslassung, wie oben angeführt worden, der Cyclus von 900 Jahren mit sich bringt.

§. 10. Um die bisher vorgetragenen Grundsätze der französischen Zeitrechnung anschaulich, und auf eine Reihe von Beyspielen angewendet, darzustellen, theile ich die hier folgende **Tafel für das erste Jahrhundert des neuen Calenders** mit, welche ich so berechnet habe, daß ich die Herbstnachtgleiche, wodurch der Anfang jedes Jahrs und das Schaltjahr bestimmt wird (§. 5. 6.), aus den **Delambreschen** Tafeln mit hinreichender Genauigkeit herleitete. Der Inhalt dieser Tafel ist von selbsten klar: man findet in derselben 1) mit welchem Tage des gewöhnlichen Gregorianischen Calenders jedes französische Jahr von 1792 bis 1891 sich anfängt, und 2) ob es ein gemeines oder ein Schaltjahr ist. Nach derselben wird z. B. das 7te Jahr der französischen Zeitrechnung am 22 Sept. 1798 anfangen, und (weil der erste Tag des 8ten Jahrs der 23 Sept. ist) am 22 Sept. 1799 sich schließen, demnach, wie auch der beygesetzte Buchstabe B (*annus Bissextilis*) anzeigt, ein **Schaltjahr** seyn.

I. Taf.

I. Tafel. Anfang der ersten hundert Jahre der französischen Zeitrechnung.

Jahr	Anfang.	Jahr	Anfang.
1	22 Sept. 1792. B.	26	23 Sept. 1817
2	22 - 1793	27	23 - 1818
B. 3	22 - 1794	B. 28	23 - 1819
4	23 - 1795	29	23 - 1820. B.
5	22 - 1796. B.	30	23 - 1821
6	22 - 1797	31	23 - 1822
B. 7	22 1798	B. 32	23 - 1823
8	23 - 1799	33	23 - 1824. B.
9	23 - 1800	34	23 - 1825
10	23 - 1801	35	23 - 1826
B. 11	23 - 1802	B. 36	23 - 1827
12	24 - 1803	37	23 - 1828. B.
13	23 - 1804. B.	38	23 - 1829
14	23 - 1805	39	23 - 1830
B. 15	23 - 1806	B. 40	23 - 1831
16	24 - 1807	41	23 - 1832. B.
17	23 - 1808. B.	42	23 - 1833
18	23 - 1809	43	23 - 1834
19	23 - 1810	B. 44	23 - 1835
B. 20	23 - 1811	45	23 - 1836. B.
21	23 - 1812. B.	46	23 - 1837
22	23 - 1813	47	23 - 1838
23	23 - 1814	B. 48	23 - 1839
B. 24	23 - 1815	49	23 - 1840. B.
25	23 - 1816. B.	50	23 - 1841

I. Tafel. Anfang der ersten hundert Jahre der französischen Zeitrechnung.

Jahr	Anfang	Jahr	Anfang
51	23 Sept. 1842	76	23 Sept. 1867
52	23 - 1843	B. 77	22 - 1868. B.
B. 53	22 - 1844. B.	78	23 - 1869
54	23 - 1845	79	23 - 1870
55	23 - 1846	80	23 - 1871
56	23 - 1847	81	22 - 1872. B.
B. 57	22 - 1848. B.	B. 82	22 - 1873
58	23 - 1849	83	23 - 1874
59	23 - 1850	84	23 - 1875
60	23 - 1851	85	22 - 1876. B.
B. 61	22 - 1852. B.	B. 86	22 - 1877
62	23 - 1853	87	23 - 1878
63	23 - 1854	88	23 - 1879
64	23 - 1855	89	22 - 1880. B.
B. 65	22 - 1856. B.	B. 90	22 - 1881
66	23 - 1857	91	23 - 1882
67	23 - 1858	92	23 - 1883
68	23 - 1859	93	22 - 1884. B.
B. 69	22 - 1860. B.	B. 94	22 - 1885
70	23 - 1861	95	23 - 1886
71	23 - 1862	96	23 - 1887
72	23 - 1863	97	22 - 1888. B.
B. 73	22 - 1864. B.	B. 98	22 - 1889
74	23 - 1865	99	23 - 1890
75	23 - 1866	100	23 - 1891

§. 11. Die Tafel (§. 10.) bezeichnet den Anfang des französischen Jahrs im Gregorianischen Calender: hier füge ich noch eine zweyte allgemeine Vergleichungstafel bey, wodurch sich jedes französische Datum, das ganze Jahr über, in den ihm entsprechenden Tag der gewöhnlichen Zeitrechnung sehr leicht verwandeln läßt. Man wird ohne Mühe einsehen, wie auch das umgekehrte Problem, Tage des alten auf Tage des neuen Calenders zu reduciren, mittelst der nämlichen Tafel aufzulösen seyn möchte; indeß kam die erste Aufgabe in der Anwendung bisher häufiger vor. Da, wenigstens in dem ersten Jahrhundert der neuen Zeitrechnung (§. 10.) das französische Jahr immer mit dem 22, 23 oder 24 Sept. anfängt, so habe ich die Vergleichung auf diese drey möglichen Fälle eingeschränkt, und unter No. A die Reduction des neuen Calenders auf den alten für den Fall angegeben, wenn das Jahr mit dem 22 Sept., unter No. B wenn es mit dem 23 Sept., und unter No. C wenn es mit dem 24 Sept. anfängt; nachher folgen noch die Ergänzungstage, auf die gewöhnliche Zeitrechnung reducirt, ebenfalls für die Fälle A, B, C. Für alle drey Fälle ist die Vergleichung von 5 zu 5 Tagen, wie auch mit Voraussetzung gemeiner Jahre sowohl der neuen als der alten Zeitrechnung, angeordnet. Man hat sich bey Schaltjahren nur folgender leichten Regeln zu bedienen: 1) Wenn das gegebene französische Jahr ein Schaltjahr ist, so rechnet man am Ende der fünf Ergänzungstage bloß noch den sechsten (als den französischen Schalttag) hinzu; 2) wenn das correspondirende Gregorianische Jahr, dasjenige nämlich, welches im Nivose des gegebenen französischen Jahrs anfängt, ein Schaltjahr ist, so wird in der dreyfachen Vergleichungstafel nach dem 28 Febr. bis ans Ende des französischen Jahrs, überall ein Tag des gewöhnlichen Calenders we-

niger gerechnet: vor dem 28 Febr. ist keine Aenderung nöthig. Der allgemein verständliche Gebrauch dieser Tafel, welche indeß besondere französische Calender für jedes Jahr ersparen kann, wird aus einigen Beyspielen erhellen.

Nach öffentlichen Nachrichten wurde im lauffenden 4ten Jahre auf den 10 Germinal in Frankreich ein Jugendfest gefeyert: wie ist dieß Datum zu reduciren? Nach der Tafel bey §. 10. ist das 4te französische Jahr ein gemeines Jahr, welches mit dem 23 Sept. 1795 angefangen hat: man wählt also No. B zur Vergleichung, und findet dem 10ten Germinal den 31 März zur Seite. Weil aber das Jahr 1796, das im Nivose des 4ten Jahrs anfieng, ein Schaltjahr ist, und der 31 März nach dem 28 Februar fällt, so muß, nach der vorigen Regel, ein Tag weniger gerechnet, und also nicht der 31, sondern der 30 März 1796 = 10 Germinal des 4ten Jahrs gesetzt werden. Wirklich ist auch in der Pariser *Connaissance des temps pour l'année* 4, der 30 März als vieux style dem 10 Germinal beygefügt. — Was wird der 1. Prairial des 5ten Jahrs, an welchem, laut der französischen Constitution von 1795, Artikel 57, ein neues gesetzgebendes Corps sich das erstemal versammeln soll, für ein Tag im gewöhnlichen Calender seyn? Das 5te Jahr fängt nach der Tafel §. 10 mit dem 22 Sept. 1796 an. Man wählt daher zur Vergleichung No. A: hier ist, weil sowohl das 5te französische, als das im Nivose desselben Jahrs anfangende Jahr 1797 gemeine Jahre sind, und weil in der Tafel No. A der 30 Floreal am 19 Mai fällt, der darauf folgende 1 Prairial = 20 Mai 1797.

II. Ta-

II. Tafel, um jedes französische Datum in das gewöhnliche zu verwandeln.

		A	B	C
Vendémiaire	1	22 Sept.	23 Sept.	24 Sept.
	5	26 Sept.	27 Sept.	28 Sept.
	10	1 Oct.	2 Oct.	3 Oct.
	15	6 Ocl.	7 Oct.	8 Oct.
	20	11 Oct.	12 Oct.	13 Oct.
	25	16 Oct.	17 Oct.	18 Oct.
	30	21 Oct.	22 Oct.	23 Oct.
Brumaire	5	26 Oct.	27 Oct.	28 Oct.
	10	31 Oct.	1 Nov.	2 Nov.
	15	5 Nov.	6 Nov.	7 Nov.
	20	10 Nov.	11 Nov.	12 Nov.
	25	15 Nov.	16 Nov.	17 Nov.
	30	20 Nov.	21 Nov.	22 Nov.
Frimaire	5	25 Nov.	26 Nov.	27 Nov.
	10	30 Nov.	1 Dec.	2 Dec.
	15	5 Dec.	6 Dec.	7 Dec.
	20	10 Dec.	11 Dec.	12 Dec.
	25	15 Dec.	16 Dec.	17 Dec.
	30	20 Dec.	21 Dec.	22 Dec.
Nivôse	5	25 Dec.	26 Dec.	27 Dec.
	10	30 Dec.	31 Dec.	1 Ian.
	15	4 Ian.	5 Ian.	6 Ian.
	20	9 Ian.	10 Ian.	11 Ian.
	25	14 Ian.	15 Ian.	16 Ian.
	30	19 Ian.	20 Ian.	21 Ian.
Pluviôse	5	24 Ian.	25 Ian.	26 Ian.
	10	29 Ian.	30 Ian.	31 Ian.
	15	3 Febr.	4 Febr.	5 Febr.
	20	8 Febr.	9 Febr.	10 Febr.
	25	13 Febr.	14 Febr.	15 Febr.
	30	18 Febr.	19 Febr.	20 Febr.
Ventôse	5	23 Febr.	24 Febr.	25 Febr.
	10	28 Febr.	1 Mart.	2 Mart.
	15	5 Mart.	6 Mart.	7 Mart.
	20	10 Mart.	11 Mart.	12 Mart.
	25	15 Mart.	16 Mart.	17 Mart.
	30	20 Mart.	21 Mart.	22 Mart.

II. Tafel, um jedes französische Datum in das gewöhnliche zu verwandeln.

		A	B	C
Germinal	5	25 Mart.	26 Mart.	27 Mart.
	10	30 Mart.	31 Mart.	1 Apr.
	15	4 Apr.	5 Apr.	6 Apr.
	20	9 Apr.	10 Apr.	11 Apr.
	25	14 Apr.	15 Apr.	16 Apr.
	30	19 Apr.	20 Apr.	21 Apr.
Floréal	5	24 Apr.	25 Apr.	26 Apr.
	10	29 Apr.	30 Apr.	1 Mai.
	15	4 Mai.	5 Mai.	6 Mai.
	20	9 Mai.	10 Mai.	11 Mai.
	25	14 Mai.	15 Mai.	16 Mai.
	30	19 Mai.	20 Mai.	21 Mai.
Prairial	5	24 Mai.	25 Mai.	26 Mai.
	10	29 Mai.	30 Mai.	31 Mai.
	15	3 Iun.	4 Iun.	5 Iun.
	20	8 Iun.	9 Iun.	10 Iun.
	25	13 Iun.	14 Iun.	15 Iun.
	30	18 Iun.	19 Iun.	20 Iun.
Meſſidor	5	23 Iun.	24 Iun.	25 Iun.
	10	28 Iun.	29 Iun.	30 Iun.
	15	3 Iul.	4 Iul.	5 Iul.
	20	8 Iul.	9 Iul.	10 Iul.
	25	13 Iul.	14 Iul.	15 Iul.
	30	18 Iul.	19 Iul.	20 Iul.
Thermidor	5	23 Iul.	24 Iul.	25 Iul.
	10	28 Iul.	29 Iul.	30 Iul.
	15	2 Aug.	3 Aug.	4 Aug.
	20	7 Aug.	8 Aug.	9 Aug.
	25	12 Aug.	13 Aug.	14 Aug.
	30	17 Aug.	18 Aug.	19 Aug.
Fructidor	5	22 Aug.	23 Aug.	24 Aug.
	10	27 Aug.	28 Aug.	29 Aug.
	15	1 Sept.	2 Sept.	3 Sept.
	20	6 Sept.	7 Sept.	8 Sept.
	25	11 Sept.	12 Sept.	13 Sept.
	30	16 Sept.	17 Sept.	18 Sept.

Ergän-

Ergänzungstage (*Jours complémentaires*).

	A	B	C	
1	17 Sept.	18 Sept.	19 Sept.	
2	18 Sept.	19 Sept.	20 Sept.	
3	19 Sept.	20 Sept.	21 Sept.	
4	20 Sept.	21 Sept.	22 Sept.	
5	21 Sept.	22 Sept.	23 Sept.	
6	22 Sept.	23 Sept.	24 Sept.	Schalttag.

§. 12. Zum Beschlusse hier noch ein Wort von der **neuen Eintheilung der Stunden**, die ebenfalls in Frankreich dekretirt worden, aber bisher meist blosses Project geblieben ist. Jeder Tag soll, statt in 24 Stunden, nach den einfachern Decimalsystem in 10 Stunden, jede Stunde in 100 Minuten, jede Minute in 100 Secunden getheilt werden. Es ist also 1 neue Stunde $= 2\frac{4}{10}$ der alten, 1 neue Minute, deren der Tag 1000 enthält, $= 1\frac{44}{100}$ der alten, und eine neue Secunde $\frac{864}{1000}$ oder ungefähr $\frac{6}{7}$ der alten Secunde. Der Tag enthält auf diese Art 100,000 neue Secunden, statt der gewöhnlichen Abtheilung 86,400 Secunden. Für die neue kürzere Zeitsecunde wäre die Länge des Pendels zu Paris nur gegen 27 Zolle 5 Linien, Pariser Maas, statt daß sie nach den neuesten Untersuchungen, 36 Zolle 8,60 Linien für die gewöhnliche Secunde gefunden ward. (S. *Connaissance des temps pour l'année* 1795. *p.* 284). So viele Schwierigkeiten die wirkliche Einführung jener Decimaleintheilung des Tages im gemeinen Leben haben dürfte, so große Vortheile und Bequemlichkeiten würde sie unstreitig den Astronomen verschaffen, nicht nur etwa weil das neue Pendel kürzere Secunden schlägt als das alte, und demnach die Zeit in kleineren Theilen unmittelbar zumißt, sondern überhaupt wegen der schicklichern Art des Ausdrucks, und der bequemern astronomischen Rechnung. Statt zu sagen, eine Beobachtung sey geschehen 1796 den 20 Apr. um 9 St. 35′ 43″ würde man nach

der

der neuen Einrichtung blos schreiben: 1796. 20, 39980 Apr. das heißt, am 20 Apr. 3 Stunden, 99 Min. 80 Sec. so, daß immer die erste Decimalstelle Stunden, die zweyte und dritte Minuten, die vierte und fünfte Secunden, nach der neuen Eintheilung bedeuten würde. Man findet bereits in mehreren Sammlungen astronomischer Tafeln dergleichen Tafeln, welche zur Verwandlung der alten Abtheilungen des Tages in die neuen Stunden, Minuten und Secunden dienen können: hierher gehört z. B. in der *Astronomie par La Lande. Tome I. Tables p.* 235. die letzte unter den Kometentafeln, welche die Aufschrift führt: *Table pour réduire les heures, minutes et secondes en fractions décimales de jour.*

V.

Bemerkungen für Eulers und Karstens, auch Kästners Vortrag der Mechanik; von E. G. Busse, Professor zu Dessau.

---

1. Euleri mechanica, tom. I. §. 155. hat die wichtige Gleichung $dc = \frac{npdt}{A}$; die ich hier ⊙ nennen, und durch $dc = n.\frac{P}{M}dt$ schreiben will; weil doch Eulers A hier noch die Masse des Körpers bedeutet, dessen p aber die Größe der vis motricis am Ende der Zeit t ausdrückt; und ich es in einer anderweitigen Abhandlung, wobey mir die hiesigen Betrachtungen entstanden sind, sehr bequem fand, die bewegende Kraft durch P zu bezeichnen.

nen *). Durch c wird die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t angegeben; und wegen das n erinnert Euler, daß es eine constante Größe bedeutet, weil es weder von P noch dt noch M abhängt.

2. In §. 157. wird, durch Hülfe der phoronomischen Gleichung $c = \frac{ds}{dt}$, aus ⊙ gefolgert $c\,dc = n\frac{P}{M}ds$, indem s den Raum bedeutet, der wegen P während t beschrieben wird.

3. In §. 193 wird Eulers p, also mein P, auf eine constante Größe g eingeschränkt, die ich G nennen will. Dadurch giebt die letzte Gleichung, daß $c^2 = 2n\frac{G}{M}x$, für $s = x$.

4. In §. 101 und 102 wird statt c, des bisherigen Maßstabes der Geschwindigkeit, die derselben zugehörige Höhe v eingeführt, und $v = c^2$ gesetzt. Das giebt $v = 2n\frac{G}{M}x$.

5. Nach §. 204 soll G der eingebildeten constanten Schwerkraft zugehören, wodurch $x = v$ wird, folglich $n = \frac{M}{2G}$, oder durch Eulers A geschrieben, $n = \frac{A}{2G}$. Dabey erinnert Euler, daß nunmehr n bestimmt sey, welches in allen Fällen einerley Werth behalte. Dann folgt:

§. 205. Quia hic G vim gravitatis significat, erit $\frac{G}{A}$ quantitas constans (§. 97) **). Hanc ergo pone-

*) Jene Abhandlung beschäftigt sich mit Tafeln, wodurch die Uebersicht und Auflösung mechanischer Aufgaben erleichtert wird, und soll im zweyten Bande meiner Beyträge zur Mathematik rc. mitgetheilt werden, hauptsächlich für Praktiker.

**) §. 197. sagt, daß das Gewicht den Massen proportional bleibt.

ponemus 1, id quod licebit, cum potentiae ad corpora definitam rationem habere nequeant. Atque hinc facile erit, in aliis casibus valorem ipsius $\frac{G}{A}$ seu potentiae applicatae ad corpus exhibere. Erit nempe $\frac{G}{A}$ ad 1, seu G : A, vt vis G, qua corpus sollicitatur, ad pondus, quod idem corpus haberet in nostris regionibus. Litera igitur A non amplius materiae quantitatem denotabit sed ipsum corporis A pondus, si super terra esset positum. Hoc igitur modo omnes potentias cum ponderibus comparabimus, id quod in potentiis mensurandis ingentem lucem foenerabitur.

§. 206. Cum in $n = \frac{A}{2G}$, G denotet vim gravitatis, positumque sit $\frac{G}{A} = 1$, erit $n = \frac{1}{2}$. Quem valorem semper retinebit, si modo celeritates per radices quadratas altitudinum ipsis debitarum exprimantur. Ideoque erit in nostro casu $dv = \frac{G}{A} dx$, et $v = \frac{Gx}{A}$.

§. 207. Propterea in hac lege generali $cdc = n \frac{P}{A} ds$ (157), si sit altitudo celeritati c debita v, erit $cdc = \frac{dv}{2}$, adeoque ob $n = \frac{1}{2}$, habebitur haec lex $dv = \frac{P}{A} ds$.

§. 6.

§. 6. Diese drey Paragraphen bleiben mir undeutlich. Selbst der letzte könnte immerhin einige Besorgniß dadurch erregen, daß er $\frac{1}{2}$ statt n in die allgemeine Gleichung setzt; da doch dieser Werth von n durch Hülfe einer Integration in §. 3 herausgebracht ist wie sie nur für constante Kräfte Statt findet.

Wenigstens weiß ich die ganze hiesige Absicht auf einem andern Wege zu erreichen, der mir vollkommen deutlich bleibt, auch kürzer und natürlicher scheint, und jener Besorgniß gar nicht unterworfen ist, weil er lediglich durch Differentialien führt.

Einleitung.

§. 7. Die Gleichung ⊙ wird bey Euler als erster Zusatz einer vorhergehenden Auflösung eingeführt. Denkt man sich nun, neben dem M, P, c und t dieser Gleichung, unter M, Π, κ und τ, die ähnlichen Größen eines andern Falles: so ergiebt sich aus jener Auflösung selbst, daß n eigentlich $= \frac{d\kappa}{\frac{\Pi}{M}d\tau}$ bedeuten muß; und demnach durch n auf einen andern Fall hingewiesen wird, den man für den eigentlich vorgegebenen als einen durchaus bekannten Regelfall, benutzen will. Es entstehe nun der Wunsch, jeden Fall mit M, P, c und t, nach der Regel der eingebildeten constanten Schwerkraft auszumessen; so wird es am natürlichsten seyn, gerade jenes n auf diesen Fall der Schwerkraft einzuschränken, weil doch dieses n der Vergleichung des Maßstabes wegen da steht.

Ausführung.

I. Eulers Gleichung ⊙, aufs deutlichste verstanden, drückt folgende Proportion aus:

$$dc : d\kappa = \frac{P}{M}dt : \frac{\Pi}{M}d\tau.$$

Wenn ferner s und σ die Räume bedeuten, welche wegen der beyden Kräfte, deren statistisches Maß P und Π angiebt, von den beyden Massen M und M während t und τ beschrieben werden; so hat man, da überhaupt $c = \frac{ds}{dt}$, und eben so $\varkappa = \frac{d\sigma}{d\tau}$ ist,

$$\text{auch } c\,dc : \varkappa\,d\varkappa = \frac{P}{M} ds : \frac{\Pi}{\mathrm{M}} d\sigma.$$

II. Nun werde Γ statt Π gesetzt, indem für den Regelfall die obige Schwerkraft genommen werden, und Γ das Gewicht der Masse M andeuten soll:

so hat man $c\,dc : \varkappa\,d\varkappa = \frac{P}{M} ds : \frac{\Gamma}{\mathrm{M}} d\sigma.$

III. Wenn G der Masse M Gewicht bedeutet, so ist $M : \mathrm{M} = G : \Gamma$;

folglich $c\,dc : \varkappa\,d\varkappa = \frac{P}{G} ds : \frac{\Gamma}{\Gamma} d\sigma = \frac{P}{G} ds : d\sigma$, von hier an $\frac{P}{G}$ als Zahl gedacht.

IV. Zeit- und Längeneinheit werde so gewählt, daß $\varkappa^2 = \upsilon$ werde, indem υ die der Geschwindigkeit $\varkappa$ zugehörige Höhe bedeutet; so wird auch $2\varkappa\,d\varkappa = d\upsilon$ Bey den beyden hier geforderten Einheiten ist auch $c^2 = v$, wenn v der Geschwindigkeit c zugehörige Höhe bedeutet; und daher $2c\,dc = dv$.

Folglich $dv : d\upsilon = \frac{P}{G} ds : d\sigma.$

Aber schon wegen II ist hier $\upsilon = \sigma$, also auch $d\upsilon = d\sigma$;

folglich $dv = \frac{P}{G} ds.$

§. 9.

§. 9. **Anmerkung.** Aus dieser Gleichung kann man wegen $dv = 2cdc$ und $c = \frac{ds}{dt}$ auch wiederum herleiten $dc = \frac{1}{2}\frac{P}{G}dt$. Und mit dieser die obige (a) $dc = n.\frac{P}{M}dt$ verglichen, kann man sagen: ihr $\frac{n}{M}$ wird $= \frac{1}{2G}$, wenn man den Regelfall, auf welchen n hinweiset, von der obigen Schwerkraft hernimmt, und sich auf die Zeit und Längeneinheit einschränkt, bey welchen $v = c^2$ ist. Diese Bemerkung scheint mir deutlicher als Eulers §. 206.

Zusatz zur obigen Ausführung.

§. 10. Die in IV. geforderten Einheiten sind, wie bekannt genug ist, $\frac{1}{250}$ einer Zeitsecunde, und 1 Rheinischer Scrupel, unter der Annahme, daß der Raum, durch welchen die obige Schwere während einer Zeitsecunde beschleunigt, = 15625 Rheinische Scrupel sey; woraus denn folgt, daß dieser Raum für die obige Zeiteinheit gerade $= \frac{15625}{250^2} = \frac{1}{4}$ Scrupel ist. Jene beyden Einheiten nebst der erwähnten Annahme machen drey Bedingungen aus, die freylich für die beyden ersten Bände der Eulerischen Mechanik durchaus beybehalten werden.

§. 11. Aber für meine nachfolgende zweyte Erörterung wird es dienlich seyn zu bemerken, daß die Gleichung $dv = \frac{P}{G}ds$, an und vor sich betrachtet, von diesen drey Bedingungen ganz unabhängig bleibt. Denn wenn auch G nichts Bestimmteres bedeutet, als den Raum, um welchen die Schwere in der Zeiteinheit beschleunigt, ohne

 daß

daß diese Einheit bereits gewählet seyn soll; so ist doch

$v = \frac{c^2}{4G}$ und $\upsilon = \frac{\varkappa^2}{4G}$;

folglich $dv : d\upsilon = \frac{2cdc}{4G} : \frac{2\varkappa d\varkappa}{4G} = cdc : \varkappa d\varkappa$.

Demnach kann aus obigen III in §. 8. sogleich gefolgert werden $dv : dc = \frac{P}{G} ds : d\sigma$;

Und da wegen II schon $\upsilon = \sigma$ ist, auch $dv = \frac{P}{G} ds$.

§. 12. So gewiß nun hieraus erhellet, daß diese Gleichung an und vor sich auf keine Einheit eingeschränkt ist, so setzt doch ihre Beziehung auf c eine gewisse Gleichung voraus, welche für die Forderung, daß irgend ein Zeitraum zur Einheit gewählt werden soll, die Gestalt $v = \frac{c^2}{4g}$ gewinnt; indem g den Raum bedeutet, um welchen die Schwere wegen der zu wählenden, doch noch beliebig wählbaren, Zeiteinheit beschleunigt.

Sobald dieses g, wie gewöhnlich, den Raum bedeuten soll, um welchen die Schwere während einer Zeitsecunde beschleunigt; so ist dadurch die Zeiteinheit allerdings auf eine Secunde bestimmt; übrigens aber ist man dadurch noch auf keine Längeneinheit eingeschränkt. Denn selbst an die sehr gewöhnliche eines Rheinischen Schuhes, wonach man g auszudrücken pflegt, wird man erst da gebunden seyn, wo man statt g schlechthin die Zahl 15,625 geschrieben hat, ohne Nahmen.

§. 13. Soll aber die Gleichung zwischen v und c seyn $v = c^2$, nach Eulers Forderung; so muß $g = \frac{1}{4}$ seyn. Und eben deshalb, weil hier statt des obigen allgemeinen G (§. 11) schlechthin $\frac{1}{4}$ zu schreiben ist, dabey aber angenommen wird, daß die Schwere während jeder Secunde

cunde um 15, 625 Rhein. Schuh beschleunige, eben dadurch wird man bey Eulers Gleichungen gezwungen, auch c nach Rheinischen Scrupeln anzugeben; folglich auch v und s für $dv = \frac{P}{G} ds$, so bald diese Gleichung auf c oder g soll bezogen werden.

Nunmehr will ich, wegen eines unbequemen Sprachgebrauches in Karstens Mechanik, zu erörtern suchen, daß **Eulers Worte, wo er die beschleunigende Kraft erklärt etwas anderes ausdrücken, als was er wirklich dafür gebraucht und durch seine Formeln darstellt.**

Diese Worte machen seinen §. 213 aus. Man lese ihn bis zu: Vocatur hic effectus a Neutono vis accelerans.

§. 14 Euler will doch hier Newtons Erklärung befolgen, und hat gleichwohl effectus statt Jenes efficacia gesetzt. Daß aber Jener unter efficacia (Wirksamkeit) nicht effectus (Wirkung) verstehe, wird schon aus folgendem Theile seiner 8ten Definition in princ. phil. nat. erhellen: .... et vim acceleratricem .... tanquam efficaciam quandam, *de centro* per loca singula in *circuitu diffusam ad* mouenda corpora.

Eulers A soll seit §. 205 nicht fernerhin Masse, sondern Gewicht bezeichnen. Gesetzt indessen, daß es hier noch einmal in jener alten Bedeutung genommen werde, so ist dann $dv = \frac{P}{A} dx$ nur als eine Verhältnißgleichung zu verstehen, welche mehrere Dimensionen stillschweigend voraus setzt. Durch diese wird sehr leicht er-

hellen, daß auch in diesem Falle Eulers $\frac{P}{A}$ eben das ist, was ich oben durch $\frac{P}{G}$ ausgedrückt habe in $dv = \frac{P}{G} ds$

Diese Gleichung ist nun an und vor sich betrachtet, auf keine bestimmte Zeiteinheit eingeschränkt. (§. 11. 12) Da aber bey Hrn. Euler durch Beziehung auf sein c diese Einheit bereits auf $\frac{1}{250}$ Secunde festgesetzt ist; so ist nicht etwa $\frac{P}{G}$, sondern $\frac{1}{4}\frac{P}{G}$ die Zahl des Raumes, durch welchen die hiesige Kraft während der $(t+1)$ten 250stel Secunde ihrer Wirkungszeit beschleunigen würde, wenn sie während dieses $(t+1)$ten Zeitraumes unverändert bliebe, durchaus die Größe behielte, welche sie am Ende des $t$ten Zeitraumes, als Function von t, erreicht hatte, und wobey sie den statischen Druck $= P$ auf die Masse ausüben würde, welche der Schwerkraft unterworfen, $= G$ wiegen würde.

Mag indessen die Gleichung $dv = \frac{P}{G} ds$ auf das obige unbestimmte g bezogen werden; so ist alsdann der Raum, um welchen die Bewegung wegen der beschleunigenden Kraft $= \frac{P}{G}. 1$, während des $(t+1)$ten Zeitraumes gleichförmig beschleunigt würde, dieser Raum ist dann $= \frac{P}{G}. g$. Daraus erhellet ganz allgemein, daß dieser Raum durch die Zahl $\frac{P}{G}$ nur unter der Bedingung ausgedrückt werden könne, daß man $g = 1$ setzt.

Für die Gleichungen in Eulers Mechanik kann dergleichen neue Längeneinheit, $g = 1$, nicht angenommen wer-

werden, weil die dortige schon auf einen Rheinischen Scrupel, und die Zeiteinheit auf $\frac{1}{250}$ Secunde festgesetzt ist. Und wenn man anderweitig gerade eine Secunde zur Zeiteinheit gewählt hat, und alle Längen nach Rheinischen Schuhen ausmißt; so ist ebenfalls nicht $g = 1$.

Gesetzt indessen, daß dergleichen Bedingungen nicht vorhergegangen wären, sondern g zur Längeneinheit könnte gewählt werden, so wird dann freylich in den obigen Gleichungen die beschleunigende Kraft sowohl, als der Raum, durch welchen sie während der Zeiteinheit beschleunigt, vermittelst einerley Zahl ausgedrückt, vermittelst der unbenannten Zahl nämlich, welche den Exponenten des Verhältnisses $\frac{P}{G}$ ausmacht. Dergleichen unbenannte Zahl aber ist allein noch nicht hinreichend, irgend eine von jenen beyden Größen, der Kraft oder des Raumes, darzustellen, sondern wenn $\frac{P}{G}$ irgend eine von diesen beyden Größen vorstellen soll, so muß $\frac{P}{G}$ eine benannte Zahl seyn. Und da ist nun ihr Nahme, ihre Einheit, entweder die Schwere *) oder die Länge g, je nachdem sie jene Kraft oder jene Größe des Raumes vorstellen soll. Es bleibt also $\frac{P}{G}$ als Ausdruck der beschleunigenden Kraft gedacht, von $\frac{P}{G}$ als Ausdruck des Beschleunigungsraumes gedacht, immer noch wie Ursach und Wirkung verschieden, auch für $g = 1$. (Wenn übrigens γ und π zwey Räume bedeuten, durch welche die

*) Unter Schwere verstehe ich hier allenthalben nicht etwa Gewicht, sondern Schwerkraft; nach des Herrn Hofr. Kästners Anfangsgründen der höhern Mechanik, Cap. III. §. 51.

die Schwere und die andere absolute Kraft die Masse M in gleichen Zeiten gleichförmig beschleunigen würden; so gilt, was so eben für $\frac{P}{G}$ gesagt ist, auch für $\frac{\pi}{\gamma}$, unter der bekannten Behauptung, daß $\frac{P}{G} = \frac{\pi}{\gamma}$.)

Aeußerst wahrscheinlich ist nun selbst ein **Karsten** durch die obigen **Worte** seines großen Vorgängers zu der Meinung veranlaßt worden, die er in §. 46 seiner Mechanik (**Lehrbegriff** 3. Theil 1769) zum Grunde legt.

„Dasjenige, was ich hier **Beschleunigung** der „Kraft V nenne, heißt bey den meisten übrigen Schrift„stellern **beschleunigende Kraft** (vis acceleratrix). „So wäre g = 15,625 Rh. Schuh, die beschleunigende „Kraft der Schwere. Mir scheint jener Ausdruck deut„licher und der Sache angemeßner zu seyn."

Ein Glück für die Wissenschaften wäre es, wenn man sich endlich dahin vereinigte, nur von den Lehrbüchern der größten Meister, für jeden Zweck, den sie bearbeitet haben, Gebrauch zu machen. Aber Karstens Lehrbücher gehören zu diesen wenigen, und müssen nahmentlich für die Maschinenlehre auch neben den Kästnerischen sehr empfohlen werden, sind auch jedem nöthig, der unsern Langsdorf benutzen will. Daher schien es mir der Mühe werth, bey Ihm, den ich nie ohne einige Verehrung nennen kann, die obige Uebereilung zu erörtern; besonders da sie viele Folgen gehabt hat, auch bey Ihm selbst. Denn in den übrigen Theilen seines Lehrbegriffes wird gar oft als Beschleunigung aufgeführt, was allerdings **beschleunigende Kraft** heißen konnte bey Euler, d'Alembert und Kästner, (welche Karsten bey Ausarbeitung seiner Mechanik hauptsächlich scheint vor Augen gehabt zu haben,) was aber **Beschleunigung** nach seiner

obigen

obigen Erklärung nicht ist. Eben so wird bey ihm auch gar oft Winkelbeschleunigung oder Umdrehungsbeschleunigung genannt, was doch nach seiner eigenen Erklärung diesen Nahmen nicht verdienet, z. B. das bekannte

$$\frac{dy}{2gdt} = \frac{a(p-\varphi)-bq}{Mkk+Paa+Qbb}$$ in §. 341. Theil IV. *)

Allerdings kann man ohne den Ausdruck, beschleunigende Kraft, (und den ihm gemäßen, winkelbeschleunigende Kraft) allenthalben fertig werden: daß aber dieser Ausdruck und Begriff sehr nette und bündige Auflösungen an die Hand giebt, und dadurch für die Ausübung sehr bequem wird, ist besonders in **Kästners höherer Mechanik** sichtbar, und in **Pasquichs Versuch eines Beytrages zur ..., vortheilhaften Einrichtung der Maschinen**, der den Hrn. Hofr. Kästner vortrefflich befolgt hat.

Die bisher erwähnte **Eulerische Mechanik** ist eigentlich als Anfang dieser Wissenschaft zu **Petersburg** 1736 in zwey Bänden erschienen, unter dem Titel, Euleri mechanica etc. Alles aber, was aus diesem Anfange für seine Theoria motus corporum rigidorum etc. Gryphisw. 1765 (und ed. nov. 1790) vorauszusetzen nothwendig war, das hat Er in dieser Hinsicht hier aufs neue bearbeitet; so, daß dieses letztere Lehrbuch für seinen Zweck allein ausreicht, und man nicht genöthigt ist, dessen Gebrauch auf jenen älteren Theil zu gründen. Gerade dieses neuere Lehrbuch ist nun freylich von Herrn **Karsten** hauptsächlich beachtet worden. Da es aber von der beschleunigenden Kraft keine Erklärung

 giebt

*) Aus diesen Folgen bitte ich meine obige Erörterung zu beurtheilen. Denn übrigens weiß ich gar wohl wie äußerst abstrakt nahmentlich d'Alemberts beschleunigende Kraft ist. Auch habe ich nicht aus den Augen verlohren, daß der Ausdruck ihrer Größe, in Beziehung auf die Schwere, in den Formeln nur als unbenannte Zahl wirkt rc. Aber genug, daß obiges Misverständniß bey Hrn. Karsten selbst schon die erwähnten Folgen gehabt hat.

giebt; so ist es wohl gewiß genug, daß Herr Karsten in dieser Hinsicht jenes ältere nachgeschlagen hat.

Was ich nun bey jenem älteren Lehrbuche wegen des dortigen n erinnert habe, wird sich mit leichter Mühe auch auf das λ des neuern anwenden lassen, welches hier cap. III. §. 162 eingeführt wird.

Nachdem hier die Gleichung $\frac{dds}{dt^2} = \lambda . \frac{P}{A}$, in Cap. IV, auf gleichförmig beschleunigende Kräfte angewandt, und dem gemäß auch integrirt wird; so wird dann ferner ihr P auf die eingebildete constante Schwerkraft eingeschränkt, und dadurch bestimmt, daß $\lambda = \frac{2g}{tt}$ ist, also = 2 g für t = 1. Da nun dieser Werth von λ auch in allen Kapiteln beybehalten wird, wo doch nicht mehr bloß von constanten Kräften die Rede ist; so könnte hier so gut wie oben (§. 10), die dort erwähnte Besorgniß entstehen. Daß sie gegründet sey, will ich keinesweges behaupten. Ich glaube mich vielmehr zu erinnern, daß mir selbst vor mehrern Jahren, Eulers Verfahren wegen des λ allein genommen, nicht anstößig geblieben ist. Vielleicht schon deshalb nicht, weil doch der ganze Ausdruck für d d s auf keine höhere als die zweyte Dignität von d t soll bezogen werden, also immer nur vermittelst der gleichförmig beschleunigten Bewegung durch ihn gefolgert wird. Aber da ich gegenwärtig die Mechanik aus dem Gesichtspunkte eines Practikers zu studieren habe, so durfte ich über jenes aufs neue nachzudenken mir um so weniger erlauben, je gewisser ich überzeugt wurde, daß ich alles, was Euler vermittelst jenes n und λ folgert, auch ohne dieselben auf einem andern Wege zu finden wisse, der mir auf jedem Fall für immer der deutlichste bleiben wird. Daß er dieses, beym Gebrau-

che

che der Eulerischen Mechanik, auch für jeden andern seyn werde, davon bin ich schon deshalb überzeugt, weil es sicherlich schon bey den phoronomischen Lehren deutlicher gewesen wäre, zuförderst die Proportionen zu erweisen (z. B. $v : V = \frac{s}{t} : \frac{S}{T}$) und aus ihnen die Gleichungen (z. B. $v = \frac{s}{t}$) erklärend zu rechtfertigen; anstatt, daß nach Hrn. Euler die Proportionen aus den Gleichungen hergeleitet werden. (Theoria motus Cap. I. §. 34.). Ueberdies möchte man die eben erwähnte Einführung des dt^2 bey Euler nicht gehörig gerechtfertigt finden, wie ich bald berühren werde. Mag man sich indessen bald genug davon überzeugen können, daß obiges λ nur durch anders gewählte Einheiten verändert werden kann: so ist doch dieses allein noch nicht hinreichend, um Eulers Weg völlig deutlich zu finden: sondern man muß auch $\frac{P}{A} = 1$ zu setzen wissen. Nach solchen Betrachtungen glaubte ich, daß mein obiges Verfahren zu empfehlen sey.

Indem ich dessen hiesige Anwendung vor Augen nehme, finde ich dienlich, sie für den einen Theil des 9ten Problemes Cap. III. §. 162 ausführlich herzusetzen; weil mir dieses die beste Einleitung zu einer anderweitigen Erinnerung abgiebt, die mir nöthig scheint, und zugleich dt^2 mit berührt.

Der eine Theil der Aufgabe, welchen ich hier nur behandeln will, ist: . . . . definire mutationem momentaneam in motu . . . . productam.

Dazu

§. 15. Dazu werde ich also, statt Hrn. Eulers Gleichung $\frac{dds}{dt^2} = \frac{\lambda P}{A}$, mit meinen obigen Buchstaben die Proportion $\frac{dds}{dt^2} : \frac{dd\sigma}{d\tau^2} = \frac{P}{M} : \frac{\Pi}{\mathrm{M}}$ zum Grunde legen.

Nun soll der Fall mit den griechischen Buchstaben als Regelfall betrachtet, und von der eingebildeten constanten Schwerkraft hergenommen werden, also $\Pi = \Gamma$ seyn, indem Γ das Gewicht der Masse M bedeutet Heißt ferner G der Masse M Gewicht; so ist $M : \mathrm{M} = G : \Gamma$,

folglich $\frac{dds}{dt^2} : \frac{dd\sigma}{d\tau^2} = \frac{P}{G} : 1.$

Aber wegen $\Pi = \Gamma$ ist $\sigma = g\tau^2$, folglich $dd\sigma = 2g\,d\tau^2$;

also $\frac{dds}{dt^2} = g\frac{P}{G}$.

Ist nun anerkannt, daß $d\omega = \frac{dds}{2}$ wird, indem nach Euler $d\omega$ den Raum bedeuten soll, um welchen die Kraft, nach statischem Maße $= P$, während dt (gleichförmig) beschleunigt; so haben wir $d\omega = g\frac{P}{G}dt^2$; wie in Cap. IV. §. 201.

Meine vorhin erwähnte Erinnerung ist nun folgende.

§. 16. Ich bin hier mit Euler in §. 162 davon ausgegangen, daß $\frac{dds}{dt^2}$ dem $\frac{P}{A}$ proportional sey. Für diese Behauptung wird dort vorläufig angeführt, daß doch $d\omega$ in dem $\frac{dds}{dt^2}$ involvirt sey: und die Proportionalität

zwi-

zwischen $d\omega$ und $\frac{P}{A}$ ist allerdings schon vorher abgehandelt. Nachher wird dann auf zweyerley Weise erörtert (§. 166 und 167), daß $d\omega = \frac{dds}{2}$ ist. Aber beyde Erörterungen scheinen mir einem logischen Cirkel unterworfen zu seyn. Denn um die erste völlig einzusehen, sind ja wohl solche Kenntnisse von den Wirkungen constanter Kräfte nöthig, als hier erst im folgenden Kapitel abgehandelt werden. Und bey der zweyten Erörterung wird wiederum die Gleichung $dds = \lambda . \frac{P}{A} dt^2$ schon zum Grunde gelegt.

Ueberdies sehe ich nicht ein, wie man, ohne jene Gesetze für die Wirkung constanter Kräfte schon zu kennen, aus alle dem, was dem Gebrauche des $\frac{dds}{dt^2}$ im §. 162 vorhergeht, sich erklären könne, warum hier dds außer dem $\frac{P}{A}$ auch dem dt^2 proportional gesetzt wird.

Deshalb habe ich kein Bedenken getragen, in meiner Auflösung (§. 15.) es ausdrücklich als bekannt zu fordern, daß $\sigma = g\tau^2$ ist, für $\Pi = \Gamma$.

§. 17. In der schon oben berührten Abhandlung denke ich die Verbindung zwischen $u = \frac{ds}{dt}$, $du = \frac{dds}{dt}$ und $\frac{d\omega}{dt^2} = \frac{dds}{2dt^2}$ vermittelst der dynamischen Hauptgleichung sehr kurz und deutlich darzustellen.

Wenn meine hiesigen Bemühungen ihren Zweck erreichen, und einigen Lesern der Eulerischen Mechanik etwas

Zeit

Zeit ersparen können; so habe ich Ursache mich dessen zu freuen; weil die Zeit aller derer, die sich mit Euler beschäftigen, etwas Werth ist. In ähnlicher Hoffnung will ich noch in

Kästners Anfangsgründen der höhern Mechanik, 1766,

einen Vortrag zu erläutern suchen, der überdies hieher gehört; weil doch alle, die etwa über das obige n und λ weiter nachdenken wollen, unter den übrigen Lehrbüchern das Kästnerische zuerst ergreifen werden.

Der dortige Gebrauch des constanten e, in Kap. I. §. 13 und 35 ꝛc. wird auch für Anfänger sehr deutlich und lehrreich seyn, wenn sie dessen zwiefachen Ausdruck genau vor Augen behalten. Dazu möchte nun dienlich seyn, an Statt der Buchstaben c und C nebst s und S; so lang und so oft sie wie in §. 13 nur constante Geschwindigkeiten, und damit beschriebene Räume der gleichförmigen Bewegung bedeuten, lieber durchaus andere Buchstaben, etwa c und C nebst s und S, zu gebrauchen: weil doch in der Folge c und C solche Geschwindigkeiten bedeuten, die den Zeiten t und T proportional sind, und s und S die dahin gehörigen Räume bey einer gleichförmig beschleunigten Bewegung; s insbesondere auch noch solchen Raum, der überhaupt mit einer veränderlichen Geschwindigkeit beschrieben wird, welche am Ende der Zeit t die Größe u erreicht. Neben S wollen wir auch noch Σ, und neben T auch noch τ gebrauchen. Es sollen ferner die großen Buchstaben allemahl den Fällen zugehören, die man bald als durchaus bekannt, und als Regelfall betrachten will; daher dann Σ und S, nach aller bisherigen Bearbeitung der höhern Mechanik, nur solche Räume bedeuten wird, welche mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, und nahmentlich vermöge

der

der eingebildeten constanten Schwerkraft beschrieben werden, — — Etwa auf folgende Weise. —

Da $s = e.ct$ ($= \frac{S}{CT}.ct$) ist, wenn c und C die beyden constanten Geschwindigkeiten bedeuten, bey welchen in den Zeiten t und T die Räume s und S beschrieben werden (nach Kästn. §. 13): so wird auch $ds = e.u\,dt$; obgleich hier s einen Raum bedeutet, der mit einer veränderlichen Geschwindigkeit beschrieben ist, deren Größe am Ende der beliebigen Zeit t gerade $= u$ wird. (§. 14.)

Für §. 35 soll nun die veränderliche Geschwindigkeit eine gleichförmig beschleunigte seyn, die demnach, falls sie am Ende einer gewissen Zeit T die Größe C erreicht, am Ende der Zeit t gerade $= \frac{t}{T}C$ werden muß. Also ist hier

$ds = e.C\frac{t}{T}dt$, folglich $s = e.\frac{1}{2}C\frac{t^2}{T}$. Dieses Integral ist vollständig, weil hier nur von solcher Bewegung die Rede seyn soll, die mit der Zeit t ihren Anfang nimmt.

Obgleich e indem es statt $\frac{S}{CT}$ geschrieben wurde, nicht etwa lediglich diesen Ausdruck vorstellen, sondern zugleich auch daran erinnern sollte, daß man statt $\frac{S}{CT}$ eine Zahl erhalten könne; so ist doch bisher nichts geschehen, wodurch wir uns darauf eingeschränkt hätten. Gesetzt auch daß wir uns bisher schon die beyden Verhältnisse $c:C$ und $t:T$, durch absolute Zahlen ausgedrückt gedacht hätten, wobey denn vermöge der Gleichung $s = e.ct$, ihr e eine benannte Zahl würde, deren Nahme,

me, deren Einheit $=$ 𝔖 wäre; so haben wir doch, um zu den ursprünglichen vollständigen Dimensionen zurückzukehren, nichts weiteres nöthig, als daß wir statt e wieder $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}T}$ schreiben. Geschieht das in der obigen Gleichung zwischen s und t, so erhalten wir sie als $s = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}T} \cdot \frac{1}{2} C \frac{t^2}{T}$.

Es entstehe nun der Wunsch, zur Bestimmung des Raumes s nicht fernerhin 𝔖 von der gleichförmigen Bewegung her beyzubehalten, sondern statt dessen den Raum Σ zu gebrauchen, welcher bey eben der gleichförmig beschleunigten Bewegung, deren s für t hier gesucht wird, in einer gewissen Zeit T beschrieben wird; so weiß man aus der eben hergesetzten allgemeinen Gleichung (die nämlich für jedes t, folglich auch für $t = T$ gilt,) daß dieses $\Sigma = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}T} \cdot \frac{1}{2} CT$ seyn muß.

(Diese Gleichung setzt uns in den Stand, das ganze $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}T}$ durch Σ, C und T auszudrücken. Denn sie giebt $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}T} = 2 \frac{\Sigma}{CT}$. Dieses in die allgemeine Gleichung gebracht, giebt dafür $s = 2 \frac{\Sigma}{CT} \cdot \frac{1}{2} C \frac{t^2}{T} = \Sigma \frac{t^2}{T^2}$. Hiemit ist die Aufgabe in §. 35, „Die Vergleichung zwischen s und t zu finden," dergestalt befriedigt, daß diese Vergleichung an keine Grössen der gleichförmigen Bewegung fernerhin gebunden ist.)

Hätten wir nicht gerade diese Aufgabe vor Augen gehabt, sondern überhaupt nur die Gesetze für gleichförmig beschleunigte Bewegung suchen wollen; so würden wir

wir etwa die Gleichung vor der Parenthese in die Proportion auflösen:

$$\mathfrak{S} : \Sigma = \mathfrak{C}\mathrm{T} : \tfrac{1}{2}\,\mathrm{C}\tau.$$

Aus ihr erhellet, daß es zur bequemsten Vergleichung zwischen $\mathfrak{S}$ und Σ nicht nur rathsam sey, beyde von gleicher Bewegungsdauer herzunehmen; indem für $\mathrm{T} = \tau$ schon ziemlich einfach, $\mathfrak{S} : \Sigma = \mathfrak{C} : \tfrac{1}{2}\,\mathrm{C}$ ist: sondern auch dafür zu sorgen sey, daß $\mathfrak{C} = \mathrm{C}$ werde; denn alsdann ist $\mathfrak{S} : \Sigma = 1 : \tfrac{1}{2}$.

Auf solche Weise erhalten wir **zuförderst den Satz**, daß der Raum Σ, der bey einer gleichförmig beschleunigten Bewegung während τ beschrieben wird, gerade halb so groß ist, als der Raum $\mathfrak{S}$, welcher in eben der Zeit gleichförmig mit der **Geschwindigkeit** würde beschrieben werden, die bey jener gleichförmig beschleunigten Bewegung am Ende der Zeit τ vorhanden ist. (Bey Hrn. **Kästner** §. 39).

Bringen wir nun diesen Satz, $\mathfrak{S} = 2\,\Sigma$ bey $\mathrm{T} = \tau$ und $\mathfrak{C} = \mathrm{C}$, in die obige allgemeine Gleichung zwischen s und t, so giebt sie $s = \frac{2\,\Sigma}{\mathrm{C}\tau} \cdot \tfrac{1}{2}\,\mathrm{C}\,\frac{t^2}{\tau}$, folglich $s = \Sigma\,\frac{t^2}{\tau^2}$.

Aus dieser letzten Folgerung wird erhellen, daß von nun an, wo nach und neben $s = \Sigma\,\frac{t^2}{\tau^2}$ wiederum e in den Formeln gebraucht wird, dieses nun nicht mehr auf $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}\mathrm{T}}$ sondern auf $\frac{2\,\Sigma}{\mathrm{C}\tau}$ zurück weiset; obgleich diese beyden Ausdrücke unter dem Beding $\mathfrak{C} = \mathrm{C}$ und $\mathrm{T} = \tau$ allerdings einerley Größe angeben. — Jeden nähmlich als obige Zahl e betrachtet; denn ohne diese Einschränkung möchte wohl von ihrer Größe, so wie sie da stehen,

nicht gut die Rede seyn können. Und von der Bemerkung Gebrauch zu machen, daß ihr $S = CT$ und ihr $2\Sigma = C\tau$ sey, erfordert ja wohl eben das, was durch sie sollte gerechtfertigt werden. —

In allen den fernern Schlüssen, welche sich in dem übrigen Theile dieses IIIten Kapitels mit den Gesetzen der ungleichförmigen Bewegung beschäftigen, muß man nun auch statt e schreiben dürfen $\frac{2S}{CT}$, da die dortigen S und T mit unserm Σ und τ gleichbedeutend sind.

Thut man dieses z. B. im §. 74; so wird der dortige Raum, der wegen Wirkung der Kraft f im Zeittheilchen dt zurückgelegt wird, $= \frac{2S}{CT} f\, dt. \frac{C}{T} dt$, also $= 2 S f \frac{dt^2}{T^2}$; da er doch nur halb so groß werden kann. Diese Abweichung ist aber nicht in der Bedeutung des e zu suchen; sondern in §. 70, oder eigentlich schon früher in §. 58. Denn der dortige verschwindende Raum kann nicht $= e\,(c + dc)\, dt$, sondern nur $= e\,(c + \frac{dc}{2})\, dt$ werden.

(Eben deshalb sollte auch in §. 77 statt des Ausdruckes $\frac{f\, dt^2}{2\, m^2}$ nur das halb so große stehen, und eben so im VI. Kap. §. 160 statt $\frac{p\, dt^2}{2\, m^2}$.)

Da ich die Lehrbücher unsers verehrungswürdigen Kästners mit der größten Aufmerksamkeit zu studieren suche; so ward ich eigentlich durch die hiesige Gegend zuerst veranlaßt auf jene Darstellung zu denken, deren ich schon oben (§. 17.) erwähnt habe; weil sie mir auch bey dem Eulerschen Vortrage nöthig blieb.

VI. Ueber

VI.

Ueber die vierrädrigen Wagen. Ein Nachlaß von J. H. Lambert *).

I. Bekanntlich braucht es, um einen Wagen auf ebener Straße gehen zu machen, keiner andern Kraft als derjenigen, die erfordert wird, das Reiben, welches die Achsen der Räder leiden, zu überwinden. Daher kommt, daß wenn man die den Wagen in Gang zu bringen hinreichende Kraft haben will, man anstatt des ganzen Gewichtes, das die Räder tragen, nur den dritten Theil desselben nimmt; und daß selbst dieses Drittheil, im Verhältniß des Halbmessers des Rades zum Halbmesser der Achse noch vermindert werden muß.

II. Diese Regel mag angehen, wenn die Räder alle gleich sind, oder wenn wenigstens das Verhältniß ihrer Durchmesser zu den Durchmessern der Achsen dasselbe ist. Allein, da besondre Gründe erheischen, daß die Vorderräder kleiner als die Hinterräder gemacht werden, so entstehen daraus einige Folgerungen, bey welchen wir uns etwas aufhalten müssen.

III. Wenn die Vorderräder kleiner sind, so muß man fürerst untersuchen, ob ihre Achse in eben dem Verhältniß kann verringert werden. Denn die Kraft der Achsen verhält sich wie der Cubus ihrer Durchmesser, dagegen das Reiben nur im einfachen Verhältniß mit diesen Durchmessern stehet.

 IV. Zu-

*) Das im May 1776 geschriebene französische Original dieses Aufsatzes war zu einer akademischen Abhandlung unter dem Titel: Sur les Voitures à quatre Roues bestimmt; und wäre vermuthlich noch weiter ausgeführet worden, wenn der sel. Verfasser (er starb am 25sten September 1777) länger gelebt hätte.

IV. Zugleich soll aber auch die Kraft der Achsen mit dem Gewichte, das die Räder tragen, im Verhältniß stehen. Hieraus folgt, daß der Schwerpunct näher bey den Hinterrädern seyn muß; und daher muß alles dies auf eine solche Art berechnet und ausgemittelt werden, daß das Verhältniß zwischen den Rädern und ihren Achsen von allen das vortheilhafteste sey.

V. Es sey der Halbmesser der Hinterräder $= R$; der Vorderräder $= r$; die respectiven Halbmesser ihrer Achsen $= A$ und a. Ferner, die Distanz zwischen den Achsen $= 1$; die Distanz des Schwerpuncts von der Vorderachse $= D$; so wird die Distanz desselben Schwerpuncts von der Hinterachse $= 1 - D$ seyn; und wenn das ganze Gewicht, das die Achsen tragen, durch P bezeichnet wird, so trägt

die Vorderachse das Gewicht $(1 - D)\,P$.
die Hinterachse — — $D\,P$.

Nun sollen aber diese Gewichte wie die Würfel der Halbmesser der Achsen sich verhalten. Folglich ist

$$n\,a^3 = (1 - D)\,P, \text{ und } n\,A^3 = D\,P.$$

VI. Ueberdies soll das Reiben, welches die Achsen leiden, durch den dritten Theil des Gewichtes, das sie tragen, ausgedrückt werden, und die zum Gange der Räder erforderte Kraft ist

für die vordern $= \frac{1}{3}(1 - D)\,P. \frac{a}{r}$

für die hintern $= \frac{1}{3}\,D\,P. \frac{A}{R}$.

Folglich wird die ganze Kraft seyn

$$F = \tfrac{1}{3}\,P. \left[(1 - D)\frac{a}{r} + D\frac{A}{R}\right]$$

oder,

oder, wenn man für A und a, ihre Werthe setzt,

$$3\,F\,n^{1:3} = P^{4:3}\left[\frac{1}{r}(1-D)^{4:3} + \frac{1}{R}.\,D^{4:3}\right].$$

VII. Nun kann aber, wenn man D als veränderlich betrachtet, die Kraft F ein **Kleinstes** werden. Dies geschiehet, wenn man setzt

$$R^3 : r^3 = D : (1-D)$$

hieraus folgt $R : r = A : a$; und

$$3\,F\,n^{1:3} = \frac{P^{4:3}.\,D^{4:3}}{R}.\left[\frac{r^3}{R^3}+1\right] \text{ oder } F = \frac{PA}{3R}.$$

VIII. Das so eben gefundene Verhältniß $R : r = A : a$ giebt uns zu erkennen, daß wirklich die Durchmesser der Achsen, im einfachen Verhältniß mit den Durchmessern ihrer Räder stehen müssen, und daß gerade das **Minimum** der Kraft F solches erfordert. Man siehet aber auch, daß sobald als die Räder ungleich sind, der Schwerpunct von allem, was auf die Räder drückt, näher bey den Hinterrädern befindlich seyn muß. Das Verhältniß

$$R^3 : r^3 = D : (1-D)$$

giebt

$$D = R^3 : (R^3 + r^3)$$

$$1 - D = r^3 : (R^3 + r^3)$$

IX. Bey einer Vergleichung dieser Formeln mit dem üblichen Gebrauche hat mich gedünkt, daß man sie an Wagen, die große Lasten führen sollen, ziemlich genau beobachte. Die Vorderräder macht man in einem nur sehr mäßigen Verhältniß kleiner als die Hinterräder. Die Last, mit welcher man diese Wagen beschweret, ladet man ein Stück weit über die Hinterräder hinaus, dagegen man sie nur wenig oder gar nicht vor die Vorder-

räder sich erstrecken läßt. Auf diese Weise wird der Schwerpunct der ganzen Last, die auf die Nabe der Räder drückt, den Hinterrädern näher gebracht. Dies muß auch so seyn, weil diese größer sind. Hiedurch erhält man ferner den Vortheil, daß der Wagen unter größern Winkeln kann gedrehet werden, und man nicht nöthig hat, die Last auf den Hinterrädern (oder Achsen) aufzuhäufen. Außerdem krümmen sich die Wagenleitern viel weniger, als wenn die ganze Ladung zwischen den vordern und hintern Rädern ruhete. Was aber die Kutschen anlangt, so will man, daß die Vorderräder zwey- bis dreymal kleiner seyen, als die Hinterräder. Hieraus würde dann folgen, daß der Schwerpunct 8 bis 27mal näher bey den Hinterrädern seyn müßte. Indessen ist dies nicht üblich, weil man auch verlangt, daß der Kasten zwischen den Rädern hänge. Näher kommt man der Regel auf Reisen, weil alsdann die Hinterräder mit der schwersten Bagage belastet werden.

X. Unsere Formeln zeigen uns an, daß die Kraft, welche erfordert wird, einen vierrädrigen Wagen zu ziehen, viel weniger von dem Verhältniß in der Größe der Räder, als von der Art, wie sie beladen werden, abhängt. Wir wollen, um ein Beyspiel zu geben, annehmen, die Last sey ein Parallelepipedum. So wird denn ihr Schwerpunct in der Mitte ihrer Länge seyn. Raget nun dieses Parallelepipedum wenig oder gar nicht vor der Achse der Vorderräder hervor, so sage man: **Wie R^3 zu der halben Länge sich verhält, eben so verhält sich r^3 zu der Distanz zwischen der Mitte des Parallelepipedums und der Achse der Hinterräder.** Wenn demnach die Länge $= \lambda$ ist, so wird diese Distanz $= \frac{\lambda r^3}{2 R^3}$ seyn.

Folg-

Folglich wird dies Parallelepipedum um den Theil

$$\frac{1}{2}\lambda - \frac{\lambda r^3}{2R^3} = \frac{1}{2}\lambda . \frac{R^3 - r^3}{R^3}$$

über die Hinterräder hervorragen.

Weil aber dieser Theil nicht leicht größer als $\frac{1}{4}\lambda$ seyn muß, so setze man $\frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{2}\lambda - \frac{\lambda r^3}{2R^3}$ und man erhält $R = r . 2^{1:3} = 1,26\ r$.

Hieraus folgt, daß wenn das Minimum der Kraft F gesucht wird, die Durchmesser der Räder in dem Verhältniß von 1 zu 1,26 seyn müssen, oder $R : r = 5 : 4$.

Wenn demnach die Hinterräder 5 Fuß in der Höhe haben, so müssen die Vorderräder 4 Fuß hoch seyn. Und wenn der Zwischenraum der Achsen 10 Fuß ist, so wird der vierte Theil dieser Länge $= 2\frac{1}{2}$ Fuß, und weil die Wagenleiter um diese Länge über die Hinterräder hinausgehet, so beträgt denn dieser Vorschuß so viel als den halben Durchmesser der Hinterräder. Auch hütet man sich in der gewöhnlichen Praxis ihn stärker herausrage zu lassen.

XI. Was ich eben itzt gesagt habe, kann dienen, dasjenige zu berichtigen, was Camus von den Wagen und Kutschen in seinem Traité des forces mouvantes (Abhandlung von den bewegenden Kräften) beybringt, und von Desagüliers in seinem Cours de Physique experimentale von Wort zu Wort ist abgeschrieben worden. Er sagt: Es würde viel vortheilhafter seyn, die vier Räder an Wagen und Kutschen groß und gleich oder ungefähr (gleich) zu machen, als die vordern um die Hälfte kleiner,

wie an mehr Orten üblich sey. *) Dieser Ausspruch und insonderheit dieses ungefähr (à peu près) kommt vollkommen mit dem Mangel an geometrischer Strenge, und mit der unbestimmten Art sich auszudrücken überein, welche in dem ganzen Traité des forces mouvantes herrschen; und man muß sich wundern, daß Desagüliers nichts dabey zu erinnern gefunden hat. Unsere Theorie gewähret uns eine deutlichere Einsicht in diese Sache. Es folgt daraus, daß wenn die Vorderräder wirklich um die Hälfte kleiner sind als die Hinterräder, alsdann der Schwerpunct 8 Mal näher bey diesen als bey jenen seyn müßte; welches nicht statt finden kann, zum wenigsten, wenn die Last mehr einem Prisma als einer Pyramide gleichen soll. Hingegen sehen wir auch, daß wenn die vier Räder alle einander gleich gemacht werden, der Schwerpunct in die Mitte fällt, und die Schwingbäume bey einer großen Last zu viel leiden würden. Ueberdies, hat man in winklichten Wegen mehr Mühe den Wagen zu lenken, wenn die Vorderräder sehr groß sind, wie Herr Camus heischet. Man wird also besser thun, sich an sein à peu près zu halten, es aber zu bestimmen, wie wir gethan haben, so daß die Durchmesser wie 5 zu 4 sich zu einander verhalten. Und wenn die Durchmesser der Achsen in eben dem Verhältniß stehet, wie sich gehöret (oben VIII), und man die Last dergestalt vertheilt, daß der Schwerpunct zweymal näher bey der Achse der Hinterräder als der Vorderräder sey, so wird die Kraft F vollkommen dieselbe seyn, als wenn sowohl die Räder als ihre Achsen von gleicher Größe wären, indem das Verhältniß zwischen den Durchmessern

*) Qu'il feroit beaucoup plus avantageux de faire les quatre roues de chariot et de caroffe grandes et égales ou à peu près, que de faire celles de devant moitié plus petites, comme il se pratique en plufieurs endroits.

fern der Räder und ihrer Achsen dasselbe bleibt. Herr Camūs hat weder auf dieses Verhältniß, noch auf den Schwerpunct Rücksicht genommen. Außerdem war es etwas unschicklich seine Bemerkung ohne Unterschied auf alle vierrädrige Fuhrwerke auszudehnen. Die Kutschen machen aus ganz besondern Ursachen eine Ausnahme. Jedermann weiß aber auch, daß sie nicht bestimmt sind, wie Güterwagen, Lasten von 20 bis 30 Centnern zu tragen, und daß, wenn man sie mit sehr schweren Coffern beladet, diese auf die Achse der Hinterräder zu ruhen kommen. Daher unterscheidet sich auch eine eigentliche Reisekutsche genugsam von einer Spatzier- oder Visitenkutsche, um bemerken zu lassen, daß man nicht ohne überwiegende Gründe die Vorderräder um mehr als das Verhältniß der Gleichheit oder wenigstens von 5 zu 4 erfordert hätte, kleiner gemacht habe.

VII. Tafel, um jedes Jahr der Julianischen

Sonnenzirkel — Indiction	B. Güldne Zahl 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	4200	420	4620	840	5040	1260	5460	1680	5880
1	1064	5264	1484	5684	1904	6104	2324	6524	2744	6944
2	2128	6328	2548	6748	2968	7168	3388	7588	3808	28
3	3192	7392	3612	7812	4032	252	4452	672	4872	1092
4	4256	476	4676	896	5096	1316	5516	1736	5936	2156
5	5320	1540	5740	1960	6160	2380	6580	2800	7000	3220
6	6384	2604	6804	3024	7224	3444	7644	3864	84	4284
7	7448	3668	7868	4088	308	4508	728	4928	1148	5348
8	532	4732	952	5152	1372	5572	1792	5992	2212	6412
9	1596	5796	2016	6216	2436	6636	2856	7056	3276	7476
10	2660	6860	3080	7280	3500	7700	3920	140	4340	560
11	3724	7924	4144	364	4564	784	4984	1204	5404	1624
12	4788	1008	5208	1428	5628	1848	6048	2268	6468	2688
13	5852	2072	6272	2492	6692	2912	7112	3332	7532	3752
14	6916	3136	7336	3556	7756	3976	196	4396	616	4816
A	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
										B' Sonnenzirkel

Ist das Argument A größer als 15, so ziehe man 15 davon ab
— — B. — 19, — — 19 —

Zu der Zahl, die die Tafel giebt, addirt man noch den Sonnenzirkel um's Jahr der Julianischen Periode zu haben.

Ueber die Gründe dieser Tafel sehe man Herrn Professor Hindenburg's Abhandlung über die Cyklischen Perioden im Magazin für Mathematik 1786. St. III. S. 281 — 324.

Periode aus seinen Kennzeichen zu finden.

— Sonnenzirkel.									
10	11	12	13	14	15	16	17	18	A'
2100	6300	2520	6720	2940	7140	3360	7560	3780	15
3164	7364	3584	7784	4004	224	4424	644	4844	14
4228	448	4648	868	5068	1288	5488	1708	5908	13
5292	1512	5712	1932	6132	2352	6552	2772	6972	12
6356	2576	6776	2996	7196	3416	7616	3836	56	11
7420	3640	7840	4060	280	4480	700	4900	1120	10
504	4704	924	5124	1344	5544	1764	5964	2184	9
1568	5768	1988	6188	2408	6608	2828	7028	3248	8
2632	6832	3052	7252	3472	7672	3892	112	4312	7
3696	7896	4116	336	4536	756	4956	1176	5376	6
4760	980	5180	1400	5600	1820	6020	2240	6440	5
5824	2044	6244	2464	6664	2884	7084	3304	7504	4
6888	3108	7308	3528	7728	3948	168	4368	588	3
7952	4172	392	4592	812	5012	1232	5432	1652	2
1036	5236	1456	5656	1876	6076	2296	6496	2716	1
9	8	7	6	5	4	3	2	1	Indiction — Sonnenzirkel.
— Güldne Zahl.									

Beyspiel
fürs Jahr Christi 1796 ist
G.Z 11; S.Z 13; Indiction 14.
13 — 11 = 2 und 14 — 13 = 1.
Argument B' = 2; Argument A' = 1;
dieß giebt in der Tafel . 6496
hierzu S.Z . . 13

Jahr der Julian. Periode 6509

J. C. Burckhardt.

VIII.

Verschiedene arithmetische Zusammensetzungen des Umfanges eines Kreises aus denselben Elementen. Von G. S. Klügel, Professor zu Halle.

---

§. 1. Der Kreis ist in der Analysis nicht weniger merkwürdig, als in der Geometrie. Der Umfang desselben kann durch den Halbmesser auf mehr als eine Art dargestellt werden, und man ist dadurch im Stande, mit geringer Mühe den Umfang viel weiter zu berechnen, als es den alten Rechnern durch geometrische Methoden möglich war. Euler macht in seiner Introd. in Anal. Infin. T. I. cap. X. schönen Gebrauch von den Potenzen der Zahl π, welche den halben Umfang für den Halbmesser Eins bezeichnet, um gewisse unendliche Reihen zu summiren. Hier will ich die Abänderungen der Reihe angeben, welche den Quadranten durch seinen Sinus darstellt. Dadurch erhält man Summen von Reihen, welche bey Integrationen häufig vorkommen.

§. 2. Es sey $(1-xx)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 + \varepsilon x^{10} +$ ꝛc. so ist $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{1.3}{2.4}$; $\gamma = \frac{1.3.5}{2.4.6}$; $\delta = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$; u. s. w.

Ferner sey $\sin\varphi = x$, so ist bekanntermaßen
$\varphi = x + \frac{1}{3}\alpha x^3 + \frac{1}{5}\beta x^5 + \frac{1}{7}\gamma x^7 +$ etc.

Der halbe Umfang für den Halbmesser Eins sey $= \pi$ so ist

$$\frac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{5}\beta + \frac{1}{7}\gamma + \frac{1}{9}\delta + \text{etc.}$$

§. 3.

§. 3. Durch dieselben Elemente α, β, γ, δ etc. und die Divisionen 3, 5, 7, 9, etc. läßt sich der Quadrant $\frac{1}{2}\pi$ auf unendlich viele Arten darstellen. Es ist nämlich

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1 + \tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{5}\beta + \tfrac{1}{7}\gamma + \tfrac{1}{9}\delta + \text{etc.}$$
$$\alpha.\ \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}\alpha + \tfrac{1}{7}\beta + \tfrac{1}{9}\gamma + \tfrac{1}{11}\delta + \text{etc.}$$
$$\beta.\ \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7}\alpha + \tfrac{1}{9}\beta + \tfrac{1}{11}\gamma + \tfrac{1}{13}\delta + \text{etc.}$$
$$\gamma.\ \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9}\alpha + \tfrac{1}{11}\beta + \tfrac{1}{13}\gamma + \tfrac{1}{15}\delta + \text{etc.}$$
$$\delta.\ \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11}\alpha + \tfrac{1}{13}\beta + \tfrac{1}{15}\gamma + \tfrac{1}{17}\delta + \text{etc.}$$

u. s. w.

§. 4. Denn man drucke in der Reihe für $\frac{1}{2}\pi$ in §. 2. jeden der Coefficienten α, β, γ. etc. durch den vorhergehenden aus, und setze $\frac{1}{2}$ für α, so ist

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1.1}{3.2} + \frac{1.3}{5.4}\alpha + \frac{1.5}{7.6}\beta + \frac{1.7}{9.8}\gamma + \text{etc.}$$

das ist $\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\alpha + \frac{5}{6}\beta + \frac{7}{8}\gamma + \frac{9}{10}\delta + \text{etc.}$
$\qquad + \frac{2}{3} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{5}{7}\beta - \frac{7}{9}\gamma - \frac{9}{11}\delta - \text{etc.}$

oder $\frac{1}{2}\pi = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$
$\qquad + \frac{2}{3} - \frac{3}{5}\alpha - \frac{5}{7}\beta - \frac{7}{9}\gamma - \frac{9}{11}\delta - \text{etc.}$

folglich $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{7}\beta + \frac{1}{9}\gamma + \frac{1}{11}\delta + \text{etc.}$

§. 5. Diese Reihe multiplicire man mit 3, so ist

$$\tfrac{3}{4}\pi = 1 + \tfrac{3}{5}\alpha + \tfrac{3}{7}\beta + \tfrac{3}{9}\gamma + \tfrac{3}{11}\delta + \tfrac{3}{13}\varepsilon + \text{etc.}$$

Hieraus wird, mittelst der vorher gebrauchten Substitution

$$\tfrac{3}{4}\pi = 1 + \tfrac{3}{10} + \frac{3.3}{7.4}\alpha + \frac{3.5}{9.6}\beta + \frac{3.7}{11.8}\gamma + \text{etc.}$$

oder $\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\alpha + \frac{5}{6}\beta + \frac{7}{8}\gamma + \frac{9}{10}\delta + \text{etc.}$
$\qquad + \frac{4}{5} - \frac{3}{7}\alpha - \frac{5}{9}\beta - \frac{7}{11}\gamma - \frac{9}{13}\delta - \text{etc.}$

das ist $\frac{3}{4}\pi = \frac{4}{5} + \frac{4}{7}\alpha + \frac{4}{9}\beta + \frac{4}{11}\gamma + \frac{4}{13}\delta + \text{etc.}$

und $\frac{3}{8}.\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\alpha + \frac{1}{9}\beta + \frac{1}{11}\gamma + \frac{1}{13}\delta + \text{etc.}$

§. 6.

§. 6. Die Fortschreitung der gefundenen Formen für $\frac{1}{2}\pi$ allgemein zu erweisen, muß man zeigen, daß aus einer solchen Form die darauf folgende fließt.

Es sey $\frac{1\ldots(2m-1)}{2\ldots\ldots 2m}\cdot\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+3}\alpha$

$+ \frac{1}{2m+5}\beta + \frac{1}{2m+7}\gamma + \frac{1}{2m+9}\delta + \text{etc.}$

so ist $\frac{1\ldots(2m+1)}{2\ldots\, 2m}\cdot\frac{1}{2}\pi = 1 + \frac{2m+1}{2m+3}\alpha + \frac{2m+1}{2m+5}\beta$

$+ \frac{2m+1}{2m+7}\gamma + \frac{2m+1}{2m+9}\delta + \text{etc.}$

$= 1 + \frac{2m+1}{2m+3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2m+1}{2m+5}\cdot\frac{3}{4}\alpha + \frac{2m+1}{2m+7}\cdot\frac{5}{6}\beta$

$+ \frac{2m+1}{2m+9}\cdot\frac{7}{8}\gamma + \text{etc.}$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\alpha + \frac{5}{6}\beta + \frac{7}{8}\gamma + \text{etc.}$

$+ \frac{2m+2}{2m+3} - \frac{3}{2m+5}\alpha - \frac{5}{2m+7}\beta - \frac{7}{2m+9}\gamma - \text{etc.}$

$= \frac{2m+2}{2m+3} + \frac{2m+2}{2m+5}\alpha + \frac{2m+2}{2m+7}\beta + \frac{2m+2}{2m+9}\gamma + \text{etc.}$

Also $\frac{1\ldots(2m+1)}{2\ldots(2m+2)}\cdot\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2m+3} + \frac{1}{2m+5}\alpha$

$+ \frac{1}{2m+7}\beta + \frac{1}{2m+9}\gamma + \text{etc.}$

Da die angenommene Form für $m = 0$ gültig ist (§. 4.), so gilt sie auch für $m = 1$, wie es auch (§. 5.) gefunden ist, daher ferner für $m = 2$, für $m = 3$, u. s. f.

§. 7.

§. 7. Eine zweyte Gattung von Form für π ist folgende:

$$\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{3} - \frac{1}{2.5} - \frac{\alpha}{4.7} - \frac{\beta}{6.9} - \frac{\gamma}{8.11} - \text{etc.}$$

$$\frac{\beta}{3}\cdot\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{5} - \frac{1}{2.7} - \frac{\alpha}{4.9} - \frac{\beta}{6.11} - \frac{\gamma}{8.13} - \text{etc.}$$

$$\frac{\gamma}{4}\cdot\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{7} - \frac{1}{2.9} - \frac{\alpha}{4.11} - \frac{\beta}{6.13} - \frac{\gamma}{8.15} - \text{etc.}$$

u. s. f.

§. 8. Diese Form folgt aus der vorher gefundenen Form für π. Denn man setze in der Reihe

$$\frac{1}{2m+1} + \frac{\alpha}{2m+3} + \frac{\beta}{2m+5} + \frac{\gamma}{2m+7} + \text{etc.}$$

für α, β, γ, δ, etc ihre Werthe, durch die vorhergehenden ausgedruckt, und $\frac{1}{2}$ für α, so ist diese Reihe

$$= \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2m+5}\cdot\frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2m+7}\cdot\frac{5}{6}\beta$$

$$+ \frac{1}{2m+9}\cdot\frac{7}{8}\gamma + \frac{1}{2m+11}\cdot\frac{9}{10}\delta + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+3} + \frac{\alpha}{2m+5} + \frac{\beta}{2m+7} + \frac{\gamma}{2m+9}$$

$$- \frac{1}{2(2m+3)} - \frac{\alpha}{4(2m+5)} - \frac{\beta}{6(2m+7)} - \frac{\gamma}{8(2m+9)}$$

$$\pm \text{etc.}$$

Folglich $\left(\frac{1\ldots(2m-1)}{2\ldots\ldots 2m} - \frac{1\ldots(2m+1)}{2\ldots(2m+2)}\right)\cdot\frac{1}{2}\pi =$

$$\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2(2m+3)} - \frac{\alpha}{4(2m+5)} - \frac{\beta}{6(2m+7)} - \text{etc.}$$

das

das ist $\frac{1\ldots(2m-1)}{2\ldots 2m}\cdot\frac{1}{2m+2}\cdot\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2(2m+3)}$

$$- \frac{\alpha}{4(2m+5)} - \frac{\beta}{6(2m+7)} - \frac{\gamma}{8(2m+9)} - \text{etc.}$$

§. 9. **Aufgabe.** Den Werth von $\int\frac{x^{2m}dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ für $x=a$ zu finden.

Auflösung.

Es ist $\frac{x^{2m}}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = (1+\alpha.\frac{x^2}{a^2}+\beta.\frac{x^4}{a^4}+\gamma.\frac{x^6}{a^6}$

$$+\delta.\frac{x^8}{a^8}+\text{etc.})\frac{x^{2m}}{a}.$$

Also $\int\frac{x^{2m}dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \Big(\frac{1}{2m+1}+\frac{\alpha}{2m+3}.\frac{x^2}{a^2}$

$$+\frac{\beta}{2m+5}.\frac{x^4}{a^4}+\frac{\gamma}{2m+7}.\frac{x^6}{a^6}+\frac{\delta}{2m+9}.\frac{x^8}{a^8}$$

$$+\frac{\varepsilon}{2m+11}.\frac{x^{10}}{a^{10}}+\text{etc.})\frac{x^{2m+1}}{a}.$$

Für $x=a$ ist

$$\int\frac{x^{2m}dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{1\ldots(2m-1)}{2\ldots\ldots 2m}.\frac{1}{2}\pi.a^{2m}.$$

§. 10. **Aufg.** Den Werth von $\int x^{2m}\sqrt{(a^2-x^2)}dx$ zu finden, wenn $x=a$ ist.

Auflösung.

Es ist $x^{2m}\sqrt{(a^2-x^2)} = (1-\frac{1}{2}.\frac{x^2}{a^2}-\frac{\alpha}{4}.\frac{x^4}{a^4}-\frac{\beta}{6}.\frac{x^6}{a^6}$

$$-\frac{\gamma}{8}.\frac{x^8}{a^8}-\frac{\delta}{10}.\frac{x^{10}}{a^{10}}-\text{etc.})x^{2m}a.$$

Also

Also $\int x^{2m}\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx = \left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2(2m+3)}\cdot\frac{x^2}{a^2}\right.$

$$- \frac{\alpha}{4(2m+5)}\cdot\frac{x^4}{a^4} - \frac{\beta}{6(2m+7)}\cdot\frac{x^6}{a^6}$$

$$\left. - \frac{\gamma}{8(2m+9)}\cdot\frac{x^8}{a^8} - \text{etc.}\right) x^{2m+1}a.$$

Für $x = a$ ist $\int x^{2m}\sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx$

$$= \frac{1\ldots(2m-1)}{2\ldots\ldots 2m}\cdot\frac{1}{2m+2}\cdot\tfrac{1}{2}\pi .\, a^{2m+2}.$$

§. 11. **Exempel.** Bey der Bestimmung der Zeit des Schwunges eines einfachen Pendels kommt man auf folgende Differentialformel:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a^2-x^2)}} = dX.$$

Der Factor $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ werde in eine Reihe verwandelt, so ist

$$\frac{1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\text{etc.}}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\,dx = dX.$$

Für $x = a$ sey das Integral $= A$, so ist
$A = (1+\alpha^2 a^2+\beta^2 a^4+\gamma^2 a^6+\delta^2 a^8+\text{etc.})\,\tfrac{1}{2}\pi.$

Es ist hier a der Sinus des vierten Theils des Schwingungsbogens. Die Zeit eines Schwunges (eines Hin- und Herganges) sey $= t$; die Länge des Pendels $= r$, die Höhe des freyen Falls in einer Secunde $= g$, so ist $t = 2A\sqrt{\frac{r}{2g}}$.

§. 12. **Exempel.** Es sey die halbe große Axe einer Ellipse = 1; die Excentricität = e, die Abscisse von dem Mittelpuncte aus genommen = x; der dazu gehörige Bogen von dem Scheitel der kleinen Axe an gerechnet = s, so ist $\frac{\sqrt{(1 - e^2 x^2)}}{\sqrt{(1 - x^2)}} dx = ds$.

Der Zähler dieses Bruchs entwickelt ist

$$\sqrt{(1 - e^2 x^2)} = 1 - \tfrac{1}{2} e^2 x^2 - \tfrac{1}{4} \alpha e^4 x^4 - \tfrac{1}{6} \beta e^6 x^6 - \tfrac{1}{8} \gamma e^8 x^8 - \tfrac{1}{10} \delta e^{10} x^{10} - \text{etc.}$$

Setzt man in dem Integral x = 1, so ist s der elliptische Quadrant; also ist

$$\text{Quadr. ellipt.} = (1 - \tfrac{1}{2} \alpha e^2 - \tfrac{1}{4} \alpha \beta e^4 - \tfrac{1}{6} \beta \gamma e^6 - \tfrac{1}{8} \gamma \delta e^8 - \tfrac{1}{10} \delta \varepsilon e^{10} - \text{etc.}). \tfrac{1}{2} \pi.$$

oder

$$\text{Quadr. ellipt.} = (1 - \tfrac{1}{4} e^2 - \frac{1.3}{4.16} e^4 - \frac{1.9.5}{4.16.36} e^6 - \frac{1.9.25.7}{4.16.36.64} e^8 - \frac{1.9.25.49.9}{4.16.36.64.100} e^{10} - \text{etc.}) \tfrac{1}{2} \pi.$$

IX.

Zusätze zu der allgemeinen Summation einer Reihe, worinn höhere Differenziale vorkommen; von J. F. Pfaff, Prof. der Mathematik zu Helmstädt.

(Fortsetzung des Aufsatzes im dritten Hefte d. A. S. 337—347) *).

§. 1. Satz.

Es ist, was auch q, v und V bedeuten mögen,

$$\frac{1}{f} v q^{f} . d^{n} (V q^{-f}) + \frac{1}{f+c} n d (v q^{f+c}) . d^{n-1} (V q^{-f-c})$$
$$+ \frac{1}{f+2c} . \frac{n(n-1)}{1.2} d^{2} (v q^{f+2c}) d^{n-2} (V q^{-f-2c})$$
$$+ \text{etc} + \frac{1}{f+nc} d^{n} (v q^{f+nc}) . V q^{-f-nc} = \frac{1}{f} v d^{n} V$$
$$+ \frac{1}{f+c} n d v d^{n-1} V + \frac{1}{f+2c} . \frac{n(n-1)}{1.2} d^{2} v . d^{n-2} V$$
$$+ \text{etc} + \frac{1}{f+nc} . d^{n} v . V$$ **).

*) Das sind die in meiner Note zu Seite 337 bemerkten, späterhin eingesendeten, Zusätze, die ich bereits am 10. März 1795 erhielt, selbige aber aus Mangel an Raum, und mit dem Hauptsatze zugleich, nicht mittheilen konnte. Hindenburg.

**) Das ist der Satz, von welchem ich in meiner Anmerkung zu H. III. S. 346 gesagt habe, Herr Prof. Rothe habe ihn, in Gestalt einer Lokalformel, gefunden, ohne von Herrn Professor Pfaffs gleichgeltendem Differenzialsatze etwas zu wissen. Der Satz ist wichtig; auch möchten sonst die sehr allgemeinen Sätze (8 und 12) schwer zu erweisen seyn. H.

Beweis. Nach (3. Zus. 2. *a*. H. III. S. 344) ist; das dortige $y = Vq^{-f}$ gesetzt,

$$\frac{1}{f} q^f d^n (Vq^{-f}) + \frac{1}{f+c} n\, d(q^{f+c})\, d^{n-1}(Vq^{-f-c})$$

$$+ \frac{1}{f+2c} \cdot \frac{n(n-1)}{1.2} d^2(q^{f+2c}) d^{n-1}(Vq^{-f-2c}) + \text{etc.}$$

$= \frac{1}{f} d^n V$. Nun entwickle man in dem Ausdrucke des Satzes linker Hand des Gleichheits-Zeichens, $d(vq^{f+d})$, $d^2(vq^{f+2d})$, $d^3(vq^{f+3d})$ etc., gewöhnlichermaßen als Differentiale von Producten aus v in Potenzen von q (wobey $d^\lambda(vq^{f+\mu c}) = v d^\lambda (q^{f+\mu c}) + \lambda dv d^{\lambda-1}(q^{f+\mu c})$ $+ \lambda \frac{(\lambda-1)}{1.2} d^2 v . d^{\lambda-2}(q^{f+\mu c})$ u. s. w.), so zerfällt der Ausdruck in mehrere Theile, welche nach den Differentialen von v geordnet, sich sämtlich durch die nur angegebene Formel für $\frac{1}{f} d^n V$ summiren lassen, für n und f; gesetzt n, $n-1$, $n-2$; f, $f+d$, $f+2d$ u. s. w. Der erste Theil mit dem Factor v ist $= \frac{1}{f} v d^n V$, der andre mit dem Factor dv ist $= \frac{1.n}{f+c} dv\, d^{n-1} V$, u. s. w. So ergiebt sich der Ausdruck des Satzes linker Hand des Gleichheits-Zeichens.

§. 2. Zusatz. Der Ausdruck linker Hand des Gleichheits-Zeichens enthält, außer den Größen v und V, auch noch Potenzen von q. Der Satz zeigt, daß demohngeachtet sein Werth nicht von q abhänge, sondern immer dem Werth für $q = 1$ gleich sey.

§. 3. Satz. Wenn q, v, V Reihen bedeuten, welche nach Potenzen einer veränderlichen Größe mit einem Exponenten-Unterschiede fortgehn, so ist

$$\frac{1}{f}(vq^{f}) \varkappa 1 . (Vq^{-f}) \varkappa (n+1) + \frac{1}{f+c}(vq^{f+c}) \varkappa 2 . (Vq^{-f-c}) \varkappa n$$

$$+ \frac{1}{f+2c}(vq^{f+2c}) \varkappa 3 . (Vq^{-f-2c}) \varkappa (n-1) + \ldots$$

$$+ \frac{1}{f+nc}(vq^{f+nc}) \varkappa (n+1) . (Vq^{-f-nc}) \varkappa 1$$

$$= \frac{1}{f} v \varkappa 1 . V \varkappa (n+1) + \frac{1}{f+c} v \varkappa 2 . V \varkappa n$$

$$+ \frac{1}{f+2c} v \varkappa 3 . V \varkappa (n-1) + \ldots + \frac{1}{f+nc} v \varkappa (n+1) V \varkappa 1$$

Beweis. 1) Es sey

$$q = a + a^{I} z + a^{II} z^{2} + a^{III} z^{3} \ldots$$
$$v = A + A^{I} z + A^{II} z^{2} + A^{III} z^{3} \ldots$$
$$V = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^{I} z + \mathfrak{A}^{II} z^{2} + \mathfrak{A}^{III} z^{3} \ldots$$

so ist $\frac{d^{\nu}(q^{\mu} v)}{dz^{\nu}} = 1 . 2 . 3 \ldots \nu . (q^{\mu} v) \varkappa (\nu + 1)$

$$\frac{d^{\nu}(q^{\mu} V)}{dz^{\nu}} = 1 . 2 \ldots \nu . (q^{\mu} V) \varkappa (\nu + 1),$$

bey der Differentiation dz als beständig angenommen, und in den Differential-Verhältnissen $z = 0$ gesetzt. Drückt man nun die höhern Differentiale in dem ersten Satz auf diese Art aus, so verwandelt sich derselbe in den zweyten Satz.

2) Ist nun allgemeiner

$$q = a z^{\alpha} + a^{I} z^{\alpha + \delta} + a^{II} z^{\alpha + 2\delta} \ldots$$
$$v = A z^{\beta} + A^{I} z^{\beta + \delta} + A^{II} z^{\beta + 2\delta} \ldots$$
$$V = \mathfrak{A} z^{\gamma} + \mathfrak{A}^{I} z^{\gamma + \delta} + \mathfrak{A}^{II} z^{\gamma + 2\delta} \ldots$$

so bleiben die Coefficienten von $q^{\mu}v$, $q^{\mu}V$, der Ordnung nach, noch eben dieselben wie in (1). Also gilt der Satz auch für die allgemeinere Reihe *).

§. 4. Zusatz. Man kann den Satz kürzer so ausdrücken:

$$\frac{1}{f}(vq^{f})\varkappa 1.(Vq^{-f})\varkappa(n+1) + \frac{1}{f+c}(vq^{f+c})\varkappa 2.(Vq^{-f-c})\varkappa n$$

$$+ \frac{1}{f+2c}(vq^{f+2c})\varkappa 3.(Vq^{-f-2c})\varkappa(n-1) + \text{etc.}$$

$= (wV) \overset{n}{\varkappa} (n+1)$, wo w eine neue Reihe bedeutet, deren Coefficienten durch die von v so bestimmt werden, daß für jedes n, $w\varkappa(n+1) = \frac{1}{f+nc} v\varkappa(n+1)$. In dem Summen-Ausdruck kommt also q nicht vor.

§. 5. Zusatz. Man setze (in §. 3.) für die dortigen c; f; q; v; V

hier $-c$; g; $\frac{1}{q}$; u; U

so

*) So erscheint der zweyte Satz als ein specieller Fall des ersten. Durch eben diese Reduction von Coefficienten auf höhere Differentiale, sind auch im vorhergehenden Aufsatze (Heft, III. S. 337 ꝛc.) die dortigen Formeln mit Coefficienten aus der Formel für $d^{n}(xy)$ als specielle Fälle hergeleitet. Gebraucht man aber die Localformeln für höhere Differentiale (II. Heft S. 229) so lassen sich umgekehrt, aus den Formeln mit Coefficienten die mit höhern Differentialen herleiten, und beyde Formeln erhalten gleiche Allgemeinheit. Da hievon, so wie überhaupt von den genannten Localformeln, keine Erwähnung von mir in dem vorhergehenden Aufsatze geschehen ist, so sey es mir verstattet, anzumerken, daß derselbe (nach seinem ersten Entwurf nicht zum Druck bestimmt) schon im März 1795 in des Herrn Herausgebers Händen war. Jene Localformeln sind vorzüglich dann nützlich, wenn es auf Reduction der höhern Differentiale auf Coefficienten ankommt: im umgekehrten Fall, wie hier, scheint das andre Verfahren bequemer zu seyn.

Pfaff.

so wird

$$\frac{1}{g}(uq^{-g})\varkappa 1.(Uq^{g})\varkappa(n+1) + \frac{1}{g-c}(uq^{-g+c})\varkappa 2.(Uq^{g-c})\varkappa n$$

$$+ \text{etc.} + \frac{1}{g-nc}(uq^{-g+nc})\varkappa(n+1).(Uq^{g-nc})\varkappa 1$$

$$= \frac{1}{g}u\varkappa 1.U\varkappa(n+1) + \frac{1}{g-c}u\varkappa 2.U\varkappa n$$

$$+ \text{etc} + \frac{1}{g-nc}u\varkappa(n+1).U\varkappa 1 = (WU)\varkappa(n+1)$$

da $W\varkappa(n+1) = \frac{1}{g-nd}u\varkappa(n+1)$.

§. 6. **Zusatz.** Ist in (§. 3.) $v = 1$, oder in §. (5) $U = 1$, so fallen in den Ausdrücken linker Hand des Gleichheits-Zeichens alle Glieder bis auf das erste oder letzte weg, wodurch man die Formeln (im 4. Zus. l. c.) erhält.

§. 7. **Satz.** Es ist $xd^n y = nd(xu^c)\,d^{n-1}(yu^{-c})$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}d^2(xu^{2c})\,d^{n-2}(yu^{-2c}) + \ldots + d^n(xu^{nc})\,yu^{-nc}$$

$$= d^n(xy) + ncd^{n-1}\left(xy\frac{du}{u}\right) + n(n-1)c^2d^{n-2}\left(xy\frac{du^2}{u^2}\right)$$

$$+ \ldots + n(n-1)\ldots 1.c^n.xy\frac{du^n}{u^n}.$$

Beweis. Diese Gleichung folgt unmittelbar aus der in dem Beweise der Formel für $d^n xy$ (num. 4. l c.) beygebrachten, wenn statt des dortigen u gesetzt wird u^c, wodurch aus $\frac{du}{u}$ wird $\frac{c\,du}{u}$..

§. 8. Satz. Es ist

$$q^f \varkappa 1 . q^g \varkappa (n+1) + q^{f+c} \varkappa 2 . q^{g-c} \varkappa n$$
$$+ q^{f+2c} \varkappa 3 . q^{g-2c} \varkappa (n-1) + \text{etc}\ldots$$
$$+ q^{f+nc} \varkappa (n+1) . q^{g-nc} \varkappa 1$$
$$= q^{f+g} \varkappa (n+1) + c . (q^{f+g-1} Q) \varkappa n$$
$$+ c^2 (q^{f+g-2} Q^2) \varkappa (n-1) + \text{etc}\ldots,$$
$$+ c^n (q^{f+g-n} Q^n) \varkappa 1$$

wenn $Q \varkappa n = n q \varkappa (n+1)$, für jedes n.

Beweis. Man setze in (§. 7) $x = q^f$; $y = q^g$; $u = q$, und drücke, wie in §. 3. die Differentiale durch Coefficienten aus, so folgt gegenwärtiger Satz aus dem vorhergehenden, weil, wenn $u = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 \ldots$,

$$\frac{du}{dz} = \beta + 2\gamma z + 3\delta z^2 \ldots,$$

also $\frac{du}{dz} \varkappa (n+1) = n . u \varkappa (n+1)$.

§. 9. Zusatz. Der Werth des Ausdrucks linker Hand des Gleichheits-Zeichens hängt also nicht von f und g einzeln, sondern von ihrer Summe $f+g$ ab. Man setze $f+g = s$, so ist

$$q^f \varkappa 1 . q^{s-f} \varkappa (n+1) + q^{f+c} \varkappa 2 . q^{s-f-c} \varkappa n \ldots$$
$$+ q^{f+nc} \varkappa (n+1) . q^{s-f-nc} \varkappa 1$$
$$= q^c \varkappa 1 . q^{s-c} \varkappa (n+1) + q^{2c} \varkappa 2 . q^{s-2c} \varkappa n$$
$$+ \ldots + q^{(n+1)c} \varkappa (n+1) . q^{s-(n+1)c} \varkappa 1;$$

und für $c = 1$,

$$q^f \varkappa 1 . q^{s-f} \varkappa (n+1) + q^{f+1} \varkappa 2 . q^{s-f-1} \varkappa n$$
$$+ q^{f+2} \varkappa 3 . q^{s-f-2} \varkappa (n-1) \ldots + q^{f+n} \varkappa (n+1) . q^{s-f-n} \varkappa 1$$
$$= q \varkappa 1 . q^{s-1} \varkappa (n+1) + q^2 \varkappa 2 . q^{s-2} \varkappa n + \ldots$$
$$\ldots + q^{n+1} \varkappa (n+1) . q^{s-n-1} \varkappa 1.$$

Diese Ausdrücke haben also für jedes f einen Werth.

§. 10. Zusatz. Wenn man den Satz (§. 8) auf Binomial Coefficienten ${}^n\mathfrak{A}$, ${}^n\mathfrak{B}$, ${}^n\mathfrak{C}$... anwendet, so entspringt daraus folgende Gleichung:

g(g-1)

$$g(g-1)\ldots(g-n+1)+{}^{n}\mathfrak{A}\,(f+c).(g-c)(g-c-1)\ldots(g-c-n+2)$$
$$+{}^{n}\mathfrak{B}\,(f+2c)\,(f+2c-1).(g-2c)\,(g-2c-1)\ldots(g-2c-n+3)$$
$$+{}^{n}\mathfrak{C}\,(f+3c)\,(f+3c-1)\,(f+3c-2).(g-3c)\,(g-3c-1)\ldots$$
$$\ldots(g-3c-n+4)+\text{etc. etc.}$$
$$=(g+f)\,(g+f-1)\ldots(g+f-n+1)$$
$$\times\left(1+\frac{nc}{g+f}+\frac{n(n-1)c^2}{(g+f)\,(g+f-1)}+\frac{n(n-1)\,(n-2)c^2}{(g+f)\ldots(g+f-2)}+\text{etc}\right)$$

beyde Ausdrücke werden fortgesetzt, bis die Glieder wegen n verschwinden.

§. 11. Zusatz. Man setze $f+g=-c$, so ist also die Summe folgender Reihe

$$1.g(g-1)\ldots(g-n+1)-{}^{n}\mathfrak{A}\,g.(g-c)(g-c-1)\ldots(g-c-n+2)$$
$$+{}^{n}\mathfrak{B}\,(g-c)\,(g-c+1).(g-2c)\,(g-2c-1)\ldots(g-2e-n+3)$$
$$-{}^{n}\mathfrak{C}\,(g-2c)\,(g-2c+1)\,(g-2c+2).(g-3c)\,(g-3c-1)\ldots$$
$$\ldots(g-3c-n+4)+\text{etc. etc.}$$

von g unabhängig, d. i. wenn man die Glieder dieses Ausdrucks, so viel deren seyn mögen, nach Potenzen von g entwickelt, so wird jeder solcher Potenz Coefficient für sich verschwinden, und nur das Glied ohne g übrig bleiben.

§. 12. Zusatz. Aus dem Satz (§. 7.) entspringt noch folgende Gleichung, allgemeiner als die (§. 8.):

$$x\varkappa 1.y\varkappa(n+1)+(xu^{c})\varkappa 2.(yu^{-c})\varkappa n$$
$$+(xu^{2c})\varkappa 3.(yu^{-2c})\varkappa(n-1)$$
$$+\text{etc.}\ldots+(xu^{nc})\varkappa(n+1).(yu^{-nc})\varkappa 1$$
$$=(xy)\varkappa(n+1)+c.\left(xy.\frac{U}{u}\right)\varkappa n$$
$$+c^2\left(xy.\frac{U^2}{u^2}\right)\varkappa(n-1)+\text{etc.}\ldots$$
$$+c^n\left(xy.\frac{U^n}{u^n}\right)\varkappa 1$$

wenn für jedes n, $U\varkappa n=n.u\varkappa(n+1)$.

X.

Geometrische Analysis des Krystalls, Hyodon genannt; eine Widerlegung des Systems von Hauy. Aus einem Schreiben Hrn. D. Kramp's an den Herausgeber.

Vorerinnerung des Herausgebers.

In der von mir ohnlängst herausgegebenen Sammlung von Schriften über den polynomischen Lehrsatz rc. ist dieser Abhandlung, in einer Anmerkung zu Seite 91 bereits erwähnt worden. Ich habe sie schon seit einiger Zeit erhalten, und ist solche wieder neuerlich von Herrn D. Kramp in Erinnerung gebracht worden. Der Anfang des Briefes oder des Aufsatzes selbst, bezieht sich auf ein Versprechen, das Herr D. Kramp in einem Anhange zu seiner Krystallographie gegeben hatte. Eben daselbst, am Ende dieses schätzbaren Werkes, findet man auch seine Erklärung der Verdoppelung des sogenannten isländischen Krystalls, von welcher ich, da in der Folge ausdrücklich davon Erwähnung geschieht, nur im Vorbeygehen, hier noch anmerken will, daß es mir scheint, man habe auf diese Erklärung einer Erscheinung, bey welcher selbst Hüygens und Newton Schwierigkeiten gefunden haben, nicht so viel Rücksicht genommen, als die Sache verdient. Alles läßt sich in der That sehr leicht und natürlich erklären, wenn man mit Herrn D. Kramp annimmt, die ursprüngliche Form des Kalchspaths sey der sogenannte *Spath Lenticulaire*, aus diesem entstehe, durch Ansetzung neuer Schichten, der isländische Krystall, von der ursprünglichen Fläche aber bleibe so viel zurück, daß sie eine Verdoppelung des Gegenstandes durch Reflexion veranlassen kann.

Einige

Einige Nachrichten, Herrn D. Kramp betreffend, habe ich in der oben angezeigten Sammlung von Abhandlungen (S. 91 - 101) gegeben. Noch muß ich hier erinnern, daß die dortige, seinem Namen beygefügte, Nachweisung itzt nicht weiter bestehe. Herr D. Kramp hat das Physikat des Oberamts und der Stadt Meissenheim aufgegeben. Die Ereignisse des Krieges haben ihn nehmlich, seit beynahe zwey Jahren genöthigt, Meissenheim zu verlassen. Nach den neuesten Nachrichten hat er ohnlängst den Ruf als Physikus der Reichsstadt Speier erhalten und angenommen, fest entschlossen, welches auch der Wechsel des Krieges seyn möge, daselbst zu verbleiben. Verschiedene combinatorisch-analytische Abhandlungen von ihm, außer den, in oben erwähnter Sammlung bereits aufgeführten, werden in den folgenden Heften des Archivs nach und nach mitgetheilt werden. H.

— Sie erinnern mich, Hochgeehrtester Herr Professor, mein Versprechen in Ansehung der polygonometrischen Beyträge bald zu erfüllen. Allein, mit welcher Gelegenheit, und bey welchem Verleger könnte dies wohl geschehen? Indessen erlauben Sie, daß ich diesem Schreiben einen kurzen Auszug aus einem dieser Beyträge einverleibe, freylich ohne Beweise, die Sie leicht selbst finden werden. Er betrifft diejenige Abänderung von Kalchspath, die bey Linne Hyodon heißt.

Der Hyodon ist ein Dodekaëder von zwölf unter sich gleichen, aber ungleichseitigen Dreyecken eingeschlossen, deren jedes eine lange Seite AD, eine kurze Seite AC und eine Basis CD hat. Diese zwölf Basen machen zusammen den Aequator BCDEF des Hyodon aus, ein gleichseitiges, gleichwinklichtes Sechseck,

eck, dessen sechs Seiten aber nicht in einer Ebene liegen. Ich werde diese sechs Seiten die Aequatorkannten nennen, um sie von den Polarkannten zu unterscheiden, die in den beyden Polen A und G zusammenstoßen. Diese letztern werde ich abwechselnd die höhern und die niedern Kannten nennen, je nachdem sie mehr oder weniger von der Axe des Hyodon abweichen. Es ist klar, daß die kürzern Seiten, wie A C, A E u. s. w. mit dieser Axe einen größern Winkel machen müssen, als die längern Seiten AB, AD, AF u. s. w. Ich werde die Neigung der höhern Kannten gegen die Axe mit x, die Neigung der niedern Kannten gegen eben dieselbe mit y bezeichnen; und zugleich annehmen Cot x $= p$; Cot y $= q$. Man erhält hieraus Cot ACG $= \frac{1-pq}{p+q}$. So wäre denn der Winkel bekannt, den die höhern Kannten der einen Pyramide mit den niedern Kannten der andern machen, da, wo sie am Aequator zusammenstoßen.

Bezeichnet man ferner mit I den Polarwinkel jedes Dreyecks, CAD; mit L den größern Winkel an der Basis ACD; mit M den kleinern Winkel an der Basis ADC; mit 2 Z, den Winkel der Aequatorkannten CDE, so ist

$$\text{Cot I} = \frac{1+2pq}{\sqrt{(3+4pp-4pq+4qq)}};$$

$$\text{Cot L} = \frac{2pp-2pq+1}{\sqrt{(3+4pp-4pq+4qq)}};$$

$$\text{Cot M} = \frac{2qq-2pq+1}{\sqrt{(3+4pp-4pq+4qq)}};$$

$$\text{Cot Z} = \sqrt{\frac{1+4(p-q)^2}{3}}.$$

Wir

Wir gehen jetzt an die Flächenwinkel des Hyo-
don über. Es ist offenbar, daß der Flächenwinkel an
en höhern Kannten (ACD mit ACB) kleiner seyn
nuß, als der Flächenwinkel an den niedern Kanten
ACD mit AFD). Bezeichnet man den erstern mit
X, den letztern mit 2 Y, so ist $\text{Cot}\,X = \frac{2q-p}{\sqrt{(3+3pp)}}$;
nd $\text{Cot}\,Y = \frac{2p-q}{\sqrt{(3+3qq)}}$. Eben so werden auch
iese Flächen gegen den Aequator verschiedentlich geneigt
eyn: indem der Winkel, den sie mit ihm bilden, an den
öhern Kannten größer, an den niedern Kannten
leiner seyn muß. Bezeichnen wir den erstern mit u
die Flächen ACD und ACB mit BCD) den letztern
nit v (die Flächen GCD und GCB mit BCD), so ist

$$\text{Cot}\ u = \frac{(2pp-2pq+1)\sqrt{3}}{2(2q-p)\sqrt{(1+pp-2pq+qq)}};$$

$$\text{Cot}\ v = \frac{(2qq-2pq+1)\sqrt{3}}{2(2p-q)\sqrt{(1+pp-2pq+qq)}}.$$

Eben so ist es mit den Winkeln, die die Kannten
elbst mit den anstoßenden Flächen des Aequators machen;
ür die höhern Kannten wird derselbe größer, für
ie niedern Kannten wird er kleiner seyn. Bezeich-
et man den erstern mit S (die Kannte AC mit der
Fläche BCD) den zweyten mit T (die Kannte CG
nit der Fläche BCD), so ist

$$\text{Cot}\,P = \frac{2pp-2pq+1}{2q-p};\quad \text{Cot}\,Q = \frac{2qq-2pq+1}{2p-q}.$$

Sieht man die Winkel L und M als gegeben an
(weil in der That diese am leichtesten zu messen sind), so
findet man daraus fürs erste, den Winkel der Aequator-
kannten Z auf folgende Weise: Man nehme Cot M —
Cot

$\text{Cot } L = P$, $1 - \text{Cot }^2L - \text{Cot } L. \text{Cot } M - \text{Cot }^2M = Q$, und $\sqrt{(PP+QQ)} = R$; so ist $\text{Cot } Z = \sqrt{\frac{1-2Q+2R}{3}}$. Verlangt man die Axe des Kristalls, so ist dieselbe $\sqrt{\frac{3R+3Q}{2-Q-R}}$, wobey nemlich die Aequatorkannte für die Einheit angenommen ist. Endlich, um die Cotangenten p und q der beyden Winkel x und y zu finden, so setze man $\frac{R-Q}{2} = GG$; $\frac{3(R+Q)(2-Q+R)}{2(2-Q-R)} = FF$; so ist $2p = F-G$; und $2q = F+G$. Sind einmal diese letztern Winkel gefunden, so läßt sich aus ihnen alles andere bestimmen.

Ich habe dieses für nothwendig erachtet, um über das System des Herrn Hauy einige Anmerkungen zu machen. Unbegreiflich ist es mir, wie dieser Gelehrte Berechnungen über Körper machen konnte, ohne sich der sphärischen Trigonometrie zu bedienen, die ihm alles ungemein erleichtert hätte. — Ich werde hier das gemeine Parallelepipedon des isländischen Krystalls zum Grunde legen, das wie bekannt, die wahre Mutter der Kalchspathformen ist. Den stumpfen Winkel desselben, $102^\circ 40'$ werde ich mit $2B$ bezeichnen; und zugleich annehmen $\sqrt{(3 \text{ Cot } 2B - 1)} = \text{Cot } F$. F wird der Winkel seyn, den die Axe des Krystalls mit einer Seitenfläche macht.

Das Parallelepipedon des Kalchspaths kann auf eine dreyfache Art zum Dodecaëder übergehen: je nachdem nemlich die neue Krystallenmaterie sich zu beyden Seiten der Polarkannten HI, IK; oder zu beyden Seiten der Aequatorialkannten HL, LK; oder endlich auf die

die zu beyden Seiten der Diagonale IL gelegenen Winkel H und K ansetzt. Es seye nemlich HIKL eine Seitenfläche des Krystalls, I einer der drey Winkel am Pole, und IL die Polardiagonale. Und n, die Zahl, die bey Hauy *nombre des rangées soustraites* heißt.

Im erstern Fall, den man gewöhnlich an den Abschnitten der Ecke des Aequators erkennt, werden die Polarkannten des Parallelepipedons, zugleich Polarkannten des Dodecaëders. Uebersetzt man hier die sehr verworrene Sprache des Hauy in die wahre Sprache der Analyse, so ist $p = \frac{1}{2}$ Cot F; und ferner

$$q = \frac{2n-1}{2n+2} \text{ Cot F.}$$

Im zweyten Fall der sich gewöhnlich durch dreyfache Abschnitte an beyden Polen auszeichnet, wird der ganze Aequator des Parallelepipedons, Aequator des Dodecaëders. Alsdann ist $p = \frac{n+2}{2n-2}$ Cot F;

$$q = \frac{2n+1}{2n-2} \text{ Cot F.}$$

Im dritten Fall werden die Polardiagonalen des Parallelepipedons, Polarkannten des Dodecaëders; oder vielmehr, sie werden mit ihnen gleichlaufend seyn, und sehr oft der Länge nach abgeschnitten erscheinen. Alsdann ist $p = \frac{n+3}{2n}$ Cot F; $q =$ Cot F. Vermittelst dieser Formeln, wenn der Werth von n als bekannt angesehen wird (n ist nemlich die Zahl die bey Hauy *nombre des rangées soustraites* heißt) läßt sich daraus zuerst die Cotangente p und q der beyden Winkel x und y, und aus diesen letztern alles übrige am Dodecaëder bestimmen.

Der

Der große Grundsatz des Hauy ist nunmehr der, daß in allen möglichen Abänderungen von Krystallen n allemal eine ganze Zahl seyn müsse. Und dies ist nicht wahr. Ich habe die Winkel L und M an sehr vielen Dodecaëdern gemessen; hieraus die Winkel x, y und z berechnet, und nie gefunden, daß der Werth von n, der $\frac{2 \operatorname{Cot} y - \operatorname{Cot} x}{2 \operatorname{Cot} x - \operatorname{Cot} y}$ seyn sollte, eine ganze Zahl wurde.

Auf einer prächtigen Krystallengruppe dieser Art aus Dauphine', die man im Kaiserlichen Cabinette sieht, und deren sehr vollkommene Krystallen bis zu 8 Zoll in der Länge haben, fand ich, mit Weglassung der Minuten, $L = 109°$, $M = 18°$. Berechnen Sie hieraus nach der vorhin gegebenen Formel, den Winkel $2Z$, so finden Sie wirklich $2Z = 102°$; Ein sicherer Beweis, daß die Beobachtung richtig war. Sie finden weiter $x = 13°45'$; $y = 12°18'$. Die Zahl n fällt alsdann in die Mitte zwischen 1 und 2; und die ganze Hypothese des Hauy wird durch dieses einzige Beyspiel vollkommen widerlegt.

Wenn Sie das *Mémoire sur la double refraction du Cristal d'Islande; Mém. de l'Ac. Roy. de Paris* 1788, von eben diesem Hauy noch nicht gelesen haben, so bitte ich es jetzt zu thun, und meine physische Erklärung der Verdoppelung des Kalchspaths damit zu vergleichen. Sie werden finden, daß durch die Beobachtnngen des Hauy, die er nicht zu erklären wußte, meine Hypothese vollkommen bestätigt, und zur Gewißheit eines geometrischen Lehrsatzes erhoben wird. Hauy verspricht am Ende, daß er sich mit der Brechung der Strahlen, die nicht in der Normalfläche liegen, ein andermal beschäftigen wird. Dieser Mühe kann er sich überheben, indem in meiner Krystallographie die ganze Sache ausführlich aus einander gesetzt ist.

XI.

Ueber Gitter und Gitterschrift; fernere Aeusserung des Ungenannten. Uebersetzung der von ihm (Arch. H. III. S. 348.) mitgetheilten geheimen Gitterschrift; u. s. w.

Die erste Frage (Arch. S. 347, 1) ist, ausserdem was der Herausgeber des Archivs, Herr Prof. Hindenburg darüber beygebracht hat, unbeantwortet geblieben. Es müssen aber gleichwohl über die Art, durch Gitter geheim zu schreiben, gedruckte Nachrichten vorhanden seyn; und es ist zu wünschen, daß solche gelegentlich näher angezeigt oder bekannt gemacht würden.

Die zweyte Frage und deren künftige Beantwortung beschränkt sich ganz allein auf das Mathematische, das dabey zum Grunde liegt, indem die Gitter, als figürliche Anordnungen, den dabey vorausgesetzten, oft sehr mannigfaltigen, Bedingungen Genüge leisten sollen.

Der erste Erfinder solcher Gitter mag wohl mehr auf Geheimschreiberey, als auf die combinatorischen Gesetze, auf welche sie sich beziehen, geachtet haben. Die Lambertische Forderung: „Wenn eine nach Regeln gemachte Sache gegeben ist, die Regeln zu finden, „nach denen sie gemacht worden, oder hätte können gemacht werden,“ nöthigte den Untersucher bey diesen stehen zu bleiben, ohne nebenher auf die heutiges Tages so gewöhnliche, leichte und vorwitzig fragende Ausrufung: zu was? zu denken.

Die Gitter sind ein Beytrag zu einem Theile der Lagerechnung, gründen sich im Allgemeinen auf combina-

binatorische Operationen, und lassen sich, wie künftig gezeigt werden wird, auf mehrere und nützlichere Gegenstände, als auf das bloße Geheimschreiben, anwenden.

Was die dritte Frage (Arch. a. a. O.) oder die dort von mir gethane Aeusserung anbetrift, so will ich, bevor ich weiter etwas hinzusetze, den Inhalt des zum Dechriffriren von mir vorgelegten Aufsatzes, zuvor hier mittheilen:

Uebersetzung der Gitterschrift (a. a. O. S. 348) *).

„Viele Leser sind in der Lage eines Dechifreurs, die „zwar alles zusammen buchstabiren, aber sehr wenig „oder gar keinen Verstand daraus finden können. Z. B. „der Romanenleser findet in einem ernsthaften nützlichen „Buche weder Geschmack noch Zusammenhang: der Ma„thematiker versteht von theologischen Schriften weit „weniger, als der Theolog von mathematischen **).

„Es giebt Gegenstände, welche ganz nicht geheim „geschrieben, und doch für viele kaum zu enträthseln „sind, wie die algebraischen Formeln.

„Der Lehrer sollte mit dem jungen Dechifreur zu„erst das Räthselrathen treiben, doch nur mit wenigen „und gut gewählten Räthseln: dann wäre das Rechnen „mit Ziffern und Buchstaben vorzunehmen; ferner: „Sprachen, Geschichte und Mathematik. Also gehört „zum Dechifriren mehr, als mancher glaubt.“

Daß

*) Zuvor müssen folgende Druckfehler darinn verbessert werden: 04,10,s; 05,24,l; 14,26,c; 15,04,e; 17,20,j; 18,19,c; 25,25,d; die erste Zahl deutet die Zeile, die zweyte den Buchstaben darinn, der beygefügte Buchstabe die Correction desselben an.

**) Glücklicherweise spricht die Erfahrung für den umgekehrten Satz, und dabey kömmt der Theolog ungleich besser weg, als wenn der Satz wahr seyn sollte, wie er im Texte steht.

Anmerk. d. Herausg.

Daß das Lesen einer Gitterschrift, ohne das zugehörige Gitter (den Schlüssel) dazu zu haben, oder das Dechiffriren einer solchen Schrift, nicht blos schwierig, sondern (vornehmlich wenn der Fächer viele sind, und die durchgeschlagenen Oeffnungen keine in die Augen fallende Regelmäßigkeit befolgen) so gut als unmöglich sey, wird jeder Kenner zugeben, der die ungeheure Anzahl der möglichen Combinationen oder Variationen dieser Oeffnungen unter einander in einem gegebenen, nach Fächern abgetheilte Quadrate, berechnen kann. Diese Behauptung wird aber auch jedem Liebhaber, der eine so übergroße Anzahl von Verbindungen nicht einmal vermuthet, noch sonst weis, wie er sie auffinden soll, schon hinlänglich einleuchten; wenn er sich die Mühe giebt, nach vorstehender Uebersetzung das Gitter zu der Schrift zu suchen. Nur sehr geübte und sehr geduldige Leser werden es errathen können.

So wie die Einrichtung solcher Gitter, nach vorgeschriebenen Bedingungen, für combinatorische Analytiker und Wahrscheinlichkeitsrechner eine angenehme Unterhaltung gewährt; eben so kann auch diese Uebersetzung für Liebhaber der Kryptographie, zum Chiffriren und Dechiffriren dienen, wenn sie die Zeit bemerken wollen, in welcher jenes und dieses mit wirklichen Chiffren geschrieben und gelesen werden kann. Eine solche Vergleichung wird keinen Augenblick mehr zweifeln lassen, daß die Gitterschrift weit kürzer und geschwinder zu schreiben und zu lesen sey, als jede andere bisher bekannte Art, geheim zu schreiben.

Für diejenigen Leser, die weder das Flandolsche *Chassis*, noch sonst ein anderes Gitter dieser Art gesehen haben oder zu brauchen wissen, will ich hier eins beyfügen (man sehe die Kupfertafel) durch welches nachstehende Schrift in zerstreuten Buchstaben, mit Leichtigkeit

geschrieben worden, und eben so leicht durch gehörige Deckung und Verwendung des Gitters wieder gelesen werden kann.

```
                  4 1 3 2
r n a s d e i e h e a i s u u l
r d s o i e r u s q x n d t o u
i c l n e t a l l c u p o a l i
g n q v a u e i r y t s e e t i
a r é o t i p n e o n u d e u t
v e d r e o i d t i u s s u t s
r i n u a n p m i e à s e r q u
c n a i u o i t t t e u i t l r
e e p v r l e a n i s r e s e i
t r c r r i d s t e t e u s t o
c e n u o s n t f l é e s a v d
i o x i é v o n s e y e n s t z
s t o p s. l o v. à p. v i E u s n
e n t s t r a a u i n n p s i d
e e u n r m s a e g n e l i e ö
b b s s l on p l e c he u f ô a r
```

Vorstehende Schrift vermittelst des Gitters zu enträthseln, verfährt man folgendergestalt:

Auf den vier äussersten Banden des Gitters (auf der Kupfertafel) stehen die Zahlen 1, 2, 3, 4; über der hier vorgelegten Schrift, die Zahlen 4, 1, 3, 2. Man legt also das Gitter zuerst so über die Buchstaben, daß die mit 4 bezeichnete Bande zu oberst horizontal zu liegen kommt, und liest so die Buchstaben durch die offenen Fächer zusammen. Darauf verwendet man das Gitter, daß die mit 1, und nachher die mit 3, und endlich die mit 2 markirte Bande oben zu liegen kommt; und so findet man, nach jedesmaligem Zusammenlesen der Buchstaben, nach und nach den ganzen Inhalt der Schrift, die, wie man sogleich übersieht, mit gleicher Leichtigkeit sich schreiben als lesen läßt.

Die

Die über den Buchstaben angegebenen Zahlen 4, 1, 3, 2 zeigen die Ordnung der Seitenanlagen, die bey jedem gegebenen Gitter auf nachstehende 24zigerley Arten abwechseln können:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Ein gewähltes Gitter, das man nicht selbst unmittelbar vorlegen kann oder will, kurz anzugeben, und die durchzuschlagenden Fächer deutlich nachzuweisen, kann auf mehrere Arten geschehen. Ich will hier folgende mittheilen, die einen Leser, der das zu einer Schrift gehörige Gitter nicht hat, sogleich in den Stand setzen kann, sich solches zu entwerfen. Es sey

jedes durchzuschlagende Quadrat = 1
jedes der übrigen gedeckten Quadrate = 0

Beyde Ziffern sollen in der Folge als Grundzeichen des dyadischen Systems beym Gitter gebraucht werden; und damit die Uebersetzung ins dekadische nicht unnöthig mühsam ausfalle, nehme man höchstens 6 Stellen in jenem, oder von 0 bis 63 in diesem, an. Das Netz oder Gitter der Kupfertafel mag hier zum Beyspiele dienen.

Es hat in allem 16^2 oder 256 kleine Quadrate oder Fächer, die, nach der obigen Voraussetzung hier, nach der Länge herunter in drey Streifen, zu 6+6+4 Fächer (kleine Quadrate) in der Breite, abgetheilt werden. In den beyden ersten Streifen geben jede 6, und in dem letzten Streifen jede 4 Fächer neben einander, eine durch die

offenen und gedeckten Stellen (durch 1 und 0) dyadisch ausgedrückte Zahl, die Null (000000 oder 0000) nicht davon ausgeschlossen. Und so erhält man für das Gitter auf der Kupfertafel, nachstehende in dekadischen Zahlen ausgedrückte Nachweisung

6	+ 6	+ 4
35	2	2
20	1	4
8	36	8
20	41	0
35	6	4
0	0	10
5	0	0
2	4	10
41	20	5
2	32	1
8	22	24
4	8	0
40	0	0
18	0	1
32	53	0
4	4	4

Die Zahlen 6 + 6 + 4 = 16 über dem Strich, geben hier die Seite des Quadrats von 16 Fächern, nebst der Breite der einzelnen 3 Streifen, nach der Länge herunter; die Zahlen unter dem Strich, dyadisch übersetzt, weisen durch die Ziffer 1 die durchzuschlagenden, durch die Ziffer 0 die gedeckten Fächer, aufs deutlichste nach. Hat man das Gitter, wie auf der Kupfertafel so vor sich, daß die mit 1 bezeichnete Bande oben liegt, so stellen die offenen Fächer, oben linker Hand den Buchstaben X, und rechter Hand den Buchstaben *Y* vor.

Zusatz

Zusatz des Herausgebers.

Bey der hier angegebenen Nachweisung eines willkührlich gewählten Gitters, wird die Kenntniß des dyadischen Zahlensystems vorausgesetzt. Für Liebhaber, die sich hier nicht zu helfen wissen, wird folgendes nicht überflüssig seyn.

Will man, wie (S. 85) angenommen wird, bey den dyadisch ausgedrückten Zahlen nicht über sechs Stellen hinausgehen, so ist die kürzeste Anweisung zum richtigen Gebrauch der gegebenen Vorschriften, die keiner Misdeutung unterworfen ist, diese, daß man die Zahlen, von 0 bis 63, dyadisch (und durchaus in 6 Stellen) zugleich aber auch dekadisch ausgedrückt, neben einander setzt, wie folget:

000000 = 0;	010000 = 16;	100000 = 32;	110000 = 48
000001 = 1;	010001 = 17;	100001 = 33;	110001 = 49
000010 = 2;	010010 = 18;	100010 = 34;	110010 = 50
000011 = 3;	010011 = 19;	100011 = 35;	110011 = 51
000100 = 4;	010100 = 20;	100100 = 36;	110100 = 52
000101 = 5;	010101 = 21;	100101 = 37;	110101 = 53
000110 = 6;	010110 = 22;	100110 = 38;	110110 = 54
000111 = 7;	010111 = 23;	100111 = 39;	110111 = 55
001000 = 8;	011000 = 24;	101000 = 40;	111000 = 56
001001 = 9;	011001 = 25;	101001 = 41;	111001 = 57
001010 = 10;	011010 = 26;	101010 = 42;	111010 = 58
001011 = 11;	011011 = 27;	101011 = 43;	111011 = 59
001100 = 12;	011100 = 28;	101100 = 44;	111100 = 60
001101 = 13;	011101 = 29;	101101 = 45;	111101 = 61
001110 = 14;	011110 = 30;	101110 = 46;	111110 = 62
001111 = 15;	011111 = 31;	101111 = 47;	111111 = 63

Um daraus (für den dritten Streifen des vorgelegten Gitters) alle vierstelligen Zahlen, von 0 bis 15 zu haben, darf man nur hier in der ersten Colonne die beyden ersten Nullen linker Hand durchaus absondern; und so kann man die zusammengehörigen Fächer in den

drey Streifen des Gitters, als sechs- oder vierstellige dyadische Zahlen angesehen, dekadisch schreiben, und umgekehrt, wenn die letztern gegeben sind, durch ihren dyadischen Ausdruck, das Gitter entwerfen.

Statt der unmittelbaren Vergleichung durch Nebeneinanderstellung von beyderley Zahlen, könnte man auch nachstehende Regeln brauchen, wobey die Anzahl der Stellen für die einzelnen Ziffern nicht auf sechs eingeschränkt ist.

A. Eine dyadisch geschriebene Zahl dekadisch auszudrücken.

1 0 0 0 1 1	0 1 0 1 0 0	0 0 1 0 0 0
1; 2, 4, 8, 17 | 35	1; 2, 5, 10 | 20	1; 2, 4, | 8

Hier entstehen, nachdem man die erste Eins heruntergesetzt hat, die dekadischen Zahlen nach einander, durch Verdoppeln der vorhergehenden und Zusetzen von 0 oder 1, nachdem eine dieser Ziffern in der obern Stelle steht, unter die man die so gefundene dekadische Zahl nach ihrer Ordnung setzt. Die letzte Zahl im Winkel ist der gesuchte dekadisch ausgedrückte Werth, der gegebenen dyadischen Zahl 100011; 010100; 001000

Die Zahlen 010100 und 001000 sind hier sechsstellig geschrieben, wie sie im ersten Streifen des Gitters als zweyte und dritte Anfangszahlen erscheinen, und auch in obiger Vergleichung vorkommen. An sich sind die Nullen zu äußerst linker Hand überflüssig, und ihr verkürzter Ausdruck ist 10100 und 1000.

B. Eine

B. Eine dekadisch geschriebene Zahl dyadisch auszudrücken.

35		20		8	
17	1	10	0	4	0
8	1	5	0	2	0
4	0	2	1	1	0
2	0	1	0	0	1
1	0	0	1		
0	1				

Hier setzt man die Division mit 2, mit Bemerkung der Quotienten und Reste (0 oder 1) so lange fort, bis im Quotienten 0 kommt. Diese (hier in Winkeln eingeschlossenen) Reste von unten heraufgelesen, geben alsdenn die gesuchte dyadische Zahl, statt der dekadischen 35, 20, 8.

Das (S. 86) angegebene Verfahren ist sinnreich, und giebt das Netz durch wenige dekadisch ausgedrückte Zahlen, deren Reduction aber auf dyadische, durch die Menge ihrer Ziffern (der gesamten Fächer des Gitters) etwas aufhalten kann. Ein anderes Verfahren, das sich blos auf die offenen Stellen bezieht, und auf dasselbe Gitter hier angewendet werden soll, kann folgendes seyn:

Aaeflp; Bbdmo; Ccgkn; Dbdyim; Eaefklo; Fnp; Gdf; Heknp; Iacfhkoq; Kegq; Lchklnop; Mdi; Nac; Obeq; Paghkm; Qdko:

Die Fächer der ersten Verticalreihe von oben herunter, sollen hier durch A, B, C, D... die Fächer der ersten Horizontalreihe durch a, b, c, d... bezeichnet seyn: so läßt jedes Fach durch zwey Buchstaben, einen großen und einen kleinen (wie in der Einmaleinstafel) sich darstellen. Hier sind nur die offenen Fächer angegeben, und Aaeflp z. B. steht verkürzt, statt Aa, Ae, Af, Al, Ap; und so bey allen übrigen.

Ist die Zahl der Fächer eines Gitters nicht sehr groß (und zu einer undurchdringlichen Geheimschrift

braucht es nicht einmal so groß zu seyn, als das bisher als Beyspiel aufgeführte) so kann man durch zwey Zeichen, eines für die offenen, das andere für die gedeckten Fächer, (wie oben 1 und 0, dafür ich hier a und b brauchen will) das Gitter selbst unmittelbar und zugleich verkleinert darstellen z. B.

	1	
	a b b b a b b b b	
	b b b a b b b b a	
	a b b b b a a b b	
	b a b a b b b b b	
4	b b b b b a b a b	2
	a b a b b b b b a	
	b a b b a b b b b	
	b b a b b b b a b	
	b a b b b b a b b	
	3	

Das Mittelfach ist hier durch b als gedeckt angegeben, und würde so bey allen Lagen und Wendungen des Gitters diese Stelle der Schrift leer bleiben. Man kann sie daher, dies Fach mag gedeckt oder offen seyn, mit einem der willkührlichen Füll- oder Misweisezeichen (Arch. der Math. H. III. S. 351) besetzen.

Der Ungenannte hat sehr richtig geurtheilt, daß die Einrichtung solcher Gitter combinatorischen Gesetzen unterworfen sey; es hat ihm aber nicht gefallen, ein methodisches Verfahren dafür anzugeben. Herr Magister Töpfer, ein Freund des Ungenannten, dem dieser auch zuerst dergleichen Gitter und Gitterschrift mitgetheilt hatte, übersah sogleich, daß die Entwerfung der möglichen Gitter in einem Quadrate von gegebener Anzahl der Fächer, von der Auflösung einer combinatorischen Variationsaufgabe abhänge: die ich hier mittheilen will, da sich voraussetzen läßt, daß mehrern Lesern

stern daran gelegen seyn wird, eine solche, die dabey festgesetzten Bedingungen erfüllende, allgemeine Auflösung kennen zu lernen.

Hierbey unterscheidet Herr M. Töpfer die Quadrate von gerader und ungerader Anzahl von Fächern d. i. bey denen $2n$ oder $(2n+1)$ Fächer an einer Seite liegen, die folglich $4n^2$ oder $4n^2+4n+1$ Fächer in allem haben.

Aufgabe. Zu einem Quadrate, das in kleinere Quadratfächer abgetheilt ist, alle mögliche Netze (*Chassis*) zu finden.

A. Wenn das gegebene Quadrat $4n^2$ Fächer, oder eine gerade Anzahl Stellen hat.

Auflösung I. Man mache ein ihm gleiches Quadrat abcd, von eben so viel Stellen, und theile selbiges in vier gleiche Quadrate, von denen also jedes n^2 Stellen enthält.

a A d

1	2	3	4	13	9	5	1
5	6	7	8	14	10	6	2
9	10	11	12	15	11	7	3
13	14	15	16	16	12	8	4
4	8	12	16	16	15	14	13
3	7	11	15	12	11	10	9
2	6	10	14	8	7	6	5
1	5	9	13	4	3	2	1

b c

II. Diese

II. Diese vier Quadrate mögen von den Buchstaben, die hier an ihren Winkelpuncten stehen, durch a, b, c, d von einander unterschieden werden.

III. Man bezeichne die Fächer oder Stellen

im Quadrate a mit $\overset{a}{1}, \overset{a}{2}, \overset{a}{3}, \overset{a}{4} \ldots \overset{a}{n^2}$

" " b mit $\overset{b}{1}, \overset{b}{2}, \overset{b}{3}, \overset{b}{4} \ldots \overset{b}{n^2}$

" " c mit $\overset{c}{1}, \overset{c}{2}, \overset{c}{3}, \overset{c}{4} \ldots \overset{c}{n^2}$

" " d mit $\overset{d}{1}, \overset{d}{2}, \overset{d}{3}, \overset{d}{4} \ldots \overset{d}{n^2}$

Durch diese Verbindung der Zahlen mit Buchstaben, wird jedes Fach jedes Quadrates deutlich bezeichnet.

IV. Nun construire man die Complexionen der n^2ten Variationsclasse mit Wiederholungen, aus den Elementen a, b, c, d geschrieben, die zur Ordnung a gehören. Jede dieser Buchstabencomplexionen fängt mit a an und besteht aus n^2 Buchstaben a, b, c, d und ihren Wiederholungen. Die Anzahl dieser Complexionen zusammen, beträgt 4^{n^2-1}.

V. So viel es solcher Variations-Complexionen (IV) giebt, so viel mal (also 4^{n^2-1} mal) schreibe man die Zahlenreihe von 1 bis n^2, oder die Zahlencomplexion 1 2 3 4 5 6 .... n^2.

VI. Jede Zahlencomplexion (V) wird mit einer Buchstabencomplexion (IV) so verbunden, daß die einzelnen Buchstaben dieser über die einzelnen Zahlen jener, nach der Folge ihrer Buchstaben überschrieben werden. Jede solche einzelne Verbindung von Zahlen und Buchstaben

stellt

stellt ein Netz oder Chassis vor, wo jeder Buchstabe das Quadrat, die darunter stehende Zahl aber die durchzuschlagende Stelle dieses Quadrats anzeigt. Die Anzahl der dadurch bestimmten Gitter oder Netze beträgt demnach 4^{n^2-1} (IV. V).

Exempel. Für $n=4$ hat das Quadrat A überhaupt $4.4^2=64$ Fächer, $4^2=16$ offene, und und $3.4^2=48$ gedeckte. Die Menge der gesamten Gitter wäre $4^{n^2-1}=4^{15}=2^{30}=1073741824$. Ein einzelnes Gitter unter diesen, z. B. das, welches sich auf die Variations-Complexion der 16ten Classe,

ā d c b b c̄ a d c̄ a b ā d b c d

bezieht, würde auf folgende Art

ā d c̄ b b c̄ a d c̄ a b ā d b c̄ d
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

vorgestellt; und in seiner Ordnung, von dem ersten an gezählt, das 962823388ste seyn.

B. Wenn das gegebene Quadrat $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1$ oder eine ungerade Anzahl Stellen hat.

Auflösung I. Man mache ein ihm gleiches Quadrat abcd, von eben so viel Stellen, theile selbiges aber in 4 gleiche Rechtecke, jedes zu $n(n+1)=n^2+n$ Stellen, diese Rechtecke benenne man nach den Buchstaben a, b, c, d die hier an ihren Winkelpuncten stehen und schreibe in jedes Rechteck die Zahlen 1, 2, 3, 4... ... (n^2+n); die mittelste Stelle bleibt leer.

beydes, a und d so lange fortgesetzt, bis man so viel Buchstaben geschrieben hat, als in der Zahl der Classe Einheiten enthalten sind.

2. Aus dieser Vorschrift die Variationen anzugeben, übersieht man sogleich, daß die Anzahl aller, entweder $4^{n^2} - 1$ oder $4^{n^2+n} - 1$ seyn müsse, nachdem sie für ein Quadrat wie A oder B zu bestimmen ist. Daraus läßt sich auch die Regel ableiten, für eine gegebene Variations-Complexion anzugeben, die wievielste sie in ihrer Classe sey. Man setzt nehmlich für die Buchstaben a, b, c, d, ihre Ordnungszahlen 1, 2, 3, 4; diese, statt der Buchstaben z. B. in den bestimmten Variations-Complexionen der obigen beyden Exempel gebraucht, lassen nun die gesuchte Zahl durch ein Verfahren finden, das ich hier bey der Zahl des zweyten Exempels in einem Beyspiele zeigen will. Die Substitution der zugehörigen Zahlen für die dortigen Buchstaben, verwandelt jene Buchstabencomplexion in nachstehende Zahlencomplexion:

1 4 3 2 1 2 3 2 1 4 1 2 4 2 3 3 1 4 1 4

und aus dieser findet man (die kleinen Zahlen sind hier Potenzexponenten von 4)

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 4^{0} + 0 \cdot 4^{1} + 3 \cdot 4^{2} + 0 \cdot 4^{3} + 2 \cdot 4^{4} + 2 \cdot 4^{6} + 1 \cdot 4^{6} + 3 \cdot 4^{7} + 1 \cdot 4^{8} + 0 \cdot 4^{9} \\ + 3 \cdot 4^{10} + 0 \cdot 4^{11} + 1 \cdot 4^{12} + 2 \cdot 4^{13} + 1 \cdot 4^{14} + 0 \cdot 4^{16} + 1 \cdot 4^{16} + 2 \cdot 4^{17} + 3 \cdot 4^{18} + 0 \cdot 4^{19} \end{array} \right\}$$

$= 24523583396$, wie oben.

Die Factoren neben den Potenzen von 4 sind hier die einzelnen Zahlen der obigen Zahlencomplexion, jede um 1 vermindert, die letzte Zahl (hier 4) ausgenommen. Giengen die Buchstaben a, b, c, d, in entgegengesetzter Richtung mit der dortigen (S. 94) ums Gitter in B herum, so wären hier blos b und d, oder die Zahlen 2 und 4 verwechselt, und so bestimmte das schon ein anderes Netz, dessen Zahl, nach obiger Regel gesucht, das 112955249170igste Gitter geben würde.

3. Aus

3. Aus den so sehr großen Zahlen übersieht man sogleich die Unmöglichkeit einer wirklichen Darstellung aller Gitter; auch würden viele dieser Gitter die Absicht für Geheimschreiberey gar nicht erfüllen. Die angeführte Vorschrift ist dennoch nicht überflüssig. Sie zeigt das sehr einfache Gesetz der Folge und die Abhängigkeit der Gitter von einander. Dieser so ganz bestimmten Folge wegen, kann man jedem Gitter die ihm zukommende Ordnungszahl anweisen, und, umgekehrt, aus der gegebenen Zahl das Gitter construiren, wenn man die so eben angewiesene Regel nur umgekehrt befolgt: da dividirt, wo man vorher multiplicirte, und die gefundenen Zahlen um 1 vermehrt, wie man sie vorher um 1 verminderte, die letzte allein ausgenommen. Das kann sogar kryptographisch wichtig werden, in sofern man jemanden, der das Verfahren kennt, blos die Zahl des Gitters zusenden darf, durch welches man eine Schrift geschrieben hat, damit das Gitter darnach entworfen werden kann.

4. Daß man bey der Auswahl von Gittern auch noch auf bestimmte Absichten Rücksicht nehmen könne, ist für sich klar. Wenn es aber blos darum zu thun ist (und dies ist der gewöhnliche Fall) überhaupt ein Gitter zu wählen, so, daß die durch dasselbe geschriebene Schrift, für jeden, nicht blos neugierigen, selbst scharfsinnigen Forscher, ein undurchdringliches, ganz unlesbares Geheimniß bleibe, so kann man die obigen Regeln für A und B so modificiren, daß man nicht einmal nöthig hat, um die Vorschrift für eine gesetzmäßige Folge der Variationen unter einander sich zu bekümmern. Die Regel ist dann ganz kurz folgende:

I. Die Anzahl aller Fächer des gegebenen oder willkührlich gewählten Quadrates (wie oben A oder B) dividire man durch 4. Der Quotient sey q; bey B bleibt

für das Mittelfach 1 übrig, worauf hier nicht geachtet wird.

II. Die Zahlen 1 2 3 4 5 ....q nach der Ordnung schreibe man in eine Reihe neben einander.

III. Darüber setze man die Buchstaben a, b, c, d, nach einer willkührlichen Folge und Abwechselung, so, daß über jeder Zahl ein Buchstabe zu stehen kommt.

IV. Eine solche Verbindung von Zahlen und Buchstaben bestimmt ein Chassis. Die Buchstaben zeigen die bestimmten Quadranten des Quadrats an, die Zahlen weisen die darinn auszuschlagenden Stellen nach.

Exempel, für q = 16, wie oben in A, am Schlusse.

a	c	b	a	d	c	b	a	a	b	b	c	d	b	a	c
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Diese so ganz nach Willkühr hingeschriebenen Buchstaben über den Zahlen von 1 bis 16, bestimmen zusammen ein anderes Gitter, als das obige in A vorgegebene. Auch hier ist der Anfang von dem Fache 1 in a gemacht worden; welches aber nicht nothwendig ist. Man hätte auch b, c oder d über 1 setzen können.

5) Eine stillschweigend bis hieher angenommene Bedingung ist, daß bey der viermaligen Verwendung des Gitters nach und nach alle Fächer der Unterlage für die Schrift besetzt werden, und dabey kein Fach mehr als einmal vorkomme. Daraus ersieht man gar bald, daß es noch mehrere Auflösungen, als die oben in A und B angeführten, giebt, die diese Bedingung erfüllen. Die Auflösung des Ungenannten, die er aber hier nicht mit angegeben hat, ist auch von jener ganz verschieden. Das Allgemeine, das bey Aufgaben dieser Art zum Grunde liegt, ist die Theilung des gegebenen ganzen Quadrats in verschiedene (nicht eben nothwendig in vier) gleiche

und

und ähnliche Schnitte (auch von anderer als quadratischer oder rectangulärer Gestalt) die sich, beym Verwenden jedesmal einander decken. Da das auf mehrere Arten geschehen kann, auch solcherley Schnitte bey Aufgaben anderer Art schon vorkommen, bey denen an steganographische Netze gar nicht gedacht wird: so zeigt sich hier eine Mannichfaltigkeit, die bey Auflösungen combinatorischer Aufgaben gar nicht selten ist.

6) Wollte man statt der Quadrate A und B andere reguläre Figuren substituiren, oder, statt des viermaligen, wie vorher bestimmten, Verwendens, andere Bedingungen einführen, so würde das Ziel dadurch immer weiter gesteckt, und die Anzahl der Auflösungen noch viel mehr vermehrt werden.

Erinnerung wegen des (S. 83, 84) angeführten, am Ende dieses Heftes in Kupfer gestochenen Gitters.

Dieses Netz oder Gitter sollte genau von der Größe gezeichnet werden, wie es zu der (S. 84) befindlichen Gitterschrift paßte. Da aber für diese Schrift die Fächer des Gitters zu klein ausgefallen seyn würden: so ist das Gitter im Kupfer etwas vergrößert dargestellt, so daß man sich leicht ein Viereck mit den Buchstaben wie auf Seite 84, auf einen besondern Blatte von der Größe entwerfen kann, wie es zu dem Gitter auf der Kupfertafel paßt, um durch selbiges die untergelegte Schrift lesen zu können.

XII.

Auszüge und Recensionen neuer Bücher.

---

1. Weitere Ausführung der mathematischen Geographie, besonders in Absicht auf die sphäroidische Gestalt der Erde, von A. G. Kästner, Göttingen 1795. 526 S. 8. mit 6 Kupfern.

Das Verfahren des um die Mathematik so verdienten Verfassers, auf seine Lehrbücher die weitere Ausführung der einzelnen Theile zu gründen, ist so schicklich, daß es in andern Wissenschaften zur Nachahmung empfohlen werden muß. Es wird dadurch für Anfänger und Geübte zugleich gesorgt. Wer höhere Kenntnisse sucht, braucht nicht mit den ersten Elementen sich ermüden zu lassen, und der Raum wird dabey für schwerere Untersuchungen gespart. Das gegenwärtige Werk zeichnet sich besonders dadurch aus, daß es Materien, über welche man nur zerstreuten Unterricht, oft ohne Beyfügung der Gründe, antraf, in einer systematischen Ordnung, und genau erörtert vorträgt.

Nach einigen vorangeschickten trigonometrischen Lehrsätzen wird von der Messung eines Grades auf der Erde gehandelt. Diese wird an dem Beyspiele von Snells Verfahren, der ersten geometrischen Gradmessung erläutert. Von den darauf gefolgten Gradmessungen wird nichts angeführt, weil es sehr weitläuftig geworden seyn würde, vollständig zu erklären, wie solche Messungen angestellt, geprüft und berichtigt werden, wozu man die Bücher, welche sie beschreiben, durchstudiren müsse.

(Von diesen Messungen sind zwar die nöthigsten Nachrichten in den Anfangsgründen mitgetheilt worden; gleichwohl würde es vielen Lesern angenehm gewesen seyn, von Unternehmungen hier ausführlich belehrt zu werden, welche die größten und schwersten in der ganzen angewandten Mathematik sind, besonders da die einzelnen Schriften darüber nicht allenthalben zur Hand sind.)

In

In dem dritten Cap. wird die Erde als ein Sphäroid betrachtet, erstlich im Allgemeinen, darauf als ein zusammengedrucktes elliptisches. Da die Richtungen der Schwere auf einem Sphäroid nicht nach dem Mittelpuncte der Erde laufen, so ist das erste, was zu bestimmen nöthig ist, der Winkel der Verticallinie mit der nach dem Mittelpuncte gezogenen Linie. Die Richtungen der Schwere schneiden sich jede mit der ihr unendlich nahen in der Evolute der Ellipse oder jeder andern Figur, die der Meridian hat, die bey Bouguer daher gravicentrique und barocentrique heißt. Aus zwey gemessenen Graden wird die Gestalt und Größe des elliptischen Sphäroids bestimmt. Die drey, in Peru, bey Paris und in Lappland gemessenen Grade passen nicht in eine und dieselbe Ellipse. Tafel für die Abplattungen der Erde nach den verschiedenen Messungen und Rechnungen. Fläche eines elliptischen Sphäroids, eines gedruckten und eines länglichen. Gestalt des Meridians nach Bouguer. Diese bestimmt er empirisch, den drey damahls gemessenen Graden gemäß, so daß die Unterschiede der Grade des Meridians von dem unter dem Aequator sich wie die vierte Potenz des Sinus der Breite verhalten. Die Vergleichung einiger gemessenen Grade zwischen den Breiten von 43 und 46 Gr. mit Bouguers berechneten Graden, zeigt einen merklichen Unterschied. (Diese gemessenen Grade zeigen gleich auf den ersten Anblick eine Unregelmäßigkeit, noch mehr, wenn man sie mit dem sehr genau gemessenen Grade zu Paris vergleicht. Bouguers Hypothese führt auf eine weitläuftige Berechnung; die Gestalt des Meridians, wenn sie empirisch bestimmt wird, läßt sich viel genauer darstellen).

Viertes Cap. Von der Schwungkraft auf einem gegebenen Sphäroid. Ihre Größe auf dem Aequator, und auf einem Parallelkreise. Aufgabe: Aus der Gestalt der Erde und der Schwungkraft auf einem Parallel die Richtung und Größe einer Kraft zu finden, aus welcher, mit der Schwungkraft verbunden, die Schwere senkrecht auf die Erdfläche entstehen kann. Der Hr. Verf. hält es nicht für entschieden, ob eine solche Kraft wirklich vorhanden sey. Bey zwey Kräften, die sich nicht gleich und entgegengesetzt sind, kann kein Gleichgewicht entstehen. Die gesuchte Kraft ist also diejenige, welche aus allen Anziehungskräften gegen jedes Element des Sphäroids entsteht. Sie ist aber nicht allenthalben nach dem Mittelpuncte der Erde gerichtet

richtet. Der Hr. Verf. macht die Anwendung, der Leichtigkeit wegen, nur auf eine Kugel; allein, auf einer sich drehenden Kugel bleibt die Richtung der Schwere nicht mehr senkrecht auf die Oberfläche. Entweder verwandelt sie sich, wenn sie flüssig ist, in ein Sphäroid; oder wenn sie wegen der Festigkeit eine Kugel bleibt, so weicht die Richtung der Schwere von dem Mittelpuncte ab. — Eine andre Frage ist folgende: wenn rings herum gegen die Erde eine Kraft senkrecht gegen die Erdfläche allenthalben gleich stark wirkte, und diese Kraft nur an jedem Orte durch die Schwungkraft vermindert würde, so, daß daraus die beobachtete Schwere entsteht, was wird aus dieser Voraussetzung folgen? Sie widerspricht den Erfahrungen über die Pendellängen sehr deutlich, und würde, wenn die Schwungkraft unter dem Aequator der Schwere gleich wäre, einen gedoppelten parabolischen Kegel geben, dessen Scheitel in den Polen liegen. (Die Voraussetzung ist eine bloß geometrische, bey welcher dem Mittelpuncte alle Anziehungskraft beygelegt wird. Auf einem Sphäroid, dessen Elemente alle anziehen, ist sie unmöglich). Von Newtons Verfahren die Figur der Erde zu bestimmen. Ueber die Aenderungen der Schwere auf des Sphäroids Oberfläche, nach der Breite. Es ist hier ein Satz Newtons erörtert, daß die verticalen Schweren, und also auch die Pendellängen, sich beynahe umgekehrt wie die Entfernungen vom Mittelpuncte verhalten.

Fünftes Cap. Von der Parallaxe auf einem Sphäroid. Sehr ausführlich und genau. Nur wird die Methode etwas Schwierigkeit machen: weil der Verf. alles aus der ebenen Trigonometrie herleitet, und am Ende erst zeigt, wie man alle hier vorkommenden Winkel durch Bogen und Winkel auf einer Kugelfläche darstellen könne. Es scheint bequemer zu seyn, dieses gleich anfangs zu thun, die Veränderungen der für den Mittelpunct der Erde gegebenen Lage eines Weltkörpers durch den Standort auf der Oberfläche zu bestimmen, und aus dieser durch Umkehrung der Formeln den scheinbaren Ort in den wahren oder geocentrischen zu verwandeln. Uebrigens findet man hier in der Kürze alles Wichtige beysammen, was die vorzüglichsten Astronomen und Analysten über die Parallaxe mitgetheilt haben.

Sechstes Cap. Von Loxodromien und den Seecharten mit wachsenden Graden. Der Hr. Verf. hatte sich zwar vorgenom-

genommen, die Verzeichnung der geographischen und astronomischen Charten vorzutragen, unterließ es aber, da er fand, daß Hr. Hofr. Mayer in seinem vortrefflichen Werke diesen Gegenstand vollkommener abgehandelt hat, als es in einem Capitel dieses Buches geschehen konnte. Da jenes Werk die Schiffskunst nicht zum Zweck hat, so kommt darinn von der Loxodromie nichts vor, die hier für eine Kugel und für ein Sphäroid gefunden wird. Mehrere Untersuchungen über Fragen aus der Steuermannskunst. Nachrichten von Schriftstellern über diesen Gegenstand.

Siebentes Cap. Kleine geographische Bemerkungen und Nachrichten. Die letzte betrifft ein Astrolabium von de la Hire, das ist, eine gewisse Projectionsart der Kugelfläche, bey welcher das Auge in einer solchen Entfernung von dem großen Kreise, der zur Tafel dient, gestellt wird, daß die Hälften des Quadranten von dem Pol der Tafel an gerechnet, gleich große Abbildungen erhalten. Hr. Mayer hat diese Entwerfungsart nicht angeführt.

Dies ist eine kurze Angabe der wichtigsten Stücke des Inhalts dieses lehrreichen Werks. Ich will zum Beschluß noch einige Bemerkungen beyfügen.

In der Formel für die unbestimmte Fläche eines gedruckten Sphäroids (S. 101) ist durch einen Druckfehler die Constans unrichtig, durch $\frac{1}{2}$n statt $\frac{1}{2}$ angegeben. Auch muß in dem ersten Gliede des veränderlichen Theils $1 - x^2$ statt $1 - x$ gelesen werden. Das ist inzwischen nur nebenher zu erinnern die Absicht. Ich finde übrigens die Formel selbst nicht bequem, weil die veränderliche Größe eine irrationale Function der Ordinate, und diese wieder eine Function der Breite ist. Man wird aber zur Berechnung einer Zone auf einem Sphäroid die Breite der Gränzparallele, als das Gegebene gebrauchen. In Mallets mathematischer Geographie ist eine Formel, welche die sphäroidische Oberfläche durch die Breite angiebt, nur daß in derselben ein Winkel aufgenommen ist, der eine leichte Function der Breite ist. Allein die Formel ist durch einen Rechnungsfehler, der durch die ganze Auflösung geht, in dem ersten Factor unrichtig, und stellt das nicht dar, was sie angeben soll. Sie enthält die Zone zwischen dem Aequator und einem Parallel,

a B d

1	2	3	4	5	16	11	6	1
6	7	8	9	10	17	12	7	2
11	12	13	14	15	18	13	8	3
16	17	18	19	20	19	14	9	4
5	10	15	20		20	15	10	5
4	9	14	19	20	19	18	17	16
3	8	13	18	15	14	13	12	11
2	7	12	17	10	9	8	7	6
1	6	11	16	5	4	3	2	1

b c

II. Nun construire man die Complexionen der (n^2+n)ten **Variationsclasse** mit **Widerholungen**, aus den Elementen a, b, c, d, die zur Ordnung a gehören, schreibe die Complexion 1 2 3 4 5 6 .... (n^2+n) so viel mal, so viel es solcher bestimmter Variations-Complexionen giebt, also (4^{n^2+n-1}) mal, und verfahre übrigens in allem so, wie bey A; so stellt jede solche einzelne Verbindung von Zahlen und Buchstaben ein Chassis oder Gitter vor; und die Anzahl der sämtlichen Gitter beträgt 4^{n^2+n-1}.

Exempel. Für $n = 4$ hat das Quadrat B überhaupt $4 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 1 = 81$ Fächer, $4 \cdot 5 = 20$ offene und $3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 61$ gedeckte, das mittelste mit einbegriffen. Die Menge der gesamten Gitter wäre $4^{n^2+n-1} = 4^{19} = 2^{38} = 274877906944$. Ein

ein-

einzelnes Gitter unter diesen, z. B. das, welches sich auf die Variations-Complexion der $4^2+4 = 20$sten Classe

a d c b a b c b a d a b d b c c a d a d

bezieht, würde auf folgende Art

a d c b a b c b a d a b d b c c a d a d
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

vorgestellt, und in seiner Ordnung, von dem ersten an gezählt, das 245235833396ste seyn.

So weit Herrn M. Töpfers combinatorische Auflösung dieser Variationsaufgabe, die man gewiß sehr leicht und sehr natürlich finden wird, wenn man nur einige Kenntniß von combinatorischen Operationen und Verfahren hat. Für Leser, denen solche Kenntnisse abgehen, können folgende Anmerkungen dienen.

1. Die Variationen einer geforderten Classe außer der Ordnung (wie hier der 16ten oder 20sten) für gegebene Elemente a, b, c, d... wird man auf keinem Fall bequemer darstellen, als wenn man dabey die von mir gegebene Vorschrift *) befolgt. Herrn M. Töpfers Auflösung bezieht sich auf diejenigen Gitter, bey denen das Fach 1 im Vierecke oder Rechtecke a als erstes oder Anfangsfach betrachtet wird, daher er auch nur auf die Ordnung a Rücksicht nimmt, aus welcher sich die Ordnungen b, c, d leicht herleiten lassen (Ebend. S. 169, 170). Es ist demnach nach jener Auflösung

die erste Variations-Complexion:

a a a a a a a a a a a..........

die letzte Variations-Complexion:

a d d d d d d d d d d..........

bey

*) In der neuerlich herausgegebenen Schrift: der polynomische Lehrsatz — neu bearbeitet ꝛc. Leipzig, bey Fleischer 1796. Die im Texte angeführte Vorschrift stehet das. S. 168, bis 169, [illegible]

beydes, a und d so lange fortgesetzt, bis man so viel Buchstaben geschrieben hat, als in der Zahl der Classe Einheiten enthalten sind.

2. Aus dieser Vorschrift die Variationen anzugeben, übersieht man sogleich, daß die Anzahl aller, entweder 4^{n^2-1} oder 4^{n^2+n-1} seyn müsse, nachdem sie für ein Quadrat wie A oder B zu bestimmen ist. Daraus läßt sich auch die Regel ableiten, für eine gegebene Variations-Complexion anzugeben, die wievielste sie in ihrer Classe sey. Man setzt nehmlich für die Buchstaben a, b, c, d, ihre Ordnungszahlen 1, 2, 3, 4; diese, statt der Buchstaben z. B. in den bestimmten Variations-Complexionen der obigen beyden Exempel gebraucht, lassen nun die gesuchte Zahl durch ein Verfahren finden, das ich hier bey der Zahl des zweyten Exempels in einem Beyspiele zeigen will. Die Substitution der zugehörigen Zahlen für die dortigen Buchstaben, verwandelt jene Buchstabencomplexion in nachstehende Zahlencomplexion:

1 4 3 2 1 2 3 2 1 4 1 2 4 2 3 3 1 4 1 4

und aus dieser findet man (die kleinen Zahlen sind hier Potenzexponenten von 4)

$$\left\{\begin{array}{l} 4\cdot4^{0}+0\cdot4^{1}+3\cdot4^{2}+0\cdot4^{3}+2\cdot4^{4}+2\cdot4^{5}+1\cdot4^{6}+3\cdot4^{7}+1\cdot4^{8}+0\cdot4^{9} \\ +3\cdot4^{10}+0\cdot4^{11}+1\cdot4^{12}+2\cdot4^{13}+1\cdot4^{14}+0\cdot4^{15}+1\cdot4^{16}+2\cdot4^{17}+3\cdot4^{18}+0\cdot4^{19} \end{array}\right\}$$

$= 24523583396$, wie oben.

Die Factoren neben den Potenzen von 4 sind hier die einzelnen Zahlen der obigen Zahlencomplexion, jede um 1 vermindert, die letzte Zahl (hier 4) ausgenommen. Giengen die Buchstaben a, b, c, d, in entgegengesetzter Richtung mit der dortigen (S. 94) ums Gitter in B herum, so wären hier blos b und d, oder die Zahlen 2 und 4 verwechselt, und so bestimmte das schon ein anderes Netz, dessen Zahl, nach obiger Regel gesucht, das 116955249170igste Gitter geben würde.

3. Aus

3. Aus den so sehr großen Zahlen übersieht man sogleich die Unmöglichkeit einer wirklichen Darstellung aller Gitter; auch würden viele dieser Gitter die Absicht für Geheimschreiberey gar nicht erfüllen. Die angeführte Vorschrift ist dennoch nicht überflüssig. Sie zeigt das sehr einfache Gesetz der Folge und die Abhängigkeit der Gitter von einander. Dieser so ganz bestimmten Folge wegen, kann man jedem Gitter die ihm zukommende Ordnungszahl anweisen, und, umgekehrt, aus der gegebenen Zahl das Gitter construiren, wenn man die so eben angewiesene Regel nur umgekehrt befolgt: da dividirt, wo man vorher multiplicirte, und die gefundenen Zahlen um 1 vermehrt, wie man sie vorher um 1 verminderte, die letzte allein ausgenommen. Das kann sogar kryptographisch wichtig werden, in sofern man jemanden, der das Verfahren kennt, blos die Zahl des Gitters zusenden darf, durch welches man eine Schrift geschrieben hat, damit das Gitter darnach entworfen werden kann.

4. Daß man bey der Auswahl von Gittern auch noch auf bestimmte Absichten Rücksicht nehmen könne, ist für sich klar. Wenn es aber blos darum zu thun ist (und dies ist der gewöhnliche Fall) überhaupt ein Gitter zu wählen, so, daß die durch dasselbe geschriebene Schrift, für jeden, nicht blos neugierigen, selbst scharfsinnigen Forscher, ein undurchdringliches, ganz unlesbares Geheimniß bleibe, so kann man die obigen Regeln für A und B so modificiren, daß man nicht einmal nöthig hat, um die Vorschrift für eine gesetzmäßige Folge der Variationen unter einander sich zu bekümmern. Die Regel ist dann ganz kurz folgende:

I. Die Anzahl aller Fächer des gegebenen oder willkührlich gewählten Quadrates (wie oben A oder B) dividire man durch 4. Der Quotient sey q; bey B bleibt

für das Mittelfach 1 übrig, worauf hier nicht geachtet wird.

II. Die Zahlen 1 2 3 4 5 ....q nach der Ordnung schreibe man in eine Reihe neben einander.

III. Darüber setze man die Buchstaben a, b, c, d, nach einer willkührlichen Folge und Abwechselung, so, daß über jeder Zahl ein Buchstabe zu stehen kommt.

IV. Eine solche Verbindung von Zahlen und Buchstaben bestimmt ein Chassis. Die Buchstaben zeigen die bestimmten Quadranten des Quadrats an, die Zahlen weisen die darinn auszuschlagenden Stellen nach.

Exempel, für q = 16, wie oben in A, am Schlusse.

a	c	b	a	d	c	b	a	a	b	b	c	d	b	a	c
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Diese so ganz nach Willkühr hingeschriebenen Buchstaben über den Zahlen von 1 bis 16, bestimmen zusammen ein anderes Gitter, als das obige in A vorgegebene. Auch hier ist der Anfang von dem Fache 1 in a gemacht worden; welches aber nicht nothwendig ist. Man hätte auch b, c oder d über 1 setzen können.

5) Eine stillschweigend bis hieher angenommene Bedingung ist, daß bey der viermaligen Verwendung des Gitters nach und nach alle Fächer der Unterlage für die Schrift besetzt werden, und dabey kein Fach mehr als einmal vorkomme. Daraus ersieht man gar bald, daß es noch mehrere Auflösungen, als die oben in A und B angeführten, giebt, die diese Bedingung erfüllen. Die Auflösung des Ungenannten, die er aber hier nicht mit angegeben hat, ist auch von jener ganz verschieden. Das Allgemeine, das bey Aufgaben dieser Art zum Grunde liegt, ist die Theilung des gegebenen ganzen Quadrats in verschiedene (nicht eben nothwendig in vier) gleiche

und

und ähnliche Schnitte (auch von anderer als quadratischer oder rectangulärer Gestalt) die sich, beym Verwenden jedesmal einander decken. Da das auf mehrere Arten geschehen kann, auch solcherley Schnitte bey Aufgaben anderer Art schon vorkommen, bey denen an steganographische Netze gar nicht gedacht wird: so zeigt sich hier eine Mannichfaltigkeit, die bey Auflösungen combinatorischer Aufgaben gar nicht selten ist.

6) Wollte man statt der Quadrate A und B andere **reguläre Figuren** substituiren, oder, statt des viermaligen, wie vorher bestimmten, Verwendens, andere Bedingungen einführen, so würde das Ziel dadurch immer weiter gesteckt, und die Anzahl der Auflösungen noch viel mehr vermehrt werden.

Erinnerung wegen des (S. 83, 84) angeführten, am Ende dieses Heftes in Kupfer gestochenen Gitters.

Dieses Netz oder Gitter sollte genau von der Größe gezeichnet werden, wie es zu der (S. 84) befindlichen Gitterschrift paßte. Da aber für diese Schrift die Fächer des Gitters zu klein ausgefallen seyn würden: so ist das Gitter im Kupfer etwas **vergrößert** dargestellt, so daß man sich leicht ein Viereck mit den Buchstaben wie auf Seite 84, auf einen **besondern Blatte** von der Größe entwerfen kann, wie es zu dem Gitter auf der Kupfertafel paßt, um durch selbiges die untergelegte Schrift lesen zu können.

XII.

Auszüge und Recensionen neuer Bücher.

---

1. Weitere Ausführung der mathematischen Geographie, besonders in Absicht auf die sphäroidische Gestalt der Erde, von A. G. Kästner, Göttingen 1795. 526 S. 8. mit 6 Kupfern.

Das Verfahren des um die Mathematik so verdienten Verfassers, auf seine Lehrbücher die weitere Ausführung der einzelnen Theile zu gründen, ist so schicklich, daß es in andern Wissenschaften zur Nachahmung empfohlen werden muß. Es wird dadurch für Anfänger und Geübte zugleich gesorgt. Wer höhere Kenntnisse sucht, braucht nicht mit den ersten Elementen sich ermüden zu lassen, und der Raum wird dabey für schwerere Untersuchungen gespart. Das gegenwärtige Werk zeichnet sich besonders dadurch aus, daß es Materien, über welche man nur zerstreuten Unterricht, oft ohne Beyfügung der Gründe, antraf, in einer systematischen Ordnung, und genau erörtert vorträgt.

Nach einigen vorangeschickten trigonometrischen Lehrsätzen wird von der Messung eines Grades auf der Erde gehandelt. Diese wird an dem Beyspiele von Snells Verfahren, der ersten geometrischen Gradmessung erläutert. Von den darauf gefolgten Gradmessungen wird nichts angeführt, weil es sehr weitläuftig geworden seyn würde, vollständig zu erklären, wie solche Messungen angestellt, geprüft und berichtigt werden, wenn man die Bücher, welche sie beschreiben, durchstudiren müsse.

(Von diesen Messungen sind zwar die nöthigsten Nachrichten in den Anfangsgründen mitgetheilt worden; gleichwohl würde es vielen Lesern angenehm gewesen seyn, von Unternehmungen hier ausführlich belehrt zu werden, welche die größten und schwersten in der ganzen angewandten Mathematik sind, besonders da die einzelnen Schriften darüber nicht allenthalben zur Hand sind.)

In dem dritten Cap. wird die Erde als ein Sphäroid betrachtet, erstlich im Allgemeinen, darauf als ein zusammengedrucktes elliptisches. Da die Richtungen der Schwere auf einem Sphäroid nicht nach dem Mittelpuncte der Erde laufen, so ist das erste, was zu bestimmen nöthig ist, der Winkel der Verticallinie mit der nach dem Mittelpuncte gezogenen Linie. Die Richtungen der Schwere schneiden sich jede mit der ihr unendlich nahen in der Evolute der Ellipse oder jeder andern Figur, die der Meridian hat, die bey Bouguer daher gravicentrique und barocentrique heißt. Aus zwey gemessenen Graden wird die Gestalt und Größe des elliptischen Sphäroids bestimmt. Die drey, in Peru, bey Paris und in Lappland gemessenen Grade passen nicht in eine und dieselbe Ellipse. Tafel für die Abplattungen der Erde nach den verschiedenen Messungen und Rechnungen. Fläche eines elliptischen Sphäroids, eines gedruckten und eines länglichen. Gestalt des Meridians nach Bouguer. Diese bestimmt er empirisch, den drey damahls gemessenen Graden gemäß, so daß die Unterschiede der Grade des Meridians von dem unter dem Aequator sich wie die vierte Potenz des Sinus der Breite verhalten. Die Vergleichung einiger gemessenen Grade zwischen den Breiten von 43 und 46 Gr. mit Bouguers berechneten Graden, zeigt einen merklichen Unterschied. (Diese gemessenen Grade zeigen gleich auf den ersten Anblick eine Unregelmäßigkeit, noch mehr, wenn man sie mit dem sehr genau gemessenen Grade zu Paris vergleicht. Bouguers Hypothese führt auf eine weitläuftige Berechnung; die Gestalt des Meridians, wenn sie empirisch bestimmt wird, läßt sich viel genauer darstellen).

Viertes Cap. Von der Schwungkraft auf einem gegebenen Sphäroid. Ihre Größe auf dem Aequator, und auf einem Parallelkreise. Aufgabe: Aus der Gestalt der Erde und der Schwungkraft auf einem Parallel die Richtung und Größe einer Kraft zu finden, aus welcher, mit der Schwungkraft verbunden, die Schwere senkrecht auf die Erdfläche entstehen kann. Der Hr. Verf. hält es nicht für entschieden, ob eine solche Kraft wirklich vorhanden sey. Bey zwey Kräften, die sich nicht gleich und entgegengesetzt sind, kann kein Gleichgewicht entstehen. Die gesuchte Kraft ist also diejenige, welche aus allen Anziehungskräften gegen jedes Element des Sphäroids entsteht. Sie ist aber nicht allenthalben nach dem Mittelpuncte der Erde ge-

richtet. Der Hr. Verf. macht die Anwendung, der Leichtigkeit wegen, nur auf eine Kugel; allein, auf einer sich drehenden Kugel bleibt die Richtung der Schwere nicht mehr senkrecht auf die Oberfläche. Entweder verwandelt sie sich, wenn sie flüssig ist, in ein Sphäroid; oder wenn sie wegen der Festigkeit eine Kugel bleibt, so weicht die Richtung der Schwere von dem Mittelpuncte ab. — Eine andre Frage ist folgende: wenn rings herum gegen die Erde eine Kraft senkrecht gegen die Erdfläche allenthalben gleich stark wirkte, und diese Kraft nur an jedem Orte durch die Schwungkraft vermindert würde, so, daß daraus die beobachtete Schwere entsteht, was wird aus dieser Voraussetzung folgen? Sie widerspricht den Erfahrungen über die Pendellängen sehr deutlich, und würde, wenn die Schwungkraft unter dem Aequator der Schwere gleich wäre, einen gedoppelten parabolischen Kegel geben, dessen Scheitel in den Polen liegen. (Die Voraussetzung ist eine bloß geometrische, bey welcher dem Mittelpuncte alle Anziehungskraft beygelegt wird. Auf einem Sphäroid, dessen Elemente alle anziehen, ist sie unmöglich). Von Newtons Verfahren die Figur der Erde zu bestimmen. Ueber die Aenderungen der Schwere auf des Sphäroids Oberfläche, nach der Breite. Es ist hier ein Satz Newtons erörtert, daß die verticalen Schweren, und also auch die Pendellängen, sich beynahe umgekehrt wie die Entfernungen vom Mittelpuncte verhalten.

Fünftes Cap. Von der Parallaxe auf einem Sphäroid. Sehr ausführlich und genau. Nur wird die Methode etwas Schwierigkeit machen: weil der Verf. alles aus der ebenen Trigonometrie herleitet, und am Ende erst zeigt, wie man alle hier vorkommenden Winkel durch Bogen und Winkel auf einer Kugelfläche darstellen könne. Es scheint bequemer zu seyn, dieses gleich anfangs zu thun, die Veränderungen der für den Mittelpunct der Erde gegebenen Lage eines Weltkörpers durch den Standort auf der Oberfläche zu bestimmen, und aus dieser durch Umkehrung der Formeln den scheinbaren Ort in den wahren oder geocentrischen zu verwandeln. Uebrigens findet man hier in der Kürze alles Wichtige beysammen, was die vorzüglichsten Astronomen und Analysten über die Parallaxe mitgetheilt haben.

Sechstes Cap. Von Loxodromien und den Seecharten mit wachsenden Graden. Der Hr. Verf. hatte sich zwar vorgenom-

genommen, die Verzeichnung der geographischen und astronomischen Charten vorzutragen, unterließ es aber, da er fand, daß Hr. Hofr. Mayer in seinem vortrefflichen Werke diesen Gegenstand vollkommener abgehandelt hat, als es in einem Capitel dieses Buches geschehen konnte. Da jenes Werk die Schiffskunst nicht zum Zweck hat, so kommt darinn von der Loxodromie nichts vor, die hier für eine Kugel und für ein Sphäroid gefunden wird. Mehrere Untersuchungen über Fragen aus der Steuermannskunst. Nachrichten von Schriftstellern über diesen Gegenstand.

Siebentes Cap. Kleine geographische Bemerkungen und Nachrichten. Die letzte betrifft ein Astrolabium von de la Hire, das ist, eine gewisse Projectionsart der Kugelfläche, bey welcher das Auge in einer solchen Entfernung von dem großen Kreise, der zur Tafel dient, gestellt wird, daß die Hälften des Quadranten von dem Pol der Tafel an gerechnet, gleich große Abbildungen erhalten. Hr. Mayer hat diese Entwerfungsart nicht angeführt.

Dies ist eine kurze Angabe der wichtigsten Stücke des Inhalts dieses lehrreichen Werks. Ich will zum Beschluß noch einige Bemerkungen beyfügen.

In der Formel für die unbestimmte Fläche eines gedruckten Sphäroids (S. 101) ist durch einen Druckfehler die Constans unrichtig, durch $\frac{1}{2}$n statt $\frac{1}{2}$ angegeben. Auch muß in dem ersten Gliede des veränderlichen Theils $1 - x^2$ statt $1 - x$ gelesen werden. Das ist inzwischen nur nebenher zu erinnern die Absicht. Ich finde übrigens die Formel selbst nicht bequem, weil die veränderliche Größe eine irrationale Function der Ordinate, und diese wieder eine Function der Breite ist. Man wird aber zur Berechnung einer Zone auf einem Sphäroid die Breite der Gränzparallele, als das Gegebene gebrauchen. In Mallets mathematischer Geographie ist eine Formel, welche die sphäroidische Oberfläche durch die Breite angiebt, nur daß in derselben ein Winkel aufgenommen ist, der eine leichte Function der Breite ist. Allein die Formel ist durch einen Rechnungsfehler, der durch die ganze Auflösung geht, in dem ersten Factor unrichtig, und stellt das nicht dar, was sie angeben soll. Sie enthält die Zone zwischen dem Aequator und einem Parallel,

da sie doch den Theil, in welchem der Pol liegt, angeben soll. Die Constans ist bey der Integration vergessen. *)

Der Hr. Verf. hat die Untersuchung über die Bestimmung der Gestalt der Erde aus hydrostatischen Gründen ganz weggelassen. Es ist vollkommen wahr, was S. 197. gesagt wird, daß diese Untersuchung nur lehrt, was die Oberfläche unsers Planeten für eine Gestalt hätte, wenn er einmal flüssig gewesen wäre, und daß wir gar nicht berechtigt sind, dieses anzunehmen. (Ich setze noch hinzu, daß das feste Land, worauf die Messungen angestellt worden sind, sich nicht nach hydrostatischen, sondern nach chemischen Gesetzen höchst wahrscheinlich gebildet hat). Auch erlaubte die Absicht und der Umfang des Buches nicht, die Untersuchung mit der gehörigen Vollständigkeit und Gründlichkeit auszuführen: Allein, es ist doch eine der schönsten Unternehmungen in der Mathematik, die Figur eines Weltkörpers unter einer gewissen Voraussetzung a priori zu bestimmen, und den meisten Lesern würde es sehr lehrreich gewesen seyn, die Geschichte dieses wichtigen Problems und die Resultate historisch kennen zu lernen. Die Theorie von der Figur der Erde ist nöthig, zur Vergleichung der mittelst der Pendellängen beobachteten Schweren, die wiederum zur Bestimmung des Verhältnisses der Axe und des Aequatoreal-Durchmessers sehr dienlich sind. Die Gradmessungen widersprechen der elliptischen Figur der Meridiane, und es ist also bloß eine Hypothese der Rechnung wegen, wenn man diese Figur annimmt. Die hydrostatische Theorie zeigt, daß sie wirklich Statt finden würde, wenn die Erde ganz ein flüssiger gleichförmiger Körper wäre, daher es erlaubt seyn mag, mit Beyseitsetzung kleiner Abweichungen, die Erde als ein gedrucktes elliptisches Sphäroid zu betrachten. Wollte man sich bloß an die Gradmessungen halten, so muß man die elliptische Figur aufgeben, und nach einem schicklichen algebraischen Gesetze die Figur der Meridiane aus Beobachtungen bestimmen. Hiebey kann man aber nicht solche Hülfssätze anbringen, wie bey der Ellipse aus ihren Eigenschaften möglich ist, da jene Linie ganz individuell ist.

*) In dem astronomischen Jahrbuche für 1790 ist die richtige Formel gegeben, nur daß daselbst in dem zweyten Factor statt = zu setzen ist +. Noch eine Formel, die unmittelbar die Fläche durch die Breite giebt, ist daselbst mitgetheilt. Einige Druckfehler sind auch in diesem Aufsatze zu verbessern.

2. Nach-

2. Nachtrag zu der Recension von Herrn Hofrath Mayers Anweisung zur Verfertigung der Land-, See- und Himmelscharten; im 2ten Hefte des ersten Bandes des Archivs. S. 236.

Der hier unterzeichnete Verfasser dieser Recension [hat die S. 101 befindliche Tafel zur Vergleichung der Grade der Parallelkreise auf einem elliptischen Sphäroid und auf einer Kugel daher für unrichtig erklärt, weil in dem Werthe der Normallinie ein Fehler durch Verwechselung zweyer Buchstaben vorgegangen ist.] Die Tafel ist aber, wenn aus keinem andern Grunde etwas gegen sie zu erinnern ist, richtig. Denn bey der Substitution des Halbmessers des Aequators in der Formel für den Halbmesser eines Parallelkreises ist der Fehler verschwunden, der weiter nichts als eine Verwechslung ist. Den Fehler hat Hr. Hofr. Mayer in dem 3ten Theile seiner practischen Geometrie selbst angezeiget, die Tafel aber für richtig erklärt.

Es ist inzwischen zweyerley gegen sie zu erinnern. Erstlich: die Formel zur Berechnung der Grade auf den Parallelkreisen des Sphäroids beziehet sich auf ein ellipsisches; die Grade des Meridians sind aber nach einer Formel berechnet, die einen nicht-elliptischen Meridian darstellt, nämlich nach derjenigen, die ich bloß aus gewissen Messungen hergeleitet habe. Inzwischen werden die Abweichungen dieses Meridians von einem elliptischen nur unbeträchtlich seyn.

Zweytens: Hr. Hofr. Mayer vergleicht das Sphäroid mit einer Kugel, deren Durchmesser dem des Aequators auf dem Sphäorid gleich ist. Hierinn ist etwas willkührliches. Man könnte ja eben so gut die Umdrehungsaxe, oder einen mittlern Durchmesser des Sphäroids zum Durchmesser der Kugel annehmen. Um die Abweichung der sphäroidischen Gestalt von der Kugelgestalt, in Rücksicht auf die Landcharten zu beurtheilen, muß man die Grade der Parallelkreise auf dem Sphäroid mit den zugehörigen Graden des elliptischen Meridians vergleichen, da es hier vorzüglich auf das Verhältniß dieser Grade ankommt. Nun sey $G =$ dem Grade des elliptischen Meridians in der Breite β; $g =$ dem Grade desselben unter dem Aequator;

𝔊 = einem Grade des Aequators; γ = einem Grade des Parallelkreises in der Breite β, so ist nach §. 10. nr. 14.

$$\gamma = \mathfrak{G} \cos\beta \sqrt[3]{\frac{G}{g}}$$

also $$\frac{\gamma}{G} = \cos\beta \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{G}^3}{g G^2}},$$

anstatt daß auf der Kugel $\frac{\gamma}{G} = \cos\beta$ ist. Der Halbmesser des Aequators sey $= a$; die halbe Umdrehungsaxe $= b$, so ist der Halbmesser der Krümmung unter dem Aequator $= \frac{b\,b}{a}$, und unter dem Pole $= \frac{a\,a}{b}$. Daher ist $\mathfrak{G} : g = aa : bb$; und unter dem Pole ist $\mathfrak{G} : G = b : a$. Folglich ist der Factor von $\cos\beta$ unter dem Aequator $= \frac{a\,a}{b\,b}$, weil hier $G = g$ ist; und unter dem Pole ist derselbe $= 1$. In der Breite von 45° ist der Halbmesser der Krümmnng $= \frac{a^2 b^2}{(\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2)^{\frac{3}{2}}}$, und daher der Factor zu $\cos\beta = \frac{a^2 + b^2}{2 b^2}$.

Demnach sind die Grade der Parallelkreise auf dem Sphäroid in Vergleichung mit den Graden des Meridians größer als auf einer Kugel, und der Unterschied ist auf dem Aequator am größten. Nach der Mayerischen Tafel sind die Grade der Parallelkreise auf dem Sphäroid auch größer als auf der Kugel von gleichem Durchmesser mit dem Aequator des Sphäroids; allein, auf dem Aequator selbst sind sie gleich, und unter dem Pole auch, daher um 60 Gr. Breite der Unterschied ein Größtes ist.

Das Resultat bleibt, daß die sphäroidische Gestalt der Erde bey Landcharten nicht braucht in Betrachtung gezogen zu werden. Denn, wenn man auch das äusserste Verhältniß 187 : 186 für a : b annimmt, so ist aa : bb = 1 : 1,0108, das Verhältniß eines Grades des Parallelkreises unter oder nahe beym Aequator zu einem Grade des Meridians, da es auf der Kugel = 1 : 1 ist. Nach meiner Berechnung für ein nicht ellip-

elliptisches Sphäroid ist dieses Verhältniß = 56745 : 57247 oder 1 : 1,009, und das Verhältniß der äussersten Grade des Meridians, unter dem Aequator und dem Pole = 1 : 1,016.

Man wolle diese Bemerkungen nicht einer Tadelsucht oder Rechthaberey zuschreiben. Ich war dem verdienten Hrn. Hofr. Mayer das anfangs mitgetheilte Geständniß einer Uebereilung schuldig; bey dieser Gelegenheit glaube ich es aber auch der Wissenschaft schuldig zu seyn, eine Verbesserung einer vortreflichen Schrift anzuzeigen.

G. S. Klügel.

3. Aus einem Schreiben Herrn D. Kramp's vom 30 May 1796, dessen weitere Fortschritte in der combinatorischen Analysis betreffend.

Von Herrn D. Kramp's thätiger Theilnahme an Bearbeitung der combinatorischen Analysis habe ich anderwärts *) die herrlichsten Proben mitgetheilt, und werde noch mehrere gelegentlich im Archive, vielleicht auch in einem zweyten Beytrage dazu, bekannt machen. Hier will ich inzwischen zweyer Aufgaben nur historisch gedenken, deren combinatorisch-analytische Auflösung für die weitern Fortschritte der Wissenschaft wichtig sind.

A. Combinatorisch ausgedrückte Summen der Potenzen der natürlichen Zahlenreihe.

I. Herr Kramp geht von dem Lehrsatze aus:

Die Summe der Potenzen vom Grade n, der Glieder in der Zahlenreihe von 1 bis n, exclusive, oder $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n \ldots + (y-1)^n$ ist gleich dem combinatorischen Integrale:

$\int y$

*) In der unlängst herausgegebenen Sammlung verschiedener (größtentheils combinatorisch-analytischen) Abhandlungen: der polynomische Lehrsatz, nebst einigen verwandten und andern Sätzen, neu bearbeitet .... Leipzig, 1796. bey Fleischer dem Jüngern. Herrn D. Kramp's combinatorisch-analytisch behandelte Aufgaben, stehen daselbst S. 102-118. Man vergleiche, Ebendas. S. 98.

$$\int \frac{y(y-1)(y-2)\ldots(y-t)\times n'}{(t+1)\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\ldots\times 1^\beta\, 2^\gamma\, 6^\delta\, 24^\varepsilon\ldots}$$

für $\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+$ etc $=t$ und $\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon+$ etc $=n$.

II. Die Bedeutung der Zeichen ist hier wie in der (S. 107 in der Note citirten) Schrift S. 102, 2; der Combinationen aus β, γ, δ, ε ... sind hier so viele, als die unbestimmte Gleichung $\beta+2\gamma+3\delta+4\varepsilon\ldots=n$ mögliche Auflösungen in ganzen und bejahten Zahlen zuläßt. Man vergleiche, Ebendas. S. 111; 4, 5, und S. 113, 3. Daraus folgt die Summe der aus Zahlenproducten im Zähler und Nenner bestehenden Brüche

$$\frac{n'}{\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\ldots\; 1^\beta\, 2^\gamma\, 6^\delta\, 24^\varepsilon\ldots},$$

auf die hier alles ankommt.

III. In der Folge braucht Herr K. zur Verkürzung folgende Ausdrücke:
$y_1=y$; $y_2=y(y-1)$; $y_3=y(y-1)(y-2)$ u. s. w. und findet $1^n+2^n+3^n\ldots+(y-1)^n$ oder $\int y^n$ durch eine nach y_{n+1}, y_n, $y_{n-1}\ldots y_3$, y_2 ausgedrückte Reihe, deren einzelne Coefficienten, unabhängig von den vorhergehenden, combinatorisch sich bestimmen lassen.

IV. Daraus werden weiter die Werthe für Σy^0, Σy^1, Σy^2 ... gefolgert, sowohl für die Summe $1^n+2^n\ldots+(y-1)^n$ als für $1^n+2^n\ldots+y^n$; auch gezeigt, wie man
y^{n+1} durch $y_1+Ay_2+By_3+Cy_4+Dy_5\ldots$
ausdrücken könne, und die Coefficienten A, B, C, D... auch hier, wie oben, ausser der Ordnung, und von vorhergehenden unabhängig, combinatorisch sich bestimmen lassen.

V. Zuletzt wird ein allgemeiner Ausdruck für Σy^n (das Glied y^n mit eingeschlossen) aufgestellt, und nachgewiesen, wie in

$$\Sigma y^n = y\,M1 + \frac{y(y-1)}{2}M2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{3}M3 + \ldots$$

die M 1, M 2, M 3 ... ebenfalls, unabhängig von einander, jedes für sich, combinatorisch sich finden und ausdrücken lassen.

VI.

VI. Herr D. Kramp bemerkt hierbey, daß der Umstand daß jene Coefficienten, auf welchen hier alles beruht, unabhängig von der Berechnung der Potenzen, nur allein durch die Combinationslehre gefunden werden können, eine für die künftigen Fortschritte dieser neuen Wissenschaft, wichtige Wahrheit sey; auch habe er dadurch bereits mehrere, vorhin noch nie summirte Reihen, wirklich summirt.

Was insbesondere den Werth für Σy^n, in der hier zuletzt angeführten Form, anbetrifft: so sey derselbe (sowohl y als n können hierbey als veränderliche Größen angesehen werden) um so wichtiger, weil durch ihn die veränderliche Größe, die so viele Schwierigkeiten macht, wenn sie als Exponent vorkommt, aus demselben ganz oder zum Theil weggeschaft und unter die Coefficienten versetzt wird. Die Sache sey auch um so viel unerwarteter, da der einzige einigermaßen hieher gehörige Ausdruck von y^n, den die höhere Analysis bisher gelehrt hat, erstens, die Kenntniß der Basis des natürlichen Logarithmensystems voraussetzt; sodann, derselbe Ausdruck eine unendliche Reihe ist, und alle Beschwerden unendlicher Reihen mit sich führt; und drittens, selbiger auch nur in den allerwenigsten Fällen, und nur alsdenn brauchbar ist, wenn der Exponent ein Bruch ist, kleiner als die Einheit, indem in allen andern Fällen die Reihe mehr oder weniger divergirt.

Von so erheblichen Folgen und Vorzügen sey hier die combinatorische Auflösung dieser Aufgabe vor andern nicht-combinatorischen!

II. Ueber die Facultäten der Zahlen.

Nachstehende Erklärungen und Sätze werden zeigen, was die Sache sey.

I. Producte, wie $y\,(y+1)\,(y+2)\ldots.(y+n-1)$ oder auch, wie $y\,(y-1)\,(y-2)\ldots(y-n+1)$ sollen Facultäten von y heißen; und zwar die ersten, steigende, die letzten, fallende Facultäten.

Jede Facultät hat, wie die Potenzen, ihre Basis und ihren Exponenten. Die Basis ist der erste Factor der Facultät; der Exponent ist gleich dem Unterschiede des ersten und letzten Factors, um Eins vermehrt.

Für

Für die Basis y und den Exponenten n, drücke man, die steigenden Facultäten durch $\overset{n}{y}$, die fallenden durch $\underset{n}{y}$ aus. Es ist demnach:

$\overset{1}{y}=y$ $\qquad$ $\underset{1}{y}=y$

$\overset{2}{y}=y(y+1)$ $\qquad$ $\underset{2}{y}=y(y-1)$

$\overset{3}{y}=y(y+1)+(y+2)$ $\qquad$ $\underset{3}{y}=y(y-1)(y-2)$

u. s. w. $\qquad$ u. s. w.

II. Unmittelbare Folgen daraus sind:

$$\overset{n}{x} = \underset{n}{(x+n-1)} \text{ und } \underset{n}{x} = \overset{n}{(x-n+1)}$$

oder, die steigende Facultät von x ist, bey gleichen Exponenten n, zugleich die fallende von $x+n-1$, und umgekehrt, die fallende von x, zugleich die steigende von $x-n+1$.

Ferner $\overset{n}{x}\,\overset{m}{(x+n)} = x^{m+n}$; $\underset{n}{x}\,\underset{m}{(x-n)} = \underset{n+m}{x}$

Für $n+m=0$, wird $\overset{-m}{x}\,\overset{m}{(x-m)}=1$ und $\underset{-m}{x}\,\underset{m}{(x+m)}=1$, also $\overset{-m}{x}=1:\overset{m}{(x-m)}$ und $\underset{-m}{x}=1:\underset{m}{(x+m)}$. Ein verneinter Exponent macht also keine Schwierigkeit.

Für $m > x$, ist $\underset{m}{x}=0$; für $x > m$ ist $\overset{-m}{x}$ eine bejahte Größe; für $x < m$ ist hingegen $\overset{-m}{x}$ unendlich groß.

III. Merkwürdig sind folgende Sätze:

$$\Delta\overset{n}{x} = n.\overset{n-1}{(x+1)} \text{ und } \Delta\underset{n}{x} = n.\underset{n-1}{x}, \text{ folglich}$$

$$\Sigma\overset{n}{(x+1)} \text{ oder } \overset{n}{1}+\overset{n}{2}+\overset{n}{3}\dots+\overset{n}{x} = \frac{\overset{n+1}{x}}{n+1};$$

$$\Sigma\underset{n}{(x+1)} \text{ oder } \underset{n}{1}+\underset{n}{2}+\underset{n}{3}\dots+\underset{n}{x} = \frac{\underset{n+1}{(x+1)}}{n+1}$$

$$\Sigma\underset{n}{x} \text{ oder } \underset{n}{1}+\underset{n}{2}+\underset{n}{3}\dots\underset{n}{(x-1)} = \frac{\underset{n+1}{x}}{n+1}$$

IV.

IV. Vergleicht man dies mit dem bekannten Satze der Integralrechnung $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ so zeigt sich die auffallendste Aehnlichkeit dieser Formel mit den beyden erst gefundenen $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ und $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, die gleichwohl unter sich nur darinn verschieden sind, daß die erstern die verlangte Summe mit Einschluß des letzen Gliedes x^n, die andern, die verlangte Summe mit Ausschluß des letzten Gliedes x^n zu erkennen geben.

Und in dieser so ausserordentlich leichten Integration, die nur auf Facultäten und auf keine andre Classe von Functionen sich erstreckt, liegt eben die Wichtigkeit der für die höhere Analysis unentbehrlichen Facultätenrechnung, die, in Verbindung mit der so viel umfassenden Combinationslehre, den *Calcul aux differences finies* in seiner ganzen Ausdehnung erschöpft, und kein Problem desselben unaufgelöst läßt.

So wie das gewöhnliche Problem der Integralrechnung (wo man kein endliches Integral geben kann) dieses ist, den mit dx multiplicirten Factor in eine Reihe entwickelt darzustellen, die nach steigenden oder fallenden Progressionen der Potenzen von x fortgeht; so ist es hingegen die Hauptaufgabe der weit schwerern Reihenlehre, den Ausdruck der summirt werden soll, in eine Reihe steigender oder fallender Facultäten der veränderlichen Grösse zu entwickeln.

V. Hierher gehören folgende von Herrn D. Kramp sämmtlich gelöste Aufgaben:

a) Eine gegebene steigende Facultät von x, durch eine Reihe steigender Facultäten von x + a auszudrücken.

b) Eine gegebene fallende Facultät von x durch eine Reihe fallender Facultäten von x + a auszudrücken.

c) Eine gegebene steigende Facultät von x durch eine Reihe fallender Facultäten von x + a auszudrücken.

d) Eine gegebene fallende Facultät von x durch eine Reihe steigender Facultäten von x + a auszudrücken.

VI.

VI. Auch der binomische und polynomische Lehrsatz für Potenzen, sind beyde, in ihrer ganzen Form und Allgemeinheit auf steigende und fallende Facultäten anwendbar. Zum Beyspiele mag hier die binomische Form dienen,

wo $(y+a)^{n} = y^{n} + {}^{n}\mathfrak{A}\, y^{n-1} a^{1} + {}^{n}\mathfrak{B}\, y^{n-2} a^{2} + {}^{n}\mathfrak{C}\, y^{n-3} a^{3} + \text{etc}$

und $(y+a)_{n} = y_{n} + {}^{n}\mathfrak{A}\, y_{n-1} a_{1} + {}^{n}\mathfrak{B}\, y_{n-2} a_{2} + {}^{n}\mathfrak{C}\, y_{n-3} a_{3} + \text{etc}$

VII. Als ein Corollarium fließt hieraus:

$$(x+1)^{n} = x^{n} + n_{1} x^{n-1} + n_{2} x^{n-2} + n_{3} x^{n-3} + \text{etc}$$

$$(x+1)_{n} = x_{n} + n_{1} x_{n-1} + n_{2} x_{n-2} + n_{3} x_{n-3} + \text{etc}$$

Durch diese Formeln läßt sich also die Facultät von $x+1$ durch lauter Facultäten von x ausdrücken.

VIII. So läßt sich auch das Product einer Potenz von y mit einer Facultät eben dieser Grösse, z. B. $x^{m}\, x^{n}$, durch eine Reihe einfacher Facultäten von x, steigender oder fallender, ausdrücken. Der allgemeine Ausdruck des numerischen Coefficientens der häufig hierbey vorkommenden Potenzen von n, z. B. der Potenz n^{r}, in dem Factor des allgemeinnn Gliedes x^{n+q}, der dem Producte der Facultät x^{n} mit der Potenz x^{p} zugehört, wird auch hier durch ein combinatorisches Integral, wie oben, gesucht und ganz unabhängig gefunden.

4. Proposals for publishing by Subscription a Globe of the Moon, by *John Russel*, R. A. d. i. Ankündigung einer Mondskugel, auf Subscription; von Joh. Russell, Mitglied der königl. Academie der Künste *).

Dieser Globus, das einzige Werk dieser Art, welches jemals dem Publicum unter die Augen gelegt worden, ist die Frucht einer vieljährigen anhaltenden Arbeit, und wird hoffentlich von einer

*) Diese, auf einem kleinen Foliobogen geglättet Papier zierlich gedruckte Ankündigung ist mir aus London zugeschickt worden. Der Titel dieser Anzeige ist bereits den Lesern des Archivs in einem der vorhergehenden Hefte mitgetheilt worden. Hier folgt der ausführliche Inhalt derselben. B.

einer Genauigkeit befunden werden, in welcher sie alle bisher erschienenen Mondcharten weit übertrifft.

Die Lage eines jeden Theils ist durch ein Mikrometer mit allem Fleiße bestimmt, und jeder Flecken mittelst wiederholter telescopischer Beobachtungen an dem Monde selbst nachgezeichnet worden. Jede durch ein gutes Telescop sichtbare Erhöhung und Vertiefung an der Mondscheibe ist abgebildet, und auf eine Art schattiret, daß man von der verhältnißmäßigen Höhe einen Begriff bekommt; auch ist jeder in der alleräußersten Schwankung oder Libration des Mondes sichtbare Theil so wohl nach der Breite als nach der Länge auf der Kugel angegeben.

Nach dem augenscheinlichen Nutzen einer genauen Abzeichnung des Mondes zu astronomischem Behufe, besonders bey Beobachtungen der Mondsinsternisse, kann eine solche nicht anders als sehr anziehend seyn, in sofern als sie einen authentischen Abriß der Ansicht dieses unsers Trabantens zu einer gewissen Zeit darstellet; denn obgleich seit der Erfindung der Fernröhre, an der Mondscheibe keine beträchtliche Veränderung bemerkt worden ist, so hat man doch starke Gründe zu vermuthen daß dieselbe nicht ganz unveränderlich sey, und leicht möglich kann ein Werk dieser Art in künftigen Zeiten sehr schätzbar werden. Von der Zierlichkeit der Ausführung hoffet man, daß sie der Genauigkeit der Zeichnung gleich kommen werde; und diese Arbeit dürfte den Bibliotheken und Kunstkammern nicht weniger als den Studierstuben der Gelehrten zur Zierde gereichen.

Hevelius, dieser fleissige Beobachter der Mondes-Phasen, empfahl schon am Ende seiner im J. 1647 herausgekommenen Selenographie sehr nachdrücklich ein Werk von der Art, als anjetzo dem Publicum vorgeschlagen wird; allein, so sehr dieser große Mann die Ausführung desselben wünschte, finden wir doch nicht daß irgend ein Versuch in dieser Absicht gemacht worden sey, bis im J. 1745 *), da, wie uns gesagt wird, eine solche Arbeit von dem vortreflichen Astronom Tobias Mayer angefangen, auch verschiedene Jahre hindurch fortgesetzt wurde.

*) Es heißt, La Hire, in Frankreich, habe eine Mondkugel verfertiget, welche aber nie öffentlich bekannt gemacht worden. Siehe de la Lande (Astronomie) Vol. III. S. 310 der 2ten Ausgabe. (Anm. des Verf.)

de *). Der Herausgeber seiner hinterlassenen Schriften bemerkt in Ansehung der im Vorhaben gewesenen Mondkugeln, daß die Nachkommenschaft einigen obwohl geringen Trost davon habe, daß „das Werk eigentlich nicht durch Mayers Tod ins Stecken „gerathen ist; denn dieser gelehrte Mann legte dasselbe schon „mehrere Jahre vor seinem Absterben bey Seite, theils weil „er mit andern Endeckungen beschäftiget war, theils aus Ur„sachen, welche nur wenige interessiren könnten; und wirklich sa„gen seine Freunde, daß es ihm selbst sehr mißfällig war, wenn „man sich nach seinen Mondskugeln erkundigte.“ (Opera ined.) Vol I. pag. 105. Appendix.

Nach der Empfehlung eines Hevelius, und den durch unbekannte Ursachen nicht vollendeten Bemühungen eines Tob. Mayers, darf man hoffen, das Publicum werde das ihm angebotene Werk seiner Unterstützung nicht unwerth finden, besonders wenn es in Absicht der Genauigkeit der Ausmessungen und der malerischen Wirkung der Zeichnung eine scharfe Prüfung der Kenner aushält. Allbereit haben sehr angesehene Männer dasselbe mit ihrer Ansicht beehrt, die Hülfsmittel, die dabey gebraucht worden, untersuchet, seine Wirkung betrachtet, und ihm ihren vollkommenen Beyfall gegeben. Die Methode, die dabey befolgt worden, nebst dem Apparatus, den Zeichnungen, den Diagrammen, und der Kugel selbst; von welchem allen die Grenzen dieses Blattes nicht erlauben eine umständliche Beschreibung zu liefern, kann man bey dem Verfasser in Augenschein nehmen. Derselbe wird auch den Liebhabern eine in Kupfer gestochene Probe wie das Werk ausgeführet wird, vorlegen **).

Die

*) Bericht von den Mondskugeln, welche bey der kosmographischen Gesellschaft zu Nürnberg verfertigt werden, durch T. Mayer. Zu finden in der Homännischen Officin 1750. — In Lamberts deutschen gelehrten Briefwechsel, 2r Band, S. 431 u. f. f. sind einige Briefe, welche Lambert mit Mayers würdigem Sohn, der jetzt Professor der Mathemathik in Erlangen ist, in den Jahren 1772, 73 gewechselt hat, aus welchen man ersiehet, daß von 14 Segmenten, die zu der Mondskugel bestimmt gewesen, 9 bereits gestochen waren, und Lambert sich angelegen seyn ließ, diese Arbeit an das Tageslicht zu bringen, welches aber doch unterblieben ist. Umständlicher handeln diese Briefe von der Mayerschen Mondscharte. B.

**) Eine solche Probe ist auf einem Quartblatte der mir zugeschickten Ankündigung beygefügt. Man siehet darauf eine ungefähr 2 Zoll ins Quadrat haltende Figur, und am Rande die Namen

Die Bedingungen.

Die Mondskugel, von zwölf Zoll im Durchmesser, wird mit der äussersten Richtigkeit verfertiget werden, und ein geübter Mann wird die Kugel eines jeden Subscribenten, mit ersten Abdrücken der zierlich in Kupfer gestochenen Segmente, höchst sorgfältig beziehen. Für diejenigen, welche sich unterzeichnen, ist der Preis fünf Guineen; wovon die Hälfte, zwey und eine halbe Guinee, beym Unterzeichnen, die übrige Hälfte beym Abliefern der Kugel, bezahlt wird.

Da das Gestell zu den Kugeln, nach der Subscribenten Belieben, auf verschiedene Weise, von Holz oder Messing, kann verfertiget werden, so ist nicht möglich den Preis desselben ganz genau anzugeben. Ein schickliches Gestell von Mahony-Holz wird nicht über eine halbe Guinee kosten.

Eins dergleichen von Mahony-Holz, aber mit einer von Hrn. Russel erfundenen graduirten Scale, die libratorischen Bewegungen nach der Breite und Länge anzuzeigen, nebst der horizontalen Neigung, welche den Anblick des Mondes unter allen Umständen darstellt, jedoch so, daß der gemeinschaftliche Mittelpunct allezeit dieselbe Lage behält: — ein solches Gestell wird nicht über Eine und eine halbe Guinee kosten.

Unterzeichnungen nehmen für den Autor an; *G. Adams*, Mathematical Instrument-Maker to his Majesty, Fleet-Street; *P. Elmsly*, Bookseller, Strand; *I. Edwards*, Bookseller, Pall-mall; und *W. Faden*, Geograher to his Majesty, and to his R.H. the Prince of Wales, charing-Cross.

men der fünf vornehmsten darinn befindlichen Mondsflecken: Ptolemaeus, Hipparchus, Alphonsus, Albategnius und Arzachel. Zeichnung und Stich sind vortreflich. Auch in Kupfer gestochen ist dabey eine kurze Englische und Französische Anzeige, daß dieses ein Stück der Mondsfläche mit den obbenannten Flecken nach des Riccioli Benennung sey, welches dienen soll, von der Weise, wie die Flecken auf der von Joh. Russell angekündigten Mondskugel gezeichnet und gestochen worden, einen Begriff zu geben. Dabey die (weiter unten vorkommenden) Adressen, wo die Ankündigung ausgegeben werde. B.

XIII.

Auszüge aus Briefen, verschiedene Nachrichten und Anzeigen.

---

1. Aus einem Briefe des Herrn Obristwachtmeisters von Zach.

Seeberg, den 27. März 1796.

Ich habe die Ehre Ew. — hier beyliegend die Elemente der Bahn des im November 1795 auf der königl. Sternwarte zu Berlin entdeckten neuen Kometen zu überschicken; ich habe sie aus den Beobachtungen des Herrn Prof. Bode, und aus jenen des Herrn Dr. Olbers in Bremen, nach der de la Placeschen Methode, berechnet. Da ich anfänglich nicht mehr als vier Beobachtungen hatte, so war keine Auswahl zu treffen; ich legte sie daher sämtlich zum Grunde, machte den 18ten November zur Epoche, und leitete daraus vorläufig den Abstand der Sonnen-Nähe und die Zeit des Durchgangs durch dieselbe her. Diese zum Grunde gelegten Beobachtungen waren folgende:

1795 Novemb. mittl. Zeit in Gotha	Beob. geocentr. Länge				Beob. geocent. Breite			
13, 343749	9Z	17°	42′	45″	51°	31′	47″	Nördl.
15, 305554	9	10	10	48	47	52	11	
18, 284722	9	1	55	2	41	59	42	
22, 266666	8	23	53	20	34	18	5	

Hieraus ergaben sich nachstehende drey Hauptgleichungen:

$$1)\ r^2 = 1,810443 \cdot x^2 - 1,608512 \cdot x + 0,9753854$$

$$2)\ y = -0,1270962 + \frac{0,1224326}{r^3} + 3,044114 \cdot x$$

$$3)\ 0 = y^2 + 5,479715 \cdot x^2 + (0,9002462 \cdot y - 3,657406 \cdot x)^2 - 1,1564542 \cdot y + 3,844037 \cdot x + 1,025236 - \frac{2}{r}.$$

Obgleich im Grunde die de la Placesche Methode keine andere, als die des Newtons ist (Principiorum, Libr. III. Prop. XLI. Probl. XXI.) so erleichtert doch die analytische Form, in welche sie Herr de la Place übersetzt hat, die Rechnung ungemein, und gewährt noch besonders den Vortheil, daß man bey Auflösung der höhern Gleichungen, die reellen und positiven Wurzeln sogleich erkennen kann. Denn, obgleich in den obigen drey Hauptgleichungen nur drey unbekannte Größen vorkommen, und man daher glauben sollte, daß diese

diese drey Gleichungen zu ihrer Bestimmung hinlänglich wären, so sind sie aber dennoch erst aus der Entwickelung anderer Gleichungen von einem höheren Grad entstanden, und der Werth von x könnte mehrere wirkliche und positive Wurzeln haben. Um sich also von dem wahren Werthe zu versichern, dient eine Versicherungsgleichung, die denselben, oder beynahe denselben Werth für y geben muß, den obige Gleichung (2) gegeben hat, wenn für x der wahre Werth getroffen worden. Diese Verificationsgleichung ist im gegenwärtigen Fall:

$$4)\ y = 2,5706568\, x + \frac{0,0989811}{r^{3}} - 0,1037514.$$

Diese Gleichungen gehörig entwickelt, geben nachstehende Werthe

$x = 0,1897991$ $r = 0,8151960$ $y = 0,9827583$

woraus für den Logarithmen des genäherten Abstands vom Perihelio folgt Log. 9,2716911, und für die zustimmende wahre Anomalie 229° 45' 1",5. Hieraus ergiebt sich, mit Zuziehung der allgemeinen parabolischen Kometentafel, daß der Komet, zur Zeit der angenommenen Epoche (den 15ten Novemb.) das Perihelium noch nicht erreicht, sondern davon noch 25 Tage 17 Stunden 50 Min. 9 Sec. entfernt war, welches den genäherten Augenblick seines Durchgangs durch die Sonnennähe giebt, den 14ten Decemb. 1795 um 0 Uhr 55' 3".

Hat man einmal eine vorläufige Kenntniß der Elemente einer Kometen-Bahn, so hat man verschiedene Mittel, sie nachher durch entfernte Beobachtungen zu verbessern. Man darf alsdann nur zwey Bestimmungsstücke der Bahn nach Willkühr wählen, dieselben etwas verändern, und die Beobachtungen nach diesen neuen veränderten Hypothesen berechnen, so wird das Gesetz der Unterschiede zwischen der Berechnung und der Beobachtung sehr leicht die wahrhaften Veränderungen zu erkennen geben, die man mit diesen gewählten Bestimmungsstücken vorzunehmen hat. Obgleich es ziemlich einerley scheint, welches Paar Elemente man zu dieser Verbesserung gebraucht; so findet doch Herr de la Place, daß die Rechnung kürzer, leichter und einfacher wird, wenn man hiezu den Abstand vom Perihelio und die Zeit des Durchgangs wählet. Allein, so ganz gleichgültig ist diese Auswahl dennoch nicht; denn es kann der Fall, wie bey gegenwärtigem Kometen, eintreten, wo diese Methode ganz und gar nicht anwendbar ist. Nimmt man die Variationen mit dem Abstand, und der Zeit des Durchgangs durchs Perihelium vor, so muß man, nach diesen verschiedenen Hypothesen die heliocentrische Längen und Breiten des Kometen berechnen.

Fügt es sich nun, wie hier der Fall wirklich, den 15ten Novemb. war, daß der Winkel am Kometen sehr nahe bey 90° ist, so läßt sich daraus die heliocentrische Länge gar nicht wohl herleiten. Denn erstlich, bleibt es zweifelhaft, ob dieser Winkel stumpf oder spitz genommen werden soll. Zweytens, da sich in dem ebenen Dreyeck, wo nur zwey curtirte Distanzen und ein gegenüber stehender Winkel gegeben sind, der Winkel am Kometen sich nicht anders, als durch einen Sinus ergeben kann; so steht dieser Winkel gar nicht scharf zu erhalten

halten, weil sich die Sinus sehr wenig bey 90° ändern. Bisweilen erhält man wohl gar einen imaginären Werth dafür, wie mir solches bey einer Hypothese nach einer nur sehr geringen Veränderung des curtirten Radii vectoris begegnet ist. Um daher solchen ungünstigen Umständen auszuweichen, muß man diesen Winkel nicht aus den Distanzen rechnen, sondern ihn selbst, oder auch den Winkel an der Sonne, voraussetzen und ändern, und solchergestalt aus Hypothesen für den Commutationswinkel, nebst der bekannten Elongation, und einer Distanz, diesen Winkel berechnen; öfters wird es nothwendig ganz andere Bestimmungsstücke vorauszusetzen. So ist z. B. bey Kometen, die eine viel stärkere scheinbare Bewegung in der Breite als in der Länge haben, rathsam, die Hypothesen mit der heliocentrischen Breite vorzunehmen. Derselbe Fall, wie hier bey dem gegenwärtigen Kometen, ist Bailly bey der Berechnung der Bahn des berühmten Halleyschen Kometen, vom Jahr 1759 vorgekommen. Man sehe Memoires présentés, Tome V. p. 17. Auch beym Kometen von 1757 konnte dieser Fall statt finden. De la Lande théorie des Cometes in tables de Halley, Tome II. p. 115.

Nach einigen Hypothesen, die der sehr geschickte und fleißige Herr Burckhardt aus Leipzig, der sich jetzt, die praktische Sternkunde zu üben, in Gotha aufhält, berechnet hat, ergeben sich nachfolgende Elemente der Bahn, wozu noch nachstehende drey Beobachtungen des Herren Doctor Olbers gezogen worden.

1795 Novemb. M. Z. in Gotha				Beob. geocent. Länge				Beob. geocent. Breite			
21.	Nov.	7U	27′	8Z	25°	21′	7″	36°	15′	1″	Nördl.
22	"	6	43½	8	23	35	19	34	27	10	
27	"	5	42½	8	16	25	20	26	4	54	

Elemente der Bahn des Kometen vom Jahr 1795.

Abstand von der Sonnennähe		0, 22662			
Zeit des Durchgangs durch dieselbe den					
15. Decemb. 1795.		0U	49′	8″	M. Z. zu Gotha
Ort des Knoten	11Z	29°	11	45	
Neigung der Bahn		24	16	45	
Ort der Sonnennähe	5	13	36	40	
Bewegung		vorwärts.			

Dieser Komet ist der 84ste berechnete, seine Elemente stimmen aber mit keinem der vorhergehenden; er war sehr schwer zu beobachten, da er nur als ein kleiner Nebelfleck sehr schwach und unbegränzt erschien. Herr Bouvard entdeckte ihn erst den 14ten Novemb. seiner Seits auf der Sternwarte der Republik zu Paris.

1. Astro-

5. Astronomische Nachrichten aus verschiedenen Briefen des Herrn la Lande, Director der Sternwarte der Republik, an Herrn Obristwachtmeister von Zach in Gotha.

Paris, den 22. Novemb. 1795.

Die Connoissance des temps für 1796 ist endlich erschienen, und an der für 1797 wird jetzt gedruckt; ein Verzeichniß von 1000 Abweichungen von meinen Circumpolarsternen wird darinn erscheinen. Ich habe die philosophischen Transactionen für 1795 gesehen, worinn eine Abhandlung des Hrn. Herschel über Sonnenflecken stehet. Er behauptet, sie wären in der Vertiefung, ich bin immer noch der Meynung, daß sie auf der Oberfläche, oder auch darüber sind. Hr. Mechain arbeitet noch immer an seiner Gradmessung in der Gegend von Carcassone, und Hr. de Lambre in der Gegend von Bourges. Letzterer geht jetzt nach Dünkirchen, um die Breite daselbst, durch eben dieselben Sterne zu bestimmen, deren sich Hr. Mechain vor 3 Jahren zu Barcelona bedient hatte. *)

Das Institut national der Wissenschaften wird nunmehro ganz organisirt, das Bureau de Longitude ist in seiner vollen Thätigkeit, und wir werden jetzt von den Ministern eben so gut aufgenommen und begünstiget, als wir es vorher von den Comiteen waren. Wir haben also nichts durch die Veränderung der Regierung verlohren. In der Sternwarte der Republik werden große Verbesserungen vorgenommen, die Bibliothek ist sehr bereichert, und zwey neue Observatores, Hr. Bisso und der Sohn des Hrn. Mechain sind dabey angestellt worden. Hr. Bouvard hat den 14. Novemb. einen Kometen, nahe an der Hand des Herkules endeckt, er hat ihn aber bisher nur ein einzigesmal beobachten können. Er ist von der Größe des Nebelflecks in der Andromeda, und unser 84ter Komet **). In dem Magasin encyclopedique werden Sie meine Geschichte der Astronomie für 1795 finden, wie auch die Lobreden auf Lavoisier und Condorcet, als Physiker und Geometer. Ich war wohl gezwungen es zu thun, da niemand diese Pflicht übernehmen wollte, obgleich es ihre Freunde versprochen hatten, und es besser zu machen im Stande gewesen wären.

*) Herrn Mechain's astronomische Beobachtungen in Catalonien, zu Barcelona und Figueras in den Jahren 1792, 93, 94 angestellt, findet man in den Mayländer Ephemeriden auf das Jahr 1795 und in dem Berliner Jahrbuch 1797. S. 230. Der ganze Bogen des durch ganz Frankreich gemessenen Meridians von Barcelona, am mittelländischen Meere bis Dünkirchen an der Nord-See beträgt 9° 39′ 22″, 5.

**) Es ist derselbe Komet, der schon den 11. Novemb. auf der königl. Berliner Sternwarte zwischen der Leyer und dem Halse des Schwans entdeckt wurde.

Ich habe endlich die 6 Exemplare der Berliner Ephemeriden des Hrn. Bode für 1796 erhalten, sie waren ein ganzes Jahr unterweges, allein, um sie für den Preis eines Reichsthalers zu verkaufen, müßte man 130mal mehr in Assignaten dafür geben, welches nicht angehet, denn die Bücher sind nicht so, wie das Geld, gestiegen.

Paris, den 13. Jenner 1796.

Die Elemente der Kometenbahn, die Sie berechnet haben, haben mir viel Vergnügen gemacht; Bouvard, der ihn endeckte, hat ihn gleichfalls, unter der Leitung, und nach der Methode des Hrn. de la Place berechnet, allein er ist in seiner Rechnung noch nicht weit vorgerückt. Ich hatte die Berechnung dieser Bahn dem Hrn. Pingré vorgeschlagen, allein er geht nun in sein 83tes Jahr, und hatte Mühe sich zu einer solchen Arbeit zu entschließen. Ich für meinen Theil bin zu sehr mit meinen 32,000 Sternen beschäftiget. Die Geometer haben Hrn. de Lambre beym Institut national in ihre Classe aufgenommen, damit ich Platz behielt, alle Astronomen der vormaligen Akademie der Wissenschaften, die älter, als er waren, unterzubringen, deswegen kam er auch nur in das dritte Drittel. *) Die Lobrede auf

*) Die Pariser Akademie der Wissenschaften, die vor 130 Jahren durch Colbert gestiftet wurde, und seit 4 Jahren durch den Vandalismus unterbrochen ward, wurde den 6. Decemb. 1795 unter dem Namen eines Institut national auf Befehl des vollziehenden Directoriums von dem Minister der inneren Angelegenheiten, dem Bürger Benezech (Sohn eines protestantischen Predigers in Languedoc) auf das feyerlichste in ihren vormaligen Saal im Louvre wieder installirt. Die Wiederherstellung dieser gelehrten Gesellschaft hat man hauptsächlich dem glühenden Eifer für Wissenschaften, und der thätigen Betriebsamkeit des Hrn. de la Lande zu verdanken, der sehr nachdrücklich von den Volks-Repräsentanten Lakanal und Calon, Director des Depot für den Krieg zu Land und zur See, unterstützt wurde. Dieses Institut bestehet aus 144 Mitgliedern, das Directorium ernannte aber nur 48 derselben, meist von der vormaligen Akademie der Wissenschaften, diese mußten die übrigen wählen. Diese gelehrte Gesellschaft bestehet daher aus drey Drittel, jedes Drittel hat wieder zwey Classen. In dem ersten Drittel sind die Geometer, La Grange und La Place, die Astronomen La Lande und Mechain. Im zweyten Drittel die Geometer Borda und Bossut, die Astronomen Le Monnier und Pingré, und im dritten Drittel die Geometer Le Gendre und De Lambre, und die Astronomen Meßier und Cassini. Der Präsident wird alle 6 Monate, die Sekretairs alle Jahre neu gewählt. Jede Klasse versammelt sich zweymal in der Decade, die Sitzungen müssen alle öffentlich seyn. Das ganze Institut versammelt sich jedem Quintidi der ersten Decade eines jeden Monats, und die vier öffentlichen Sitzungen des ganzen Instituts werden den 15. Vendemiaire, Nivose, Germinal und Messidor gehalten (den 7. Octob., 6. Decemb., 4. April, 3 July)

uf Lavoisier ist in dem Magazin encyclopedique, und jene auf Condorcet im Mercure françois abgedruckt; ich schicke sie Ihnen beide. Es t zu verwundern, daß Niemand solchen außerordentlichen Menschen iesen gerechten Tribut hat zollen wollen, und ich war verbunden, für e zu thun, was ich nur für Astronomen zu thun den Beruf habe.

Es hat mich sehr erfreuet zu hören, daß mein Eleve, Hr. Henry, ch in St. Petersburg befindet, und noch immer für die Astronomie rbeitet *). Das Verzeichniß der Cassinischen Schriften hatte mir r. Prof. Allamand auf meiner Reise in Holland im Jahr 1774 geiehen, es wurde nachher in Paris von Cassini IV abgeschrieben, daer kommt es, daß Sie eine Note von meiner Hand darinn gefunden aben. Ich ersuche Sie eine Nachricht von dieser Sammlung irgendo bekannt zu machen **). Bissy ist ein junger Adlicher, ein Baron, er seit einigen Monaten auf der Sternwarte der Republik arbeitet; llein er hat, so wie auch der junge Mechain, noch nicht den Platz ines Adjunkten, wir wollen, daß sie im Observiren erst besser geübt yn sollen. Eben bringt mir Bouvard die Elemente der Kometenahn, allein sie stimmen nicht zum besten mit den Beobachtungen,

3. July). Die Reglemens dieser gelehrten Gesellschaft sind hauptsächlich von Hrn. Borda entworfen, und von dem gesetzgebenden Corps, dem Rath der fünfhundert, den 30 Ventose (20. März 1796) einstimmig genehmigt worden.

*) Dies bezieht sich auf eine Nachricht, die ich von Hrn. Albert Euler in Betref des Hrn. Abbé Henry erhalten hatte; der Hr. Abbé ist nemlich als Hofmeister bey den beyden Prinzen von Kurland in St. Petersburg angestellt, die Kayserl. Akademie der Wissenschaften hat ihn unter die Zahl der Associés libres aufgenommen, und er hat dieser gelehrten Gesellschaft mehrere astronomische Abhandlungen vorgelegt, die in ihre Commentarien eingerückt werden sollen.

**) Die Sammlung, von der hier die Rede ist, wurde aus des seel. Professor Allamands Bücher-Auction in Leyden erstanden, und enthält mehrere seltne Schriften und Abhandlungen des berühmten Dominic Cassini. Ich vermuthete, daß es wohl gar das Exemplar seyn könnte, von dem Herr de la Lande im III. Theil seiner Astronomie, Art. 3345 Meldung macht. Was mich auf diese Vermuthung führte, war, daß ich darinn eine von Hrn. de la Lande eigenhändig beygeschriebene Note fand. Hier erklärt nun Hr. de la Lande auf meine Anfrage, wie seine Note in das Exemplar gekommen ist. Die seltnen Abhandlungen, von denen Herr Oberamtmann Schröter in seinen Beyträgen zu den neuesten astronomischen Entdeckungen, S. 119 sagt, daß er bis jetzt noch keine einzige in öffentlichen Bibliotheken gefunden habe, sind sämtlich darinn enthalten. Eine Nachricht von dieser Sammlung, auch Auszüge daraus, erschienen in des Hrn. Professor Voigt's Magazin für das neuste aus der Physik, und Naturgeschichte im 4ten Stück des Xten Bandes.

er hatte nur sehr wenige und diese schlecht. Meine Nichte reducirt alle Monate 200 Sterne, obgleich bey jedem 30 Operationen zu machen sind, und sie haben einen großen Haushalt zu führen hat. Ich habe Ihre Bedeckung des Jupiters und auch jene, die zu Göttingen beobachtet worden, berechnet, sie stimmen vortrefflich. Die wahre Zusammenkunft fand ich 7U 5′ 45″ Diff. der Breite 41′ 31″
und 7 2 18 „ „ „ 41 32

Mittags = Unterschied zwischen
Seeberg 3 27 und Göttingen.

Ich habe diese Beobachtungen diesen Morgen berechnet, meine Methode ist expeditif. Wir haben von Hrn. Beauchamp Nachricht erhalten, er ist den 22. Decemb. in Venedig angekommen, und wird seine Küsten da erwarten, um sich nachher nach Constantinopel einzuschiffen, und den nördlichen Theil des schwarzen Meeres zu bestimmen. Er ist von Hrn. Toaldo zu Padua gut aufgenommen worden, aber Hrn. Cagnoli hat er nicht gesehen, obgleich er in Padua war, welches mich gewundert, denn ich vermuthete ihn zu Verona, allein er beobachtet nicht mehr wegen seiner schlechten Gesundheit. De Lambre ist jetzt in Dünkirchen, und wartet da auf helles Wetter, um die Breite dieses Orts zu bestimmen. Seit zwey Tagen war es so schön, daß ich hoffe, daß er die Polhöhe von Dünkirchen bereits wird erhalten haben, es ist schon hinlänglich, wenn er nur einen, oder zwey Sterne beobachtet, die Mechain zu derselben Bestimmung in Barcelona gebraucht hat, sein ganzer Kreis gewährt die Genauigkeit von einer Secunde, wenn er 20 Beobachtungen vor und nach der Kulmination erhalten kann. Das Bureau de Longitude betreibt jetzt mit vielem Eifer die Errichtung zweyer Sternwarten, die eine zu Brest, die andere zu Toulon. Rochon wird die Direction jener zu Brest, und D'Angos von Toulon übernehmen, dieser letztere ist dermalen Bibliothekar zu Tarbes, allein er wird nun bald wieder der Astronomie nützlich werden.

Wir haben sehr schöne meteorologische Tabellen zugeschickt erhalten, von einem Hrn. Maurice, Sekretair der Künste zu Geneve, allein es würde sehr hoch zu stehen kommen, wenn man sie in Kupfer stechen wollte. Die Schiefe der Ekliptik durch ganze Kreise des Hrn. Mechain und Piazzi bestimmt, scheint mir 3 Secunden kleiner zu seyn, als ich sie in meinen Tafeln angenommen habe, ich werde sie auch so in der Conn. d. temps von 1797 gebrauchen. Unsere Beobachtungen von 1790 — 93 werde ich gleichfalls da einrücken lassen, weil unsere Memoiren des Institut national doch nicht so bald erscheinen werden. An der neuen Ausgabe des Montucla wird zwar gedruckt, allein der Verfasser wohnt in Versailles, und das Werk wird in Paris gedruckt, dies verzögert die Arbeit etwas. Das Werk des Hrn. Dupuis über den Ursprung der Religionen durch die Astronomie ist erschienen. Drey Viertheile des ersten Bandes der Uebersetzung von Euler's Introductio in Analysin infinitorum durch Hrn. Abbe' ist abgedruckt, so wie auch die Hälfte der Historie céleste du 17. Siécle von Pingré, es fehlt an Arbeitern, und an Papier, der Friede wird allem abhelfen. Wenn Ihnen einige neue Beobachtungen über

Ebbe

Ebbe und Fluth bekannt sind, so bitte ich, mir solche anzuzeigen, ich habe Lust mein Werk über Ebbe und Fluth umzuarbeiten und vollständiger zu machen. Borda beschäftiget sich mit äusserst genauen Versuchen über Strahlenbrechung, sowohl in der Luft, als auch im luftleeren Raum. Ich beschäftige mich jezo sehr mit Glocken, und habe schon viele Untersuchungen darüber angestellt, ich ersuche Sie aber, mir die wahren Maaße der berühmten Erfurter Glocke zu schicken, was Kircher davon sagt, ist unvollständig. Auch wenn Sie Hrn. Euler nach St. Petersburg schreiben, so ersuchen Sie ihn doch um die Maasse der großen Moscower Glocke. Man behauptet, daß sie 20,000 Pfund schwer sey. Das ist unmöglich, die zu Rouen wog nur 36 tausend Pfund *).

Paris,

*) So abentheuerliche und unglaubliche Beschreibungen man auch von dieser Glocke hat, wie z. B. jene des Berkenmeyers, der ihr in seinem Antiquario S. 672 ein Gewicht von 3940000 Pfunden giebt, so gewiß ist es, daß diese Glocke, von dem ungeheuern Gewichte ist, das Hr. de la Lande selbst noch in Zweifel zieht. Die Maasse derselben findet man beym Tannerus in seiner Legatione Polono-Lithuanica in Moscoviam, Norimberg. 1689. Cap. 13 p. 61. Adam Olearius legt ihr in seiner Moscowitischen und Persischen Reisebeschreibung ein Gewicht von 3560 Zentner bey. Hr. Professor Albaum in seinen Anmerkungen zu des Hrn. Geheimenrath von Beausobre's Politik, Riga 1773 S. 237 sagt, daß sie 4000 Zentner wiegt. In Hanway's Reisen durch Rußland und Persien, Hamb. 1754 findet man ebenfalls eine genaue Beschreibung und Zeichnung dieser großen Glocke. Den größten Glauben verdient aber wohl der Augenzeige, Wilhelm Coxe, der erst im Jahr 1778 eine Reise durch Pohlen, Rußland, Schweden und Dännemark gemacht hat. Er beschreibt sie im Iten Band seiner Reisebeschreibung S. 216 der deutschen Uebersetzung von Pezzel, Zürch 1785, und giebt ihr ein noch größeres Gewicht, als das Hr. de la Lande Mühe hat zu glauben, nemlich 4320 Zentner, Hr. Coxe setzt aber auch hinzu, daß ihre Größe so ungeheuer ist, daß er die bloße Beschreibung davon nicht würde geglaubt haben, wenn er sie nicht selbst gesehen, und genau gemessen hätte.

Von der Erfurter großen Glocke, Maria Gloriosa, findet man selbst in des Hrn. von Falkenstein's Civitatis Erfurtensis Historia critica et diplomatica. Erf. 1739. S. 441, sehr verschiedene Angaben; ich habe sie daher selbst gemessen, und ihren Umfang gefunden 24 französ. Fuß 7 Zoll, den Durchmesser von den äussersten Rändern 7 Fuß 10 Zoll. Die untere Dicke 10 Zoll, Länge des Klöppels 4 Fuß, sein Gewicht 11 Zentner, das Gewicht der Glocke 275 Zentner. Der Ton, S Orgelton oder F Kammerton; sie wird von 16 starken Personen geläutet. Kircher versichert, man höre sie 4 Meilen weit, allein in Gotha, 3 Meilen von Erfurt, hat man keine Tradition, daß diese Glocke je da gehört worden, dagegen wir sehr deutlich bey stillem Wetter,

oder

Paris, den 31. Jenner 1796.

De Lambre hat bereits in Dünkirchen sieben schöne Beobachtungstage gehabt, er hat die Breite des Thurms gefunden 51° 2′ 10″ statt 11″, wie die alte Messung gab. Er wird nun bald von da abreisen, und seine Triangel-Reihe gegen Mittag von Bourges fortsetzen. Er hat deren 27 bis nach Carcassone; er, und Mechain, werden diesen Sommer fertig, sie hoffen auch die Grundlinie von 6000 Toisen bey Melun zu messen, wo man Pyramiden, um ihre Endpuncte zu bezeichnen, errichten wird *). Den 24ten dieses habe ich Ihnen durch Hrn. Barthelemi die Lobrede auf Condorcet zugeschickt **). Ich habe

oder einem kleinen Ostwinde, die Kanonen hören, die auf den Wällen von Erfurt gelöst werden. Bey dieser Gelegenheit bestimmte ich mittelst meines Metre's und micrometrischen Stangenzirkels das Verhältniß des Pariser Fußes zur Erfurter Elle, und fand es wie 1440 zu 2516.

*) Herr Prony wird diese Pyramiden, die eine zu Lieursaint, und die andere zu Melun, zur immerwährenden Bezeichnung der Standlinie erbauen; die Engländer bezeichneten die Endpunkte ihrer bey Hounslow-Heath vom General Roy im Jahr 1787 und von den Herren Williams, Mudge und Dalby im Jahr 1791 wiederhohlt gemessene Standlinie, mit vertikal in die Erde eingegrabenen schweren eisernen Kanonen.

**) Diese Lebensbeschreibung Condorcet's erhielt ich erst im März 1796 mit vielen Vermehrungen, Zusätzen, und handschriftlichen Noten des Hrn. de la Lande begleitet. Sie ist in No. 21 des Mercure françois von 30sten Nivose (20sten Januar 1796) abgedruckt, und nimmt 22 Octavseiten ein; vielleicht erscheint eine deutsche Uebersetzung davon. In einem Schreiben beklagt sich Hr. de la Lande, daß er gar keine Materialien und Nachrichten über diesen Gelehrten, weder von seiner hinterlassenen Wittwe, noch von seinem vertrautesten Freunde, den Deputirten Sieyes, habe erhalten können, man hoft aber, daß Garat eine sehr umständliche Lebensbeschreibung herausgeben wird. Hier nur einige Haupt-Momente aus seinem Leben. Johann Anton Niklas Caritat von Condorcet, ward den 17ten September 1743 zu Ribemont in der Picardie aus einem altadelichen, schon im 10ten Jahrhundert bekannten Geschlechte gebohren. In einem Alter von 15 Jahren kam er 1758 nach Paris, um im College de Navarre seine Studien zu machen, nach deren Vollendung er wieder in seine Heymath kehrte. Im Jahre 1762 kam er wieder nach Paris. Den 8ten März 1769 ward er in die Akademie der Wissenschaften aufgenommen, und den 10ten Juny 1773 ward er ihr Sekretair. Gegen Ende des Jahres 1786 vermählte er sich mit einer jungen Chanoinesse Marie Louise Sophie de Grouchy. Den 1ten October 1791 wurde er zur Assemblée nationale gewählt, und im Februar 1792 war er ihr Präsident. Den 8ten July wurde eine Verhaftnehmung durch die Robespierrische Terroristenparthey

abe Ihre Beobachtung des Planeten Herschel vom 23. Novemb. 1795 rechnet und den Fehler der Tafeln in der Länge — 10″ und in der Breite + 11″ befunden, welches die Vermuthung bestätiget, die ich und de Lambre gehabt haben, daß die Neigung 46′ 26″ und nicht 5′ 16″ ist, wie in den Tafeln vorausgesetzt worden. Im Monat März war der Fehler der Tafel — 5″ in der Länge, dies beweist, daß der Radius vector gut bestimmt ist; dies beweist auch, daß Ihre beobachtete Abweichungen gut sind, obgleich Sie weder den Mauerquadranten, noch Ihren ganzen Kreis von Ramsden haben. Es waren doch die Maskelynischen Beobachtungen, die diesen Irrthum in der Neigung dieser Planetenbahn verursacht haben, meine Beobachtungen erforderten gleichfalls eine größere Neigung *). Es hat mir

they decretirt, und er den 28ten desselben Monats als Verräther des Vaterlandes für vogelfrey in die Acht erklärt.

Condorcet hielt sich einige Monate in Paris, in dem Hause einer großmüthigen Frau, der Wittwe de Vernet, die ihn nicht kannte, verborgen; als man aber im März 1794 die Haussuchungen befürchtete, verließ er seinen Zufluchtsort, er brachte die erste Nacht unter freyem Himmel in der Ebene von Montrouge zu; den andern Morgen suchte er seinen alten Freund und Mitbruder bey der Akademie Suard in Fontenai auf. Unglücklicherweise war dieser auf zwey Tage nach Paris gegangen. Condorcet brachte sie, die eine Nacht in einem Steinbruch, die andere unter einem Baum auf freyem Felde zu, am dritten Tage traf er seinen Freund. Er hatte in 24 Stunden nicht gegessen, er war ganz hinfällig, leidend, und hatte eine Wunde am Fuß. Nachdem er etwas Nahrung zu sich genommen hatte, wurde verabredet, daß er sich wieder wegbegeben soll, damit die Dienstleute im Hause von diesem gefährlichen Geheimniß nichts argwohnen mögten, und daß er in der Nacht wiederkommen sollte, wo ihn sein Freund ganz allein empfangen, und mit mehr Sicherheit im Hause verbergen könnte. Er irrte also diesen Tag über auf den Feldern bey Clamar unter Meudon herum, den 27ten März wagte er es, in ein Wirthshaus zu gehen, wo er sich Eyer geben ließ. Sein langer Bart, sein seltsamer Anzug, machten ihn einem Mitglied des Comité revolutionaire von Clamar verdächtig, der nach seinem Paß frug, und da er diesen nicht verweisen konnte, ihn zwang nach dem Comité zu kommen, von wo er nach dem District Bourg-la-Reine gebracht wurde. Er kam daselbst zu spät an, um verhört zu werden, er wurde daher in ein Gefängniß unter dem Namen Peter Simon gebracht. Den 28sten März 1794 fand man ihn da todt. Von seinen noch ungedruckten wissenschaftlichen Schriften sind noch vorhanden, ein großes ausführliches Werk über die Integralrechnung, wovon im Jahr 1785, 128 Seiten gedruckt worden, und ein Traité élémentaire d'Arithmétique. Von beiden besitzt die Wittwe die vollständigen Handschriften. Condorcet verließ die Wissenschaften nie, und de la Lande versichert, daß er mitten unter den heftigsten Revolutionscrisen analytische Abhandlungen von Euler las, und selbst über schwere Integrale arbeitete.

*) Man sehe meine Beobachtungen des Gegenscheins dieses Planeten im Jahr 1796 in dem Berliner astronomischen Jahrbuche für das Jahr 1799.

mir viel Vergnügen gemacht, das Berliner Jahrbuch für 1798, und den 2ten Supplementband zu erhalten, man hat diese Bücher in Basel auf die Post gegeben, und sie haben mich 320 Livres Porto gekostet, allein auf Geld reducirt, beträgt es sehr wenig, ich habe noch etwas baares Geld (Numéraire) ich kann es nicht besser als dazu verwenden. Die Abhandlung des Hrn. Herschel, die im 2ten Supplementband abgedruckt ist, ist auch ins Französische übersetzt worden, und stehet in dem Journal, Décade philosophique. Ich habe darauf geantwortet; Herr Herschel wiederhohlt vier bis fünfmale, daß die Sonnenflecken ganz zuverläßig unter dem Niveau der Oberfläche der Sonne wären, allein wie er sich davon versichert hat, sagt er nicht. Man hat gesehen, wie sehr große Flecken einen Ausbruch, oder so zu sagen eine Scharte am Rand der Sonne gebildet haben, dies hätte ja nicht Statt haben können, wenn die Flecken unter der Oberfläche der Sonne gewesen wären!

Ich habe erwiesen *), daß große Flecken auf einem und demselben physischen Punkt der Sonnenscheibe erschienen sind, Hr. Herschel erwähnt nichts davon, und es sollte ihm auch schwer werden, es zu erklären. Wie schreibt man Leipzic. Dantzik, Witemberg, nach der wahren deutschen Rechtschreibung? Ich liebe die Genauigkeit in diesem Punkt gar sehr, die Ausländer werfen uns diese Vernachläßigung oft vor, ich werde mir dagegen Mühe geben, zu erforschen, ob Gassendi sich Gassand genennt hat. **) Schicken Sie mir doch Ihre Längen-, Getraide- und Wein-Maaße aus Ihrer Gegend, mit Ihren deutschen Namen, ich habe die von Mannheim mitgebracht, man hat mir aber mein Tagebuch unter Weges gestohlen. Jedes Mitglied des Institut national soll einen Gehalt von 1000 Miriagrammes Getraide bekommen, oder 1000 Scheffel, davon jeder 20 Pfund wiegt, dies macht ungefähr 2000 Livres nach vormaliger Münze. Unsere Versammlungen im Institut national fangen an interessant zu werden. Man hat schon mehrere wichtige Abhandlungen vorgelesen. Ich habe eine neue Bestimmung der Merkurs-Bahn gegeben, die nur wenig von meinen Tafeln abweichet, denn 45 Sek. Vermehrung in der Mittelpunkts-Gleichung, machen nie mehr als 10″ für den geocentrischen Ort. Sie werden es in der Conn. d. temps für 1797 finden. Hr. Wurm, der so schöne Berechnungen über die Bedeckung Jupiters den 7ten April 1792 gemacht hat, sollte wohl noch folgende Beobachtungen nach denselben Elementen hinzufügen.

	in Mayland	in Rom	in Palermo
Eintr. des I Randes	10U 40′ 55″ ...	10U 57′ 18″	Mittelpunkt 11U 2′ 20″
des II „	10 42 32 ...	10 58 56	
Austr. des I „	11 51 18	12 11 42	Mittelpunkt 12 20 22
II „	11 52 57	12 13 21	

Schlagen Sie ihm doch diese Rechnung vor, mit vielen Empfehlungen von mir. Der Winter ist so gelinde, daß der Therometer öfters

*) In den Memoiren der Pariser Akademie der Wissenschaften, Jahr 1776 S. 393 und Jahr 1778 S. 457.

**) Dies hat auf eine Anfrage von mir Bezug, ob Gassendus oder Gassendi nicht etwa der lateinische, Gassand hingegen der wahre französische Name dieses berühmten Astronomen sey, da ihn sein Zeitgenosse, der französ. Jesuit Fournier in seiner Hydrographie nie anders als Gassand schreibt.

tets + 9° ist. Der Atlas von Flamsteed von mir und Mechain ist schienen *).

Paris, den 12. Febr. 1796.

Ich bin, wie Sie wissen, bey der hier errichteten Commission egen der Meeres-Länge (bureau de longitude) mit angestellt **). lein Nefe, der mir bey der Sternwarte à l'Ecole militaire adjungirt

*) Diese Ausgabe der Flamsteedischen Himmelskarten, ist nun in Paris bey dem Herausgeber La Marche in der rue du Foin St. Jaques im Collége de Gervais für 15 Livres im baaren Gelde zu haben, sie wird aber mit Unrecht die dritte Ausgabe genennt, da sie im Grunde nur die zweyte französische Ausgabe ist, denn die erste ist diejenige, welche Fortin im Jahr 1776 auf 30 Quartblätter herausgab, und die zweyte nannte, weil er die große englische Londner Folioausgabe von 1729 in 28 Blätter für die erste rechnete. Wollte man auf diese Art nur überhaupt alle Ausgaben der Flamsteedischen Himmelskarten rechnen, so müste man alsdenn diejenige des Hrn. Professor Bode auf 34 Blätter (1782) eigentlich als die dritte, und die einzige de la Landische als die vierte Ausgabe ansehen. Diejenige an der Hr. Bode jetzo arbeitet, und in 4 bis 5 Jahren erst zu Stande kommen und in 20 Blättern, noch größer als Flamsteeds Großfolio-Format, nach einer ganz andern und richtigern Projection herauskommen wird, dürfte alsdenn die fünfte Flamsteedische Ausgabe werden. Die einzige Pariser Ausgabe ist von den Hrn. de la Lande und Mechain besorgt worden, bestehet ebenfalls aus 30 Quartblättern, enthält sehr viel mehr Sterne von der 5ten und 6ten Größe, und sieben neue Sternbilder. Hr. de la Lande hat auch ein neues Verzeichniß von 860 Sternen, die der C. Duc la Chapelle, Astronom zu Montauban aufs Jahr 1800 reducirt hat, angehängt. Auch hat er eine ganz neue Einleitung und Erklärung mit kritischen Bemerkungen über Flamsteeds Arbeiten beygefügt.

**) Den 7ten Messidor (25ten Juny) 1795 hat die Nationalconvention die Errichtung dieses Bureau de Longitude decretirt. Diese Commission bestehet aus zwey Geometer, la Grange, la Place, vier Astronomen, la Lande, Cassini, Mechain, Delambre, zwey alte Seefahrer, Borda, Bougainville, einen Geographen Buache, einen Mechaniker, Carrochez. Es sind dabey noch vier Adjunkten der Astronomie angestellt, worunter auch Hrn. de la Lande's Nefe le François ist. Die National Sternwarte, und jene der vormaligen Ecole militaire stehet unter ihrer Aufsicht, sie giebt künftig und jährlich die Connoissance des temps heraus, die auf Kosten der Republik gedruckt wird. Sie muß mit allen Sternwarten der Republik, und auch des Auslands einen literarischen Briefwechsel unterhalten, die Verbesserung der astronomischen Tafeln, und der Methoden zur Erfindung der Meeres-Länge, den Druck und die Bekanntmachung der astronomischen Beobachtungen u. s. f. besorgen. Eines ihrer Mitglieder muß alle Jahre einen Cursum Astronomiae geben,

sie

jungirt ist, ist ein gar vortrefflicher Beobachter, und theilt ebenfalls die Zeitsecunde in 10 Theile. Er hat in hohem Grade Sinn und Geschmack an Genauigkeit. Wenn es nach ihm gienge, so sollte nichts eher bekannt gemacht werden, bis nicht alles aufs äusserste verbessert worden, und kein Zweifel mehr übrig bleibt. Allein, ich denke man muß geben, was man hat, bis das andere kommt; man muß sich des Guten bedienen, bis das Bessere nachfolgen kann. Quintilian sagt, multa, dum perpoliuntur, intereunt. Wir begehen Fehler, wir verbessern sie aber auch, und wo giebt's nicht Fehler? Indessen wird das, was wir geben, neu und sehr nützlich seyn.

Die Einführung der neuen Maasse im Handel wird mit einer großen Lebhaftigkeit fortdauernd betrieben. Man hat hierzu noch eine besondere Stelle (agence) errichtet. Das ist eine schöne und wichtige Operation. Daß ich bereits im vorigen Jahre zu einer Commission über die Navigationskanäle in der Republik ernannt worden bin *), werden Sie schon wissen. Viele Kanäle sind schon angefangen, und man entwirft noch mehrere andere, um unsere Soldaten zu beschäftigen, wenn Friede gemacht würde. An dem Kanal von der Oise zur Sambre ist bisher fleissig gearbeitet worden.

sie erhält eine eigene astronomische Bibliothek; jedes Mitglied bekommt 8000 Livres Gehalt, ein Adjunkt 4000. Ueberdies erhält die Commission eine jährliche Summe von 12,000 L. zur Unterhaltung der Instrumente, Kanzeley-Spesen, und andern kleinen Nebenausgaben.

*) Auch in diesem Fache hat sich Hr. de la Lande ausgezeichnete Verdienste erworben. Wer kennt nicht sein Hauptwerk des Canaux navigables et specialement de celui de Languedoc. Paris 1778. großfolio, wozu er noch einen Supplementband herausgegeben hat. Schon im October 1790 decretirte die damalige Assemblée Nationale den projectirten Kanal des Hrn. Brullée von Pointoise nach Paris, und der König hatte dieses Project den 30ten Januar 1791 wirklich sanctionirt, allein die ganze Sache war ein Privatunternehmen des Hrn. Brullée, die durch eine Anleihe von 25 Millionen in 25,000 Actien jede 1000 L. ausgeführt werden sollte, die Fonds kamen nicht zusammen, und das ganze Unternehmen gerieth ins Stecken. Da sich jetzt die Regierung der Sache annimmt, so ist zu hoffen, daß diese Entreprisen besser gehen werden; denn Actien bey einem solchen schweren und kostspieligen Bau haben viel abschreckendes, und man hat davon so viele mißlungene und verunglückte Beyspiele. So haben erst vor wenig Jahren die Unternehmer des Kanals von Murcia in Spanien bankrut gemacht. Der berühmte italienische Astronom Hr. Cagnoli in Verona, der auch einer von den Actionnaires war, verlohr dabey einen großen Theil seines ansehnlichen Vermögens.

Leipzig,
gedruckt bey Christian Friedrich Solbrig.

Archiv
der
reinen und angewandten Mathematik.

Sechstes Heft. 1797.

I.

Ueber die astronomische Strahlenbrechung mit Rücksicht auf Thermometer und Barometer; von J. F. Hennert, Professor der Mathematik zu Utrecht.

(Fortsetzung der Abhandl. I. im 5ten Hefte, S. 1.)

§. 11. Seit den Hawksbeeschen Versuchen über die Strahlenbrechung, stimmen alle Astronomen überein, daß die Strahlenbrechung mit der Dichtheit der Luft ab- und zunehme; daß auch die Dichtheit der Luft mit der Elasticität zunehme, aber mit der zunehmenden Wärme sich vermindere. Die Schnellkraft der Luft steht mit der Barometer-Höhe im Verhältniß. Wenn also R und r die Strahlenbrechungen, für die Barometer-Höhen H und h, und für die Grade der Wärme T und t, bezeichnen, so erhält man folgendes Verhältniß, $R : r = \frac{H}{T} : \frac{h}{t}$; folglich $r = R . \frac{T}{H} . \frac{h}{t}$. Man kann also durch diese Formel,

die Strahlenbrechung r, die derselben Höhe eines Sterns, als die Strahlenbrechung R entspricht, für einen jeglichen Stand des Barometers b, und des Thermometers t, finden, wenn nur die Strahlenbrechungen für eine gewisse Barometerhöhe, z. B. 30 Englische Zolle $=$ H, und für einen gewissen Grad der Wärme $=$ T z. B. des 55sten Grades der Fahrenheitischen Scale bekannt wären.

§. 12. Anfangs dieses Jahrhunderts nahmen die Astronomen allein Rücksicht auf das Barometer, bis le Monnier durch genauere Beobachtungen in seiner Histoire Celeste, den merklichen Einfluß der Wärme auf die Strahlenbrechung außer allem Zweifel gesetzt hatte. Dasselbe bestätigten auch die Versuche des Cassini in den Mem. de l'Academie des sciences de Paris von 1742 und 43. Nach der Zeit haben Mayer, de la Caille, Bonne Formeln für die Strahlenbrechungen gegeben, welche doch mehr auf empirische als auf physische Gründe gebaut sind.

§. 13. Die Formel $\sin Z : \sin (Z + nR) = \sin Z' : \sin (Z' + nr)$ (§. 3.), kann mit Rücksicht auf Barometer und Thermometer, auf diese Form gebracht werden, $\sin Z : \sin (Z + nR. \frac{T}{H} \cdot \frac{b}{t}) = \sin Z' : \sin (Z' + nr)$; dann bezeichnet r die Refraction, die zu dem Abstand vom Zenith Z', und zu dem Barometerstand b, und dem Thermometer t, gehört. Anstatt dieser Formel könnte man sich des Ausdrucks $r = nR : \frac{T}{H} \cdot \frac{b}{t}$, bedienen (§. 11), wenn eine Tafel der Strahlenbrechungen R, für das Barometer H, und das Thermometer T schon berechnet wäre.

§. 14

§. 14. Vielleicht könnte die letztere Gleichung unter eine Form, die zur Berechnung der Tafeln geschikter wäre, gebracht werden. Man setze α = dem Unterschiede der Barometerhöhen H und b, also $H \mp \alpha = h$, und θ für den Unterschied der Wärme, also $T \pm \theta = t$; folglich

$$= R . \frac{T}{H} . \frac{H \mp \alpha}{T \pm \theta} = R . \frac{1}{1 \pm \frac{\theta}{T}} \left(1 \mp \frac{\alpha}{H}\right).$$

Es besteht also die Strahlenbrechung aus zwei Theilen, oder Factoren; der erste $\frac{1}{1 \pm \theta : T}$ hängt von der Wärme, der zweite $1 \mp \frac{\alpha}{H}$, von der Barometerhöhe ab. Einige Astronomen, als de la Caille (Memoires de l'Acad. des Sciences 1755) haben zwei Tafeln, die eine für das Barometer, die andere für das Thermometer angegeben; die Summe der Zahlen in diesen Tafeln giebt den Coefficienten der Strahlenbrechung. Allein, die Art des Einflußes, des Barometers, insbesondere, von dem Einfluße des Thermometers auf die Refraction zu bestimmen, ist nicht genau, nur approximirt wahr. Denn r =

$$R \left(\frac{1 \mp \frac{\alpha}{H}}{1 \pm \frac{\theta}{T}} \right) = \left(1 \mp \frac{\theta}{T} \mp \frac{\alpha}{H} \quad \frac{\pm \frac{\alpha\theta}{HT} - \frac{\theta^2}{T^2}}{1 \pm \theta : T} \right) R,$$

oder, wenn man den letzten Terminus vernachlässiget, erhält man den Ausdruck $\left(1 \mp \frac{\theta}{T} \mp \frac{\alpha}{H}\right) R$, der mit der de la Caillischen Hypothese übereinkömmt. Wenn die Unterschiede α und θ nicht groß sind, kann man die

Formel $R\left(\alpha - + \frac{\theta}{T} \pm \frac{a}{H}\right)$ gebrauchen; steht aber das Thermometer unter dem angenommenen Grad T, daß der Nenner $1 - \theta : T$ ein Bruch wird, so kann der letzte minus nicht weggelassen werden.

§. 15. Ehe wir zur Bestimmung der Strahlenbrechung mit Rücksicht auf Barometer und Thermometer fortschreiten, müssen wir untersuchen, ob der Coefficient *n*, den man den Exponenten der Strahlenbrechung nennen könnte, in allen Himmelsstrichen unveränderlich sey? Ich habe diesen Exponent $n = 3,8$ für die Cassinischen Tafeln, nach der Methode des §. 3. gefunden. Die Equation für die Cassinische Refractionstafeln ist diese:
$\log. \sin (Z' - 3,8\, r) = 9,9995289 + \log. Z'$ (§

Cassini zeigt wohl in seinen Elemens d'Astronomie (Seite 13) die Methode an, die Strahlenbrechung aus der Zeit der Beobachtung und der beobachteten Höhe des Sterns, zu finden, jedoch ohne Anweisung der Temperatur der Luft. Ferner lehrt er, aus zwey bekannten Strahlenbrechungen eine Tafel für alle Höhen zu machen, zufolge einer indirecten Methode, die ich auf eine directe gebracht habe. (Astronomisches Jahrbuch 1787 Seite 15 Meine Absicht erlaubt mir nicht, über die Cassinischen Tafeln einige Kritik zu machen.

§. 16. La Caille hat seine Refractionstafeln nur bis auf 84 Grade des Abstandes vom Zenith ausgeführt. Wenn man $n = - 11,8$ annimmt, kann die Refractionstafel durch diese Gleichung ziemlich berechnet werden: $\log. \sin (Z' - 11,8\, r) = 9,9984377 + \log Z'$. Gegen die la Caillische Refractionstafel hat la Lande in seiner Astronomie gegründete Anmerkungen gemacht. Ich ha

n derselben auch einige Abweichungen, in dem erwähnten Astronomischen Jahrbuch bemerkt.

§. 17. Die Beobachtungen über die Strahlenbrechung, welche Bouguer zu Quito, 1479 toises über die See gemacht hat, geben n = — 8, 4 für den Exponent der Strahlenbrechung, und die Gleichung der Strahlenbrechung für einen gegebenen Abstand vom Zenith, ist log sin (Z′ — 8, 4 r) = 9,9993235 + log sin Z′. Siehe Connoissance des temps, 1778. S. 201.)

§. 18. In der Connoissance des temps, für das Jahr 1773 Seite 247, befinden sich fünf Beobachtungen über die Strahlenbrechung, auf welche Bonne seine Refractionstafel scheint gegründet zu haben. Das Barometer war 28 Zoll, das Reaum. Therm. auf 10 Grade. Für die Weiten vom Zenith, 90° — 84° — 70° — 60° — 45°, waren die Strahlenbrechungen 32′ 24″ — 8′ 38″, 6, — 2′ 40″, 4 — 1′ 41″, 7 — 59″. Aus den zwey ersten Beobachtungen habe ich den Exponent der Strahlenbrechung oder n = — 6, 4, und folgende Gleichung, log sin (Z′ — 6, 4 r) = 9, 9992156 + log sin Z′ abgeleitet, mit welcher die übrigen Beobachtungen vollkommen übereinstimmen. Diese Refractionstafel befindet sich in der zweyten Ausgabe der Astronomie des La Lande; doch in der dritten Ausgabe ist die Bradleysche Tafel für die Tafel des Bonne eingerükt.

§. 19. Aus den vorhergehenden Versuchen kann man ersehen, daß der Exponent der Strahlenbrechung eine beständige Grösse sey. Ich hatte schon vor einigen Jahren an der Allgemeinheit der Bradleyschen Tafeln gezweifelt. Seit dem ich aber die zu Palermo von Piazzi gemachten Beobachtungen, durch die günstige Mittheilung des Herrn Obristwachtmeisters von Zach erhalten habe,

 bin

Formel $R\left(1 - \frac{\theta}{T} + \frac{\alpha}{H}\right)$ gebrauchen; steht aber das Thermometer unter dem angenommenen Grad T, daß der Nenner 1 — θ : T ein Bruch wird, so kann der letzte Terminus nicht weggelassen werden.

§. 15. Ehe wir zur Bestimmung der Strahlenbrechung mit Rücksicht auf Barometer und Thermometer fortschreiten, müssen wir untersuchen, ob der Coefficient *n*, den man den Exponenten der Strahlenbrechung nennen könnte, in allen Himmelsstrichen unveränderlich sey? Ich habe diesen Exponent *n* = 3, 8 für die Cassinischen Tafeln, nach der Methode des §. 3. gefunden. Die Equation für die Cassinische Refractionstafeln ist diese:

log. sin (Z′ — 3, 8 *r*) = 9,9995289 + log. Z′ (§. 5)

Cassini zeigt wohl in seinen Elemens d'Astronomie (Seite 13) die Methode an, die Strahlenbrechung aus der Zeit der Beobachtung und der beobachteten Höhe des Sterns, zu finden, jedoch ohne Anweisung der Temperatur der Luft. Ferner lehrt er, aus zwey bekannten Strahlenbrechungen eine Tafel für alle Höhen zu machen, zufolge einer indirecten Methode, die ich auf eine directe gebracht habe. (Astronomisches Jahrbuch 1787 Seite 154) Meine Absicht erlaubt mir nicht, über die Cassinischen Tafeln einige Kritik zu machen.

§. 16. La Caille hat seine Refractionstafeln nur bis auf 84 Grade des Abstandes vom Zenith ausgeführt. Wenn man n = — 11, 8 annimmt, kann die Refractionstafel durch diese Gleichung ziemlich berechnet werden: log. sin (Z′ — 11, 8 *r*) = 9,9984377 + log Z′. Gegen die la Caillische Refractionstafel hat la Lande in seiner Astronomie gegründete Anmerkungen gemacht. Ich habe

in

in derselben auch einige Abweichungen, in dem erwähnten Astronomischen Jahrbuch bemerkt.

§. 17. Die Beobachtungen über die Strahlenbrechung, welche Bouguer zu Quito, 1479 toises über die See gemacht hat, geben n = — 8, 4 für den Exponent der Strahlenbrechung, und die Gleichung der Strahlenbrechung für einen gegebenen Abstand vom Zenith, ist log sin (Z′ — 8, 4 r) = 9,9993235 + log sin Z′. (Siehe Connoissance des temps, 1778. S. 201.)

§. 18. In der Connoissance des temps, für das Jahr 1773 Seite 247, befinden sich fünf Beobachtungen über die Strahlenbrechung, auf welche Bonne seine Refractionstafel scheint gegründet zu haben. Das Barometer war 28 Zoll, das Reaum. Therm. auf 10 Grade. Für die Weiten vom Zenith, 90° — 84° — 70° — 60° — 45°, waren die Strahlenbrechungen 32′ 24″ — 8′ 38″, 6, — 2′ 40″, 4 — 1′ 41″, 7 — 59″. Aus den zwey ersten Beobachtungen habe ich den Exponent der Strahlenbrechung oder n = — 6, 4, und folgende Gleichung, log sin (Z′ — 6, 4 r) = 9, 9992156 + log sin Z′ abgeleitet, mit welcher die übrigen Beobachtungen vollkommen übereinstimmen. Diese Refractionstafel befindet sich in der zweyten Ausgabe der Astronomie des La Lande; doch in der dritten Ausgabe ist die Bradleysche Tafel für die Tafel des Bonne eingerükt.

§. 19. Aus den vorhergehenden Versuchen kann man ersehen, daß der Exponent der Strahlenbrechung keine beständige Größe sey. Ich hatte schon vor einigen Jahren an der Allgemeinheit der Bradleyschen Tafeln gezweifelt. Seit dem ich aber die zu Palermo von Piazzi gemachten Beobachtungen, durch die günstige Mittheilung des Herrn Obristwachtmeisters von Zach erhalten habe,

 bin

bin ich überzeugt, daß die Strahlenbrechung an keine allgemeine Regel gebunden ist, sondern daß dieselbe für die Luftstriche verändert. Die Palermischen Beobachtungen sind, so viel mir bewußt ist, die vollständigsten, welche die Astronomen bekannt gemacht haben. Sie erstrecken sich von 40 bis $89\frac{1}{2}$ Grad vom Zenith. Nur ist zu bedauern, daß die Veränderungen des Thermometers zwischen den engen Gränzen von 58 bis 78 enthalten sind.

§. 20. Um den Exponent der Refraction zu bestimmen, habe ich zwey Beobachtungen für $Z = 88°$, und $Z' = 84°$ erwählet, aus den funfzehn Beobachtungen, unter derselben Temperatur, nemlich bey der Barometerhöhe von 29, 9 Englischen Zollen, und dem Thermometer von 62 Graden. Die Refraction R war $= 17' 41'', 2$, die zweyte $r = 9' 37''$. Diese Beobachtungen geben $n = -6,988$ oder $= -7 =$ dem Exponent der Strahlenbrechung; also die Gleichung der Strahlenbrechnng, $\log \sin (Z' - 7r) = 9,9991716 + \log Z''$; nach dieser Gleichung habe ich die Beobachtungen unter gleicher Temperatur berechnet; der größeste Fehler ist 4″, bey dem Abstand des Zenith von 84 Graden.

§. 21. Weil die Bradleysche Regel auf dem Exponent der Refraction, oder $n = -6$, gegründet ist, dieser aber nicht für alle Gegenden beständig ist, so kann die Bradleysche Proportion, $\tang (Z' - 3r) : \tang 3r = \tang (Z - 3R) : \tang 3R$ nicht allgemein seyn. (§. 7.) Man müßte für Palermo diese Proportion $\tang\left(Z' - \frac{7r}{2}\right)$: $\tang \frac{7r}{2} = \tang\left(Z - \frac{7R}{2}\right) : \tang \frac{7R}{2}$, oder genauer $\sin\left(Z' - \frac{7r}{2}\right) : \sin \frac{7r}{2} = \sin\left(Z - \frac{7R}{2}\right) : \sin \frac{7R}{2}$ nehmen.

Das

Das Ansehen der Bradleyschen Formel scheint die [A]stronomen eingenommen zu haben, daß die meisten die [R]efractionen nach der Regel berechnet haben, die doch in [H]öhen unter 20° von der Wahrheit ziemlich abweichen [kö]nnen. Man sieht also, daß die astronomische Strahlen[b]rechung noch nicht die Vollkommenheit erreicht hat, wel[c]he der gegenwärtige Zustand der praktischen Astronomie [e]rfordert, wo man sich schmeichelt, keinen Fehler von 2'' [i]n der Höhenmessung begehen zu können.

§. 22. In Betracht der Unvollkommenheit der Lehre [d]er Strahlenbrechung wird man meine Versuche nicht übel [d]euten, sollten sie auch mißlingen; Insonderheit den Ver[su]ch über die Bestimmung der Refraction, für das Baro[m]eter und Thermometer.

Die zwey Formeln des 12ten §. müssen, mit Rücksicht [a]uf die Palermische Beobachtungen, diese Form erhalten,

$$\sin\left(Z' - 7\frac{R.T.}{H}\frac{b}{t}\right) : \sin Z' = \sin(Z - 7r) : \sin Z$$

[u]nd $r = \frac{R.T.}{H}\frac{b}{t}$, wo T und H und R sich auf die Höhe [d]es Barometers an 29, 9 Zollen, und den 62sten Grad des [T]hermometers, und die dahin gehörige Refraction R be[zie]hen.

§. 23. Die Schwierigkeit, welche die Anwendung [o]biger Formeln verursacht, trift das Verhältniß der Wär[m]e oder die Grössen T : t. Unmöglich kann man die Gra[d]e des Thermometers dazu gebrauchen. Die Eintheilung [d]er Scalen hat doch etwas Willkührliches. Ueberdem [st]eht die Ausdehnung der Luft mit der Ausdehnung des [M]ercurius, oder mit den Graden des Thermometers, in kei[n]em Verhältniß. Die Ausdehnung der Luft, welche die

fungirt ist, ist ein gar vortrefflicher Beobachter, und theilt ebenfalls die Zeitsecunde in 10 Theile. Er hat in hohem Grade Sinn und Geschmack an Genauigkeit. Wenn es nach ihm gienge, so sollte nichts eher bekannt gemacht werden, bis nicht alles aufs äusserste verbessert worden, und kein Zweifel mehr übrig bleibt. Allein, ich denke man muß geben, was man hat, bis das andere kommt; man muß sich des Guten bedienen, bis das Bessere nachfolgen kann. Quintilian sagt, multa, dum perpoliuntur, intereunt. Wir begehen Fehler, wir verbessern sie aber auch, und wo giebt's nicht Fehler? Indessen wird das, was wir geben, neu und sehr nützlich seyn.

Die Einführung der neuen Maasse im Handel wird mit einer grossen Lebhaftigkeit fortdauernd betrieben. Man hat hierzu noch eine besondere Stelle (agence) errichtet. Das ist eine schöne und wichtige Operation. Daß ich bereits im vorigen Jahre zu einer Commission über die Navigationskanäle in der Republik ernannt worden bin *), werden Sie schon wissen. Viele Kanäle sind schon angefangen, und man entwirft noch mehrere andere, um unsere Soldaten zu beschäftigen, wenn Friede gemacht würde. An dem Kanal von der Oise zur Sambre ist bisher fleissig gearbeitet worden.

sie erhält eine eigene astronomische Bibliothek; jedes Mitglied bekommt 8000 Livres Gehalt, ein Adjunkt 4000. Ueberdies erhält die Commission eine jährliche Summe von 12,000 L. zur Unterhaltung der Instrumente, Kanzeley-Spesen, und andern kleinen Nebenausgaben.

*) Auch in diesem Fache hat sich Hr. de la Lande ausgezeichnete Verdienste erworben. Wer kennt nicht sein Hauptwerk des Canaux navigables et specialement de celui de Languedoc. Paris 1778. großfolio, wozu er noch einen Supplementband herausgegeben hat. Schon im October 1790 decretirte die damalige Assemblée Nationale den projectirten Kanal des Hrn. Brullée von Pointoise nach Paris, und der König hatte dieses Project den 30ten Januar 1791 wirklich sanctionirt, allein die ganze Sache war ein Privatunternehmen des Hrn. Brullée, die durch eine Anleihe von 25 Millionen in 25,000 Actien jede 1000 L. ausgeführt werden sollte, die Fonds kamen nicht zusammen, und das ganze Unternehmen gerieth ins Stecken. Da sich jetzt die Regierung der Sache annimmt, so ist zu hoffen, daß diese Entreprisen besser gehen werden; denn Actien bey einem solchen schweren und kostspieligen Bau haben viel abschreckendes, und man hat davon so viele mißlungene und verunglückte Beyspiele. So haben erst vor wenig Jahren die Unternehmer des Kanals von Murcia in Spanien bankrut gemacht. Der berühmte italienische Astronom Hr. Cagnoli in Verona, der auch einer von den Actionnaires war, verlohr dabey einen grossen Theil seines ansehnlichen Vermögens.

Leipzig,

gedruckt bey Christian Friedrich Solbrig.

Archiv
der
reinen und angewandten Mathematik.

Sechstes Heft. 1797.

I.

Ueber die astronomische Strahlenbrechung mit Rücksicht auf Thermometer und Barometer; von J. F. Hennert, Professor der Mathematik zu Utrecht.

(Fortsetzung der Abhandl. I. im 5ten Hefte, S. 1.)

§. 11. Seit den Hawksbeeschen Versuchen über die Strahlenbrechung, stimmen alle Astronomen überein, daß die Strahlenbrechung mit der Dichtheit der Luft ab- und zunehme; daß auch die Dichtheit der Luft mit der Elasticität zunehme, aber mit der zunehmenden Wärme sich vermindere. Die Schnellkraft der Luft steht mit der Barometer-Höhe im Verhältniß. Wenn also R und r die Strahlenbrechungen, für die Barometer-Höhen H und h, und für die Grade der Wärme T und t, bezeichnen, so erhält man folgendes Verhältniß, $R : r = \frac{H}{T} : \frac{h}{t}$; folglich $r = R. \frac{T}{H} \cdot \frac{h}{t}$. Man kann also durch diese Formel,

die Strahlenbrechung r, die derselben Höhe eines Sterns, als die Strahlenbrechung R entspricht, für einen jeglichen Stand des Barometers b, und des Thermometers t, finden, wenn nur die Strahlenbrechungen für eine gewisse Barometerhöhe, z. B. 30 Englische Zolle = H, und für einen gewissen Grad der Wärme = T z. B. des 55sten Grades der Fahrenheitischen Scale bekannt wären.

§. 12. Anfangs dieses Jahrhunderts nahmen die Astronomen allein Rücksicht auf das Barometer, bis le Monnier durch genauere Beobachtungen in seiner Histoire Celeste, den merklichen Einfluß der Wärme auf die Strahlenbrechung außer allem Zweifel gesetzt hatte. Dasselbe bestätigten auch die Versuche des Cassini in den Mem. de l'Academie des sciences de Paris von 1742 und 43. Nach der Zeit haben Mayer, de la Caille, Bonne Formeln für die Strahlenbrechungen gegeben, welche doch mehr auf empirische als auf physische Gründe gebaut sind.

§. 13. Die Formel $\sin Z : \sin (Z + nR) = \sin Z' : \sin (Z' + nr)$ (§. 3.), kann mit Rücksicht auf Barometer und Thermometer, auf diese Form gebracht werden, $\sin Z$:

$$\sin \left(Z + n R . \frac{T}{H} \cdot \frac{b}{t}\right) = \sin Z' : \sin (Z' + n r);$$ dann

bezeichnet r die Refraction, die zu dem Abstand vom Zenith Z', und zu dem Barometerstand b, und dem Thermometer t, gehört. Anstatt dieser Formel könnte man sich des Ausdrucks $r = nR : \frac{T}{H} \cdot \frac{b}{t}$, bedienen (§. 11), wenn eine Tafel der Strahlenbrechungen R, für das Barometer H, und das Thermometer T schon berechnet wäre.

§. 14. Vielleicht könnte die letztere Gleichung unter eine Form, die zur Berechnung der Tafeln geschikter wäre, gebracht werden. Man setze α = dem Unterschiede der Barometerhöhen H und b, also $H \mp \alpha = h$, und θ für den Unterschied der Wärme, also $T \pm \theta = t$; folglich

$$r = R . \frac{T}{H} . \frac{H \mp \alpha}{T \pm \theta} = R . \frac{1}{1 \pm \frac{\theta}{T}} \left(1 \mp \frac{\alpha}{H}\right).$$

Es besteht also die Strahlenbrechung aus zwei Theilen, oder Factoren; der erste $\frac{1}{1 \pm \theta : T}$ hängt von der Wärme, der zweite $1 \mp \frac{\alpha}{H}$, von der Barometerhöhe ab. Einige Astronomen, als de la Caille (Memoires de l'Acad. des sciences 1755) haben zwei Tafeln, die eine für das Barometer, die andere für das Thermometer angegeben; die Summe der Zahlen in diesen Tafeln giebt den Coefficienten der Strahlenbrechung. Allein, die Art des Einflußes, des Barometers, insbesondere, von dem Einfluße des Thermometers auf die Refraction zu bestimmen, ist nicht genau, nur approximirt wahr. Denn r =

$$R\left(\frac{1 \mp \frac{\alpha}{H}}{1 \pm \frac{\theta}{T}}\right) = \left(1 \mp \frac{\theta}{T} \mp \frac{\alpha}{H} \frac{\mp \frac{\alpha\theta}{HT} - \frac{\theta^2}{T^2}}{1 \pm \theta : T}\right) R,$$

aber, wenn man den letzten Terminus vernachlässiget, erhält man den Ausdruck $\left(1 \mp \frac{\theta}{T} \mp \frac{\alpha}{H}\right)$ R, der mit der de la Caillischen Hypothese übereinkömmt. Wenn die Unterschiede α und θ nicht groß sind, kann man die

die Strahlenbrechung r, die derselben Höhe eines Sterns, als die Strahlenbrechung R entspricht, für einen jeglichen Stand des Barometers b, und des Thermometers t, finden, wenn nur die Strahlenbrechungen für eine gewisse Barometerhöhe, z. B. 30 Englische Zolle = H, und für einen gewissen Grad der Wärme = T z. B. des 55sten Grades der Fahrenheitischen Scale bekannt wären.

§. 12. Anfangs dieses Jahrhunderts nahmen die Astronomen allein Rücksicht auf das Barometer, bis le Monnier durch genauere Beobachtungen in seiner Histoire Celeste, den merklichen Einfluß der Wärme auf die Strahlenbrechung außer allem Zweifel gesetzt hatte. Dasselbe bestätigten auch die Versuche des Cassini in den Mem. de l'Academie des sciences de Paris von 1742 und 43. Nach der Zeit haben Mayer, de la Caille, Bonn[illegible] Formeln für die Strahlenbrechungen gegeben, [illegible] doch mehr auf empirische als auf physische Grün[illegible] baut sind.

§. 13. Die Formel $\sin Z : \sin (Z + n R$ [illegible] $\sin (Z' + n r)$ (§. 3.), kann mit Rücksicht [illegible] und Thermometer, auf diese Form gebra[illegible]

$$\sin \left(Z + n R. \frac{T}{H} \cdot \frac{b}{t}\right) = \sin Z' : \sin \text{[illegible]}$$

bezeichnet r die Refraction, die zu [illegible] nith Z', und zu dem Barometerst[illegible] mometer t, gehört. Anstatt diese[illegible]

des Ausdrucks $r = n R : \frac{T}{H} \cdot$ [illegible]

eine Tafel der Strahlenbrechun[illegible] H, und das Thermometer T [illegible]

fungirt ist, ist ein gar vortrefflicher Beobachter, und theilt ebenfalls die Zeitsecunde in 10 Theile. Er hat in hohem Grade Sinn und Geschmack an Genauigkeit. Wenn es nach ihm gienge, so sollte nichts eher bekannt gemacht werden, bis nicht alles aufs äusserste verbessert worden, und kein Zweifel mehr übrig bleibt. Allein, ich denke man muß geben, was man hat, bis das andere kommt; man muß sich des Guten bedienen, bis das Bessere nachfolgen kann. Quintilian sagt, multa, dum perpoliuntur, intereunt. Wir begehen Fehler, wir verbessern sie aber auch, und wo giebt's nicht Fehler? Indessen wird das, was wir geben, neu und sehr nützlich seyn.

Die Einführung der neuen Maasse im Handel wird mit einer großen Lebhaftigkeit fortdauernd betrieben. Man hat hierzu noch eine besondere Stelle (agence) errichtet. Das ist eine schöne und wichtige Operation. Daß ich bereits im vorigen Jahre zu einer Commission über die Navigationskanäle in der Republik ernannt worden bin *), werden Sie schon wissen. Viele Kanäle sind schon angefangen, und man entwirft noch mehrere andere, um unsere Soldaten zu beschäftigen, wenn Friede gemacht würde. An dem Kanal von der Oise zur Sambre ist bisher fleissig gearbeitet worden.

sie erhält eine eigene astronomische Bibliothek; jedes Mitglied bekommt 8000 Livres Gehalt, ein Adjunkt 4000. Ueberdies erhält die Commission eine jährliche Summe von 12,000 L. zur Unterhaltung der Instrumente, Kanzeley-Spesen, und andern kleinen Nebenausgaben.

*) Auch in diesem Fache hat sich Hr. de la Lande ausgezeichnete Verdienste erworben. Wer kennt nicht sein Hauptwerk des Canaux navigables et specialement de celui de Languedoc. Paris 1778. großfolio, wozu er noch einen Supplementband herausgegeben hat. Schon im October 1790 decretirte die damalige Assemblée Nationale den projectirten Kanal des Hrn. Brullée von Pointoise nach Paris, und der König hatte dieses Project den 30ten Januar 1791 wirklich sanctionirt, allein die ganze Sache war ein Privatunternehmen des Hrn. Brullée, die durch eine Anleihe von 25 Millionen in 25,000 Actien jede 1000 L. ausgeführt werden sollte, die Fonds kamen nicht zusammen, und das ganze Unternehmen gerieth ins Stecken. Da sich jetzt die Regierung der Sache annimmt, so ist zu hoffen, Daß diese Entreprisen besser gehen werden; denn Actien bey einem solchen schweren und kostspieligen Bau haben viel abschreckendes, und man hat davon so viele mißlungene und verunglückte Beyspiele. So haben erst vor wenig Jahren die Unternehmer des Kanals von Murcia in Spanien bankrut gemacht. Der berühmte italienische Astronom Hr. Cagnoli in Verona, der auch einer von den Actionnaires war, verlohr dabey einen grossen Theil seines ansehnlichen Vermögens.

Leipzig,

gedruckt bey Christian Friedrich Solbrig.

Archiv der reinen und angewandten Mathematik.

Sechstes Heft. 1797.

I.

Ueber die astronomische Strahlenbrechung mit Rücksicht auf Thermometer und Barometer; von J. F. Hennert, Professor der Mathematik zu Utrecht.

(Fortsetzung der Abhandl. I. im 5ten Hefte, S. 1.)

§. 11. Seit den Hawksbeeschen Versuchen über die Strahlenbrechung, stimmen alle Astronomen überein, daß die Strahlenbrechung mit der Dichtheit der Luft ab- und zunehme; daß auch die Dichtheit der Luft mit der Elasticität zunehme, aber mit der zunehmenden Wärme sich vermindere. Die Schnellkraft der Luft steht mit der Barometer-Höhe im Verhältniß. Wenn also R und r die Strahlenbrechungen, für die Barometer-Höhen H und h, und für die Grade der Wärme T und t, bezeichnen, so erhält man folgendes Verhältniß, $R : r = \frac{H}{T} : \frac{h}{t}$; folglich $r = R . \frac{T}{H} . \frac{h}{t}$. Man kann also durch diese Formel,

die Strahlenbrechung r, die derselben Höhe eines Sterns, als die Strahlenbrechung R entspricht, für einen jeglichen Stand des Barometers b, und des Thermometers t, finden, wenn nur die Strahlenbrechungen für eine gewisse Barometerhöhe, z. B. 30 Englische Zolle = H, und für einen gewissen Grad der Wärme = T z. B. des 55sten Grades der Fahrenheitischen Scale bekannt wären.

§. 12. Anfangs dieses Jahrhunderts nahmen die Astronomen allein Rücksicht auf das Barometer, bis le Monnier durch genauere Beobachtungen in seiner Histoire Celeste, den merklichen Einfluß der Wärme auf die Strahlenbrechung außer allem Zweifel gesetzt hatte. Dasselbe bestätigten auch die Versuche des Cassini in den Mem. de l'Academie des sciences de Paris von 1742 und 43. Nach der Zeit haben Mayer, de la Caille, Bonne Formeln für die Strahlenbrechungen gegeben, welche doch mehr auf empirische als auf physische Gründe gebaut sind.

§. 13. Die Formel $\sin Z : \sin (Z + nR) = \sin Z' : \sin (Z' + nr)$ (§. 3.), kann mit Rücksicht auf Barometer und Thermometer, auf diese Form gebracht werden, $\sin Z : \sin (Z + n R . \frac{T}{H} . \frac{b}{t}) = \sin Z' : \sin (Z' + nr)$; dann bezeichnet r die Refraction, die zu dem Abstand vom Zenith Z', und zu dem Barometerstand b, und dem Thermometer t, gehört. Anstatt dieser Formel könnte man sich des Ausdrucks $r = nR : \frac{T}{H} . \frac{b}{t}$, bedienen (§. 11), wenn eine Tafel der Strahlenbrechungen R, für das Barometer H, und das Thermometer T schon berechnet wäre.

§. 14

§. 14. Vielleicht könnte die letztere Gleichung unter eine Form, die zur Berechnung der Tafeln geschikter wäre, gebracht werden. Man setze $\alpha =$ dem Unterschiede der Barometerhöhen H und b, also $H \pm \alpha = h$, und θ für den Unterschied der Wärme, also $T \pm \theta = t$; folglich

$$r = R.\frac{T}{H}\cdot\frac{H \pm \alpha}{T \pm \theta} = R.\frac{1}{1 \pm \frac{\theta}{T}}\left(1 \pm \frac{\alpha}{H}\right).$$

Es besteht also die Strahlenbrechung aus zwei Theilen, oder Factoren; der erste $\frac{1}{1 \pm \theta : T}$ hängt von der Wärme, der zweite $1 \pm \frac{\alpha}{H}$, von der Barometerhöhe ab. Einige Astronomen, als de la Caille (Memoires de l'Acad. des Sciences 1755) haben zwei Tafeln, die eine für das Barometer, die andere für das Thermometer angegeben; die Summe der Zahlen in diesen Tafeln giebt den Coefficienten der Strahlenbrechung. Allein, die Art des Einflußes, des Barometers, insbesondere, von dem Einfluße des Thermometers auf die Refraction zu bestimmen, ist nicht genau, nur approximirt wahr. Denn r =

$$R\left(\frac{1 \pm \frac{\alpha}{H}}{1 \pm \frac{\theta}{T}}\right) = \left(1 \mp \frac{\theta}{T} \pm \frac{\alpha}{H} \quad \frac{\mp \frac{\alpha\theta}{HT} - \frac{\theta^2}{T^2}}{1 \pm \theta : T}\right)R,$$

aber, wenn man den letzten Terminus vernachlässiget, erhält man den Ausdruck $\left(1 \mp \frac{\theta}{T} \pm \frac{\alpha}{H}\right)$ R, der mit der de la Caillischen Hypothese übereinkömmt. Wenn die Unterschiede α und θ nicht groß sind, kann man die

Formel $R\left(1 \mp \frac{\theta}{T} \pm \frac{\alpha}{H}\right)$ gebrauchen; steht aber das Thermometer unter dem angenommenen Grad T, daß der Nenner $1 - \theta : T$ ein Bruch wird, so kann der letzte Terminus nicht weggelassen werden.

§. 15. Ehe wir zur Bestimmung der Strahlenbrechung mit Rücksicht auf Barometer und Thermometer fortschreiten, müssen wir untersuchen, ob der Coefficient n, den man den Exponenten der Strahlenbrechung nennen könnte, in allen Himmelsstrichen unveränderlich sey? Ich habe diesen Exponent $n = 3, 8$ für die Cassinischen Tafeln, nach der Methode des §. 3. gefunden. Die Equation für die Cassinische Refractionstafeln ist diese:

$$\log. \sin (Z' - 3, 8\, r) = 9,9995289 + \log. Z' \quad (§. 5)$$

Cassini zeigt wohl in seinen Elemens d'Astronomie (Seite 13) die Methode an, die Strahlenbrechung aus der Zeit der Beobachtung und der beobachteten Höhe des Sterns, zu finden, jedoch ohne Anweisung der Temperatur der Luft. Ferner lehrt er, aus zwey bekannten Strahlenbrechungen eine Tafel für alle Höhen zu machen, zufolge einer indirecten Methode, die ich auf eine directe gebracht habe. (Astronomisches Jahrbuch 1787 Seite 154) Meine Absicht erlaubt mir nicht, über die Cassinischen Tafeln einige Kritik zu machen.

§. 16. La Caille hat seine Refractionstafeln nur bis auf 84 Grade des Abstandes vom Zenith ausgeführt. Wenn man $n = - 11, 8$ annimmt, kann die Refractionstafel durch diese Gleichung ziemlich berechnet werden:

$$\log. \sin (Z' - 11, 8\, r) = 9,9984377 + \log Z'.$$

Gegen die la Caillische Refractionstafel hat la Lande in seiner Astronomie gegründete Anmerkungen gemacht. Ich habe in

derselben auch einige Abweichungen, in dem erwähnten tronomischen Jahrbuch bemerkt.

§. 17. Die Beobachtungen über die Strahlenbrechung, lche Bouguer zu Quito, 1479 toises über die See geicht hat, geben n = — 8, 4 für den Exponent der trahlenbrechung, und die Gleichung der Strahlenbreung für einen gegebenen Abstand vom Zenith, ist g sin (Z′ — 8, 4 r) = 9,9993235 + log sin Z′. Siehe Connoissance des temps, 1778. S. 201.)

§. 18. In der Connoissance des temps, für das ihr 1773 Seite 247, befinden sich fünf Beobachtungen er die Strahlenbrechung, auf welche Bonne seine Reactionstafel scheint gegründet zu haben. Das Barometer ir 28 Zoll, das Reaum. Therm. auf 10 Grade. Für Weiten vom Zenith, 90° — 84° — 70° — 60° — 45°, ren die Strahlenbrechungen 32′ 24″ — 8′ 38″, 6, — 40″, 4 — 1′ 41″, 7 — 59″. Aus den zwey ersten Beobachtungen habe ich den Exponent der Strahlenbrechung oder = — 6, 4, und folgende Gleichung, log sin (Z′ — 6, 4 r) = 9, 9992156 + log sin Z′ abgeleitet, mit welcher die rigen Beobachtungen vollkommen übereinstimmen. Diese fractionstafel befindet sich in der zweyten Ausgabe der tronomie des La Lande; doch in der dritten Ausgabe ist Bradleysche Tafel für die Tafel des Bonne eingerükt.

§. 19. Aus den vorhergehenden Versuchen kann an ersehen, daß der Exponent der Strahlenbrechung ine beständige Größe sey. Ich hatte schon vor einigen ahren an der Allgemeinheit der Bradleyschen Tafeln gezweifelt. Seit dem ich aber die zu Palermo von Piazzi machten Beobachtungen, durch die günstige Mittheilung es Herrn Obristwachtmeisters von Zach erhalten habe,

 bin

bin ich überzeugt, daß die Strahlenbrechung an keine allgemeine Regel gebunden ist, sondern daß dieselbe für die Luftstriche verändert. Die Palermischen Beobachtungen sind, so viel mir bewußt ist, die vollständigsten, welche die Astronomen bekannt gemacht haben. Sie erstrecken sich von 40 bis $89\frac{1}{2}$ Grad vom Zenith. Nur ist zu bedauern, daß die Veränderungen des Thermometers zwischen den engen Gränzen von 58 bis 78 enthalten sind.

§. 20. Um den Exponent der Refraction zu bestimmen, habe ich zwey Beobachtungen für $Z = 88^\circ$, und $Z' = 84^\circ$ erwählet, aus den funfzehn Beobachtungen, unter derselben Temperatur, nemlich bey der Barometerhöhe von 29, 9 Englischen Zollen, und dem Thermometer von 62 Graden. Die Refraction R war $= 17' 41'', 2$, die zweyte $r = 9' 37''$. Diese Beobachtungen geben $n = -6,988$ oder $= -7 =$ dem Exponent der Strahlenbrechung; also die Gleichung der Strahlenbrechnng, $\log \sin (Z' - 7r) = 9,9991716 + \log Z''$; nach dieser Gleichung habe ich die Beobachtungen unter gleicher Temperatur berechnet; der grösseste Fehler ist $4''$, bey dem Abstand des Zenith von 84 Graden.

§. 21. Weil die Bradleysche Regel auf dem Exponent der Refraction, oder $n = -6$, gegründet ist, dieser aber nicht für alle Gegenden beständig ist, so kann die Bradleysche Proportion, $\tan (Z' - 3r) : \tan 3r = \tan (Z - 3R) : \tan 3R$ nicht allgemein seyn. (§. 7.) Man müßte für Palermo diese Proportion $\tan\left(Z' - \frac{7r}{2}\right)$

$$\tan \frac{7r}{2} = \tan\left(Z - \frac{7R}{2}\right) : \tan \frac{7R}{2},$$ oder genauer,

$$\sin\left(Z' - \frac{7r}{2}\right) : \sin \frac{7r}{2} = \sin\left(Z - \frac{7R}{2}\right) : \sin \frac{7R}{2}.$$

nehmen. Das

Das Ansehen der Bradleyschen Formel scheint die Astronomen eingenommen zu haben, daß die meisten die Refractionen nach der Regel berechnet haben, die doch in Höhen unter 20° von der Wahrheit ziemlich abweichen kann. Man sieht also, daß die astronomische Strahlenbrechung noch nicht die Vollkommenheit erreicht hat, welche der gegenwärtige Zustand der praktischen Astronomie erfordert, wo man sich schmeichelt, keinen Fehler von 2″ in der Höhenmessung begehen zu können.

§. 22. In Betracht der Unvollkommenheit der Lehre der Strahlenbrechung wird man meine Versuche nicht übel deuten, sollten sie auch mißlingen; Insonderheit den Versuch über die Bestimmung der Refraction, für das Barometer und Thermometer.

Die zwey Formeln des 12ten §. müssen, mit Rücksicht auf die Palermische Beobachtungen, diese Form erhalten,

$$\sin\left(Z' - 7\frac{R.T.}{H}\frac{b}{t}\right) : \sin Z' = \sin(Z - 7r) : \sin Z$$

und $r = \frac{R.T.}{H}\frac{b}{t}$, wo T und H und R sich auf die Höhe des Barometers an 29, 9 Zollen, und den 62sten Grad des Thermometers, und die dahin gehörige Refraction R beziehen.

§. 23. Die Schwierigkeit, welche die Anwendung obiger Formeln verursacht, trift das Verhältniß der Wärme oder die Größen T: t. Unmöglich kann man die Grade des Thermometers dazu gebrauchen. Die Eintheilung der Scalen hat doch etwas Willkührliches. Ueberdem steht die Ausdehnung der Luft mit der Ausdehnung des Mercurius, oder mit den Graden des Thermometers, in keinem Verhältniß. Die Ausdehnung der Luft, welche die

Wärme verursacht, wirkt die Veränderungen des Thermometers, die von der Wärme abhängig sind. Das Verhältniß der Grade der Wärme oder des T: t muß also durch das Verhältniß der Dilatationen der Luft, die den Graden des Thermometers entsprechen, bestimmt werden. Zu dem Ende habe ich mich der drey Tafeln bedient, die ich in meiner Preißschrift de Altitudinum mensuratione ope Barometri. Traiecti ad Rhenum 1788 gegeben habe. Die erste Tafel (A) enthält die ungleichen Ausdehnungen der Luft, wo die Masse der Luft = 1000 bey 0° des Fahrenheitischen Thermometers gesetzt wird, und bey dem 62 Grad durch 1147,09 ausgedrückt wird. Auf dieselbe Weise ist die zweyte Tafel (B) beschaffen, für die gleichförmigen Dilatationen der Luft, wo 1150, 66 dem 62° des Thermometers entspricht. Die dritte Tafel (C) ist für die Ausdehnungen der feuchten Luft, die Zahl 1152,778 steht bey dem 62° desselben Thermometers. Endlich ist eine vierte Tafel (D) für die Ausdehnungen des Merkurius; diese wird zur Verbesserung der Barometer dienlich seyn, weil die beobachteten Barometerhöhen nur scheinbare sind, wegen der durch die Wärme verursachten Ausdehnung des Merkurius. Man muß nemlich, zufolge der 14 Seite der erwähnten Schrift, die beobachtete Höhe durch die Einheit + der Zahl aus der Tafel D theilen, um die wahre Barometerhöhe zu erhalten. So findet man die Zahl 0,0069777 bey dem 62 Grad des Thermometers, folglich muß man die Barometerhöhe, z. E. 29,9 Zolle mit 1,0069777 theilen; daß also die wahre Höhe oder H = 29,699 ist.

§. 24. Um unsere Methode verständlicher zu machen, wollen wir die Refraction für den Abstand des Zenith oder Z' = 72°, die Barometerhöhe von 30 Zollen, und den Thermometerstand von 58,5°, welches der niedrigste Stand war, suchen. Weil keine Tafel der Refractionen für

Palermo berechnet ist, sucht man zuerst, die zum Abstand Z von 75° gehörige Refraction, nach der Gleichung

$$\log \sin(72° - 7R) = \frac{\begin{array}{r}9,9991706\\ 9,9782068\end{array}}{9,9873784} = \log \sin 72° (\S. 20)$$

also $72° - 7r = 71° - 40'$, also $7R = 49' 59''$, also ist $R = 2' 51'', 3$.

Die Refraction R entspricht dem 62sten Grad des Thermometers und der Barometerhöhe von 29,9 Zollen, weil auf dieser Temperatur die gebrauchte Gleichung gegründet ist. Nun muß man diese Refraction auf die Temperatur von 58,5 Grad und 30 Zollen bringen; vermittelst der Formel $r = \frac{R.T.}{H} \frac{t}{b}$

Für T habe ich die Zahl aus der Tafel der Ausdehnungen der feuchten Luft genommen, weil sie genauere Resultate giebt; vielleicht auch, daß die Luft bey niedrigen Höhen, als bey 2 und 6 Graden feuchter ist. Man findet in der Tafel (C) für 62°, die Zahl 1152,778, = T und in der Tafel (D) die Verbesserung der Barometerhöhe, oder den Theiler 1,0069777, also wird $H = \frac{29,9}{1,0069777}$

$= 29,699$

Folglich

$$\begin{array}{lr} lR = \log 171,3 & = 2,2337574 \\ \log T & = 3,0617343 \\ \hline & 5,2954917 \\ \log H & = 1,4727513 \\ \hline \log \frac{RH}{T} & = 3,8227404 \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \log T & = 3,0617343 \\ \log H & = 1,4727513 \\ \hline \log \frac{T}{H} & = 1,5889830 \end{array}$$

Dieser Logar. ist beständig.

 Dem

Dem $58\frac{1}{2}°$ des Thermometers entspricht in der ersten Tafel die Zahl 1137,9669 = t; die Tafel (D) giebt den Theiler 1,0065013, also $b = \frac{30}{1,0065}$

Nun ist $\log \frac{RH}{T} = 3,8227404$	$\log 1,0065 = 0,0028137$
$\log 30 = 1,4771212$	$\log T = 3,0561279$
$5,2998616$	$3,0589416$
$3,0589416$	
$\log r = 2,2409200$	

also $r = 174,13 = 2' 54'', 13$. Die beobachtete Refraction war $= 2' 54'' 5$. Der Unterschied ist unmerklich.

Wir wollen noch ein Beyspiel beyfügen, wo das Thermometer auf 78°, (der höchste Stand) und das Barometer auf 30 Zollen stand; der Abstand vom Zenith oder $Z' = 71° 30'$.

$9,9991716$	also $Z' - 7R = 71° 10'$
$\log Z' = 9,9769566$	$35'' = 71° 30' - 7R$ und
$\log (Z' - 7R) = 9,9761282$	$7R = 19' 25''$, und $R =$
	$2' 46'', 43 = 166'', 43$.

Dem 78° des Thermometers entspricht $t = 1187,7455$. der Theiler der Barometerhöhe ist $= 1,0086571$.

$\log \frac{T}{H} = 1,5889830$	$\log 1,008651 = 0,0037436$
$\log R = 2,2212316$	$\log t = 3,0747212$
$3,8102146$	$3,0784648$
$\log 30 = 1,4771212$	
$5,2873358$	
$3,0784648$	also $r = 161', 76 = 2' 41'', 76$
$\log r = 2,2088710$	die beobachtete Refr. $= 2' 44''$
	Fehler $- 2'', 23$

Auf

Auf diese Weise habe ich verschiedene Beobachtungen berechnet. Die folgende Tafel enthält einige Resultate:

Z	h	Therm.	beobacht. Refr.	berechn. Refr.	Fehler.
38°	29, 7	63°	44″, 5	43″, 85	+0, 64
39° 30′	29, 6	64, 6	45, 4	45, 6	—0, 2
40° 30′	29, 6	62, 5	47, 6	47, 85	—0, 25
43°	29, 7	63	51, 8	52, 64	+0, 24
45° 6′	29, 9	61, 5	57, 2	56, 43	+0, 76
47° 30′	29, 8	62	61, 2	61, 15	+0, 04
50°	29, 8	66	1′ 5″	1′ 6″, 4	—1″, 4
61°	30	78	1′ 40″ 6	1′ 38″, 17	+2″, 42
62°	30	77, 5	1′ 43″ 6	1′ 45″, 6	—1″, 6
67°	30	77, 5	2′ 11″ 5	2′ 11″, 58	—0, 08

§. 25. Die vortreflichen Beobachtungen, die le Monnier über die Strahlenbrechungen gemacht hat, kann ich nicht mit Stillschweigen übergehen. Die Absicht dieses berühmten Astronomen war nur, den Einfluß der Wärme auf die Refraction zu bestimmen; darinn hat er nur die Barometerhöhe bey zwey Beobachtungen angezeichnet. Wie konnten aber die Veränderungen der Strahlenbrechung ohne Rücksicht auf das Barometer beurtheilt werden, wie viel die Wärme allein dazu beygetragen hatte, als der Einfluß des Barometers nicht von den beobachteten Strahlenbrechungen abgerechnet wurde? Man findet in der Histoire celeste, Seite XXII, daß der Abstand des α Capellae vom Zenith = 85° 18′ 5″ war, die Refraction aber 9′ 20″, da das Barometer auf 27, 5 paris. Zollen, und das Reaumursche Thermometer auf 24° über dem Gefrier-Punkt stand. Weil mir keine Tafel der Refraction für den Luftkreis von Paris bekannt ist, habe ich versucht, welche von den dreyen Tafeln oder dreyen Hypothesen, die ich aus Piazzi, Bonne

ne und Bradley Beobachtungen abgeleitet habe, am genauesten mit den beobachteten Refractionen übereinstimmten. Um dieselben nach Piazzis Beobachtungen zu bestimmen, mußten die französischen Angaben auf englisches Maaß gebracht werden. Nun 27, 5 Par. Zolle sind 29, 208 Englische Zolle. Dem 24° des Reaumurschen Therm. entspricht der 84, 5 des Fahrenheitischen. Vermittelst dieser Angaben fand ich die Refraction = 9′ 25″, 98, also beynahe um 6″ größer, als die beobachtete.

Um die Rechnung nach den Beobachtungen des Bonne zu machen, suchte ich erst die Refraction, die zur gegebenen Distanz Z gehört, durch die Gleichung, log sin (85° 18′ 5″ — 6, 4R) = 9, 9992016 + log sin 85° 18′ 5″ (§. 18), dieselbe ist = 10′ 22″ 9 = R.

Diese Beobachtungen sind für 28 Zoll und T = 1128, 854, oder den 55 Grad des Fahr. Thermometers gemacht, also 28 : 1, 0062254 = H; Ferner ist h = 27, 5 : 1, 009347 = und t = 1204, 437. Hieraus erhält man $r = \frac{R.T.}{H} \frac{h}{t} = 9' \, 30'', 6$, welche um 10″, 6 größer ist als die beobachtete Refraction.

In den Bradleyschen Tafeln findet man die Refraction R = 10′ 26″, 4, für Z = 85° 18′ 5″, für die Barometerhöhe von 30 Zollen, also H = 30 : 1,0062254, und den 55 Grad des Thermometers. Nun ist h = 29, 207 : 1, 009347, und t = 1204, 437, wie zuvor; hierdurch findet man die Refraction r = 9′ 29″, also um 9″ größer, als die beobachtete.

In der zweyten Beobachtung des le Monnier, war der Abstand des α Capellae vom Zenith oder Z = 85° 15′ 45″, die Thermometerhöhe = 10° unter dem o des Reaum.

Reaum. Thermometer, oder beym 8° des Fahrenheitschen; die Barometerhöhe 28 par. Zolle, oder 29, 74 englische Zolle. Zufolge dieser Angaben, habe ich folgende Resultate gefunden:

		Beobachtete Refraction.	Fehler.
Piazzi	11′ 23″		+ 8
Bonne	11′ 31″ 9	11′ 15″	+ 16, 9
Bradley	11′ 29″ 6		+ 14, 6

§. 26. Es erhellet aus diesen Resultaten, daß die Refractionen nach den Beobachtungen zu Palermo mit den Parisischen besser übereinstimmen, als die Bradleyschen. Meine Hypothese bestätiget, daß die Strahlenbrechungen im Winter größer als im Sommer sind. Sollte dieser Versuch einigen Beyfall verdienen, so werde ich mich bemühen, diese Materie weitläuftiger auszuarbeiten.

Utrecht, den 17 December 1796.

II.

Angabe eines Doppelobjectivs, das von aller Zerstreuung der Strahlen frey ist; von G. S. Klügel, Prof. zu Halle.

1. In einer Abhandlung, die der Göttingischen Gesellschaft der Wissenschaften von mir überreicht ist (woraus ein Auszug in den Götting. gel. Anz. 1796. 47. St.) habe ich eine neue, sehr verbesserte Berechnung eines vollkommenen

menen Doppelobjectivs mitgetheilt. Ich glaube Künstlern und Liebhabern der praktischen Optik einen Dienst zu erzeigen, wenn ich die Resultate meiner Berechnung auch durch dieses Archiv ihnen bekannt mache. Zugleich wird es nöthig seyn, einige Erläuterungen darüber beyzufügen.

2. Die dioptrischen Rechnungen haben überhaupt den Mathematikern viele Schwierigkeit gemacht, insbesondere aber die Untersuchungen über die Einrichtung eines aus zwey oder drey Linsen zusammengesetzten Objectivs, wodurch die gleichartigen sowohl, als die ungleichartigen Strahlen so wenig als möglich zerstreut werden. Die Abhandlungen von Clairaut, d'Alembert, Klingenstierna, Boscovich, müssen auch einen standhaften Leser ermüden, und geben am Ende doch keine befriedigende Resultate. Euler war der erste, der Licht in die Dioptrik brachte. Dennoch hatte der zweyte Theil seines Werks über diese Wissenschaft, der von dem Bau der Fernröhre handelt, eine Umarbeitung nöthig, vornemlich wegen der zusammengesetzten Objective. Das ist in einer Abhandlung in den Comm. Petrop. novis. T. XVIII. geschehen, die in dieser Materie eine Hauptschrift ist. Ich habe nach Anleitung dieses großen Meisters eine Theorie der Dioptrik, mit einer ausführlichen Anwendung auf die optischen Werkzeuge, verfaßt *), die beynahe alles leistet, was man von einer allgemeinen Theorie bey diesem Gegenstande fordern kann. Ich glaubte auch eine Zeitlang, daß sie für die Ausübung sicher genug seyn möchte. Allein hier hatte ich zuviel von ihr erwartet.

3. Die Schuld liegt an der Beschaffenheit des Gegenstandes. Erstlich ist das unveränderliche Verhältniß der

*) Analytische Dioptrik. Leipzig, 1778. 4.

Brechung gleichartiger Strahlen nicht das Verhältniß Winkel sondern ihrer Sinus. Dieses nöthigt, Sinus ch ihre Winkel näherungsweise auszudrücken, oder auf ere Art Formeln für die Lage des Strahls zu suchen, nicht völlig genau sind. Bey einzelnen Brechungen n man damit zufrieden seyn, allein bey mehreren Bre- ngen kann durch dieses Verfahren eine beträchtliche Ab- chung entstehen. Denn es ist zweytens zu bemer- , daß eine kleine Veränderung in der Vereinigungs- ite der einfallenden Strahlen schon bey einer einzelnen chung eine beträchtliche Veränderung in der Vereini- gsweite der gebrochenen Strahlen nach sich ziehen kann, bey mehrern Brechungen noch vielmehr dieses verur- t. Dazu kommt drittens, daß durch die Abwei- ng der Randstrahlen nicht allein ihr Durchschnittspunkt der Axe der Linsen, oder der Abstand von der nächsten chenden Fläche geändert wird, sondern auch der folgen- Einfallswinkel, wodurch die Abweichung auf eine sehr htheilige Art zunehmen kann.

4. Weil kleine Veränderungen in der Vereinigungs- te der einfallenden Strahlen beträchtliche Veränderun- im der Lage der gebrochenen Strahlen nach sich ziehen nen, so kann auch die Dicke der Gläser, die ohne große itläuftigkeit sich nicht mit in die Rechnung bringen läßt, e merkliche Unrichtigkeit verursachen. Die Veränderun- in der Lage der ungleichartigen Strahlen, die daher ent- hen, sind zwar gleichnamig, aber nicht gleich groß. y den Randstrahlen hat die Dicke der Gläser Einfluß vohl auf ihren Durchschnitt mit der Axe, als auf den nfalls- und Brechungswinkel.

5. Noch ein Umstand, wofür die Dioptrik zwar ht verantwortlich ist, worauf sie aber doch Rücksicht nehmen

nehmen muß, ist der Unterschied der Beschaffenheit des Glases, des, welches der Rechner voraussetzt, und des, welches der Künstler verarbeitet. Darum sollte die Berechnung nach ihren gemachten Annahmen sehr genau seyn, damit nicht die Abweichung der Rechnung und die Abweichung wegen der Beschaffenheit des Glases die Fehler häufen. Dieses ist noch aus dem Grunde nöthig, weil der Künstler nicht ganz genau die vorgeschriebenen Maaße treffen wird, wenn auch die Glasarten die angenommene Beschaffenheit haben.

6. In der analytischen Dioptrik habe ich zweyerley Einrichtungen eines Doppelobjectivs angegeben. Die eine stimmt mit derjenigen überein, die Euler in den Petersburger Commentarien berechnet hat, wenn daselbst ein Fehler der Formel in einem Vorzeichen verbessert wird. Zur Vergleichung mit meiner neuen Berechnung führe ich die Maaße zu diesem Objectiv hier an.

Die Brennweite des zusammengesetzten Objectivs sey = 10000, so ist

I.	die Brennweite der vordern convexen Linse	1985
	der Halbmesser jeder Fläche	2102
II.	die Brennweite der hintern concaven Linse	2222
	der Halbmesser der Vorderfläche	1768
	der Halbmesser der Hinterfläche	4756
III.	die Entfernung der Mittel beider Linsen	165

Zwey von diesen Größen sind in der letzten Zifer hier genauer angegeben, als in der Rechnung §. 345. der anal. Dioptr. geschehen ist.

7. Es ist hiebey das Brechungsverhältniß der mittlern Strahlen in Kronglase wie 1, 53 : 1, in Flintglase wie 1, 58 : 1 angenommen. Das Verhältniß für die an-

mit-

ſten und am wenigſten brechbaren Strahlen iſt nicht
nittelbar dabey gebraucht, ſondern das $\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1}$
n : 1 und n' : 1 die Brechungsverhältniſſe für die mitt-
n Strahlen, und dn; dn' die Veränderungen von n
n' für die äuſſern bedeuten. Es iſt angenommen, daß
$\frac{dn}{n-1} : \frac{dn'}{n'-1} = 3 : 4$ ſey. Man ſetzt dn = 0,00636
ſt dn' = 0,00928.

8. Um den Gang der Strahlen genau zu berech-
, muß noch die Dicke der Gläſer beſtimmt werden, die
der allgemeinen Rechnung weggelaſſen iſt. Man neh-
die halbe Dicke der Convexlinſe = 50; der Concav-
= 20, ſo iſt das Intervall der innern Flächen
95, da das Intervall der Mittel = 165 iſt. Die
be Breite der Convexlinſe iſt = 456, wozu der gehö-
Winkel = 12° 31' iſt. Doch iſt nicht die Meynung,
dieſe ganze Oeffnung gebraucht werde. Euler nimmt
Durchmeſſer der Oeffnung = 884, der Hälfte des
nſten Halbmeſſers der brechenden Flächen gleich. Es
mt aber nicht auf dieſen an, ſondern auf die Einfalls-
Brechungswinkel.

9. Ich habe den Weg der mittlern und der am mei-
brechbaren Strahlen, die der Axe ganz nahe durchge-
, oder ohne Abweichung wegen des Brechungsverhält-
es; dann auch den Weg der Strahlen von mittlerer
chbarkeit, die in der Entfernung eines Bogens von
von der Axe auffallen, berechnet. Der Weg der er-
n iſt nach einer bekannten Formel für die Brechung
ch eine Fläche beſtimmt; der andern iſt durch trigono-
riſche Rechnung gefunden, wobey die Winkel in Se-

 cunden

cunden berechnet, und bey den Lineargrößen nach Centesimaltheilchen mitgenommen sind. Die Resultate sind in folgenden beiden Tabellen enthalten. Die Vereinigungsweiten der gebrochenen Strahlen sind von der brechenden Fläche an gerechnet.

Vereinigungs-Weiten.	ohne Abweichung. die mittlern Strahlen.	ohne Abweichung. die brechbarsten Strahlen.	die abweichenden mittlern Strahlen.	Abweichung.
I.	6068	6021	6029	— 39
II.	1966	1943	1859	— 107
III.	7660	7648	7767	+ 107
IV.	11710	11767	12120	+ 410

Brechung.	Einfallswinkel.	Brechungswinkel.
I.	10° 0′ 0″	6° 31′ 1″
II.	13 25 17	20 48 6
III.	22 6 59	13 47 7
IV.	1 34 54	2 29 59

10. Es erhellet aus dieser Berechnung, daß die Dicke der Linsen eine beträchtliche Veränderung in der Brennweite des zusammengesetzten Objectivs hervorbringt, wobey inzwischen der Unterschied der Brennweiten für die mittlern und die brechbarsten Strahlen nicht beträchtlich ist, nur $\frac{1}{206}$ der Brennweite. Allein die Abweichung der an dem Rande durchgehenden Strahlen von denen, die durch die Mitte der Linsen gehen, ist sehr beträchtlich. Die Ursache liegt erst-

erstlich in den großen Einfalls- und Brechungswinkeln an der zweyten und dritten brechenden Fläche. Die Formel, nach welcher die Abweichung gehoben seyn sollte, ist für so große Winkel nicht zureichend genau. Zweytens hätte bey der dritten Brechung gar keine Abweichung bleiben sollen, weil die vierte, wegen der kleinen Winkel des Strahls mit dem Halbmesser der Fläche, gar keiner merklichen Abweichung unterworfen ist. Die Abweichung + 410 rührt beynahe ganz und allein von der Abweichung + 107 bey der dritten Brechung her.

11. Es muß daher die vordere Linse ungleichseitig gemacht werden, und der Halbmesser ihrer Hinterfläche größer seyn, als der von der Vorderfläche, damit der zweyte Einfalls- und Brechungswinkel kleiner werden. Ich habe auch bey der zweyten Angabe eines Doppelobjectivs (Anal. Dioptr. §. 354.) den Halbmesser der Vorderfläche etwas kleiner gemacht, als den von der Hinterfläche, in dem Verhältnisse von 191 : 233. Dieses ist aber nicht zureichend. Am besten ist es, die Halbmesser so zu bestimmen, daß die Winkel des auffallenden und ausfahrenden Strahls mit den Halbmessern sich einander nahe gleich seyn. Dadurch werden die Winkelabweichungen auf beiden Seiten zusammengenommen ein Kleinstes. Die Längenabweichung auf der Axe durch das erste Glas wird zwar alsdann nicht ein Kleinstes; allein es ist an einer Vergrößerung der Längenabweichung weniger gelegen, als an einer Vergrößerung der Winkelabweichung, die zu ihrer Hebung wieder einen größern Einfallswinkel an der dritten brechenden Fläche erfordert. Je kleiner die Einfalls- und Brechungswinkel gemacht werden, desto weniger hat man eine nachtheilige Abweichung der äussern Strahlen zu fürchten, wenn die der mittlern gehoben ist.

12. Es sey der Abstand des leuchtenden Punkts oder eines Vereinigungspunktes der Strahlen vor einer biconvexen Linse $= a$; der Vereinigungspunkt hinter der Linse $= \alpha$, das Brechungsverhältniß $= n : 1$; der Halbmesser der vordern Fläche $= f$, der hintern $= g$, so ist, wenn der Einfallswinkel der auffallenden Strahlen dem Brechungswinkel der ausfahrenden gleich ist, nahe

$$f = \frac{2(n-1)a\alpha}{(2-n)\alpha + na}; \quad g = \frac{2(n-1)a\alpha}{(2-n)a + n\alpha};$$

und, wenn a unendlich groß ist,

$$f = \frac{2(n-1)}{n}\alpha; \quad g = \frac{2(n-1)}{2-n}\alpha.$$

z. B. wenn $n = 1,53$, so ist $f : g = 47 : 153$.

13. Die Abweichung bey der Brechung durch die erste Linse muß durch die Abweichung bey der dritten Brechung gehoben werden, so, daß bey dieser gar keine, oder eine sehr geringe bleibe. Die Abweichung bey der dritten Brechung entsteht, theils von der Abweichung bey den beyden vorhergehenden, theils bey dieser unmittelbar. Es sey a der Abstand des Vereinigungspunktes der auffallenden Strahlen hinter der dritten brechenden Fläche; δ der Abstand des Vereinigungspunktes der gebrochenen Strahlen, beide ohne die Abweichung; Δa und $\Delta\delta$ die Veränderungen derselben durch die Abweichung bey den beiden ersten Brechungen; $n : 1$ das Brechungsverhältniß, so ist nahe $\Delta\delta = \frac{\delta^2}{na^2}\Delta a$. Ferner sey x der Abstand des Einfallspunktes von der Axe, so ist die Abweichung, welche die dritte brechende Fläche unmittelbar verursacht, nahe

=

$$= + \frac{(n\delta - a)(\delta - a)^2 x^2}{2(n-1)^2 a^3 \delta} \text{ *)}.$$

Weil Δa subtractiv ist, also auch $\Delta\delta$ es ist, so setze man, um die Abweichung zu vernichten,

$$\frac{\delta^2}{na^2}\Delta a = \frac{(n\delta - a)(\delta - a)^2 x^2}{2(n-1)^2 a^3 \delta},$$

oder:

$$2(n-1)^2 a\delta^3 . \Delta a = n(n\delta - a)(\delta - a)^2 x^2.$$

Hier sind a und Δa durch die für die Convexlinse angestellte Rechnung bekannt, und x wird nahe genug durch die Lage des Strahls nach der zweyten Brechung gefunden. Folglich wird δ durch Auflösung einer cubischen Gleichung erhalten, oder bequemer der Quotient $\frac{\delta}{a}$, um daraus δ zu berechnen. Aus den beiden Vereinigungsweiten a und δ ergiebt sich der Halbmesser der brechenden Fläche, vermittelst der Gleichung, $r = \left(\frac{r}{na} - \frac{n-1}{n}\right)\delta$. Weil die gebrauchten Formeln nicht ganz genau sind, so muß man durch numerische Rechnung die noch übrige Abweichung suchen, und durch eine Veränderung des Halbmessers sie gänzlich heben. Die Bestimmung des Halbmessers ist freylich etwas beschwerlich, allein, wenn sie einmal für gewisse Annahmen der Brechungsverhältnisse und anderer Größen gemacht ist, so wird man für andere Fälle den Halbmesser durch Versuche mit einigen Werthen leichter finden können, bey welchen zuerst nicht die völlige Schärfe nöthig ist.

 Man

*) Analyt. Dioptrik. §. 174, wo a negativ zu nehmen; und $k = 1$ ist.

Man berechne nämlich für einen nach Gutdünken angenommenen Halbmesser der dritten Fläche, r, die Vereinigungsweite der mittlern Strahlen δ ohne die Abweichung, und die Vereinigungsweite d derselben mit der Abweichung, ferner für einen Halbmesser, $r + \Delta r$, die Vereinigungsweiten $\delta + \Delta\delta$ und $d + \Delta d$. Es sey $\Delta\delta = p\Delta r$ und $\Delta d = q\Delta r$, so kann man für kleine Veränderungen die Factoren p, q, als unveränderlich ansehen. Diese findet man durch numerische Rechnung aus den zwey berechneten Werthen von δ und d. Nun bedeute Δr denjenigen Werth der Veränderung von r, wodurch die beiden Vereinigungsweiten gleich werden, so ist $\delta + p\Delta r = d + q\Delta r$, und $\Delta r = \frac{\delta - d}{q - p}$. Sind die Veränderungen des Halbmessers und der Vereinigungsweiten ungleichnamig, so ist $\Delta r = \frac{\delta - d}{p - q}$, und es ist Δr subtractiv, wenn d größer als δ, und p größer als q ist.

14. Nachdem der Halbmesser der dritten brechenden Fläche bestimmt ist, berechne man den Weg der am meisten und am wenigsten brechbaren Strahlen durch die drey ersten Brechungen ohne die Abweichung. Die Vereinigungsweiten der auf die vierte Fläche fallenden Strahlen geben mittelst des Halbmessers derselben die Vereinigungsweite der gebrochenen, welche für beide Arten dieselbe ist. Dadurch erhält man eine Gleichung für den Halbmesser. Die Vereinigungsweiten der auffallenden Strahlen seyn a und α, die Brechungsverhältnisse m : 1 und μ : 1, der Halbmesser der brechenden Fläche = r, so ist

$$(\mu - m)a\alpha = (\mu a - m\alpha)r.$$

Solchergestalt ist das ganze Doppelobjectiv bestimmt, so daß beide Arten der Zerstreuungen völlig gehoben sind.

15. Es

15. Es sey nun, nach Beguelins Beobachtungen, das Brechungsverhältniß

in Kronglas für die violetnen Strahlen	1,53761 : 1
für die mittleren	1,53175 : 1
für die rothen	1,52588 : 1
in Flintglas für die violetnen Strahlen	1,59058 : 1
für die mittlern	1,58121 : 1
für die rothen	1,57184 : 1

Für diese Verhältnisse habe ich folgende Maaße zu einem vollkommenen Doppelobjectiv gefunden:

I. Brennweite der Convexlinse von Kronglas für die mittlern Strahlen	10000
Halbmesser der Vorderfläche	6943
- - Hinterfläche	22712
Dicke	250
Durchmesser der ganzen Oeffnung	3216
II. Brennweite der Concavlinse von Flintglas	14074
Halbmesser der Vorderfläche	14850
- - Hinterfläche	18211
Dicke	100
III. Abstand der innern Flächen beider Linsen	100
IV. Brennweite des Doppelobjectivs	32056
V. Die ganze Oeffnung der vordern Linse in Graden	26° 48′

Die Maaße haben keine bestimmte Einheit. Aus der verlangten Brennweite des Doppelobjectivs, welche hier 32056 Theile hat, werden alle Maaße, für die gegebene Einheit, als Zolle, durch die Regel de tri gefunden. Von dem Falle, da das Glas zu der Convexlinse

 nicht

nicht die gehörige Dicke hat, wird unten Erwähnung geschehen.

16. Den Weg der Strahlen stellen folgende beide Tabellen dar. Die Vereinigungsweiten der gebrochenen Strahlen sind von der brechenden Fläche an zu nehmen.

Vereinigungsweiten.	ohne Abweichung.			abweichende mittlere.
	violetne.	mittlere.	rothe.	
I.	19858	20000	20146	19871
II.	9795	9904	10015	9753
III.	25099	25154	25210	25154
IV.	32056	32056	32056	32054

Brechung.	Einfallswinkel.	Brechungswinkel.
I.	10° 0′ 0″	6° 30′ 34″
II.	6 30 58	10 0 37
III.	11 34 31	7 17 26
IV.	1 0 52	1 36 15

Die größern Winkel sind nur halb so groß als bey der obigen Einrichtung (§. 9). Dieses ist wegen der ungleichartigen Strahlen wichtig, deren Abweichung nicht ganz gehoben ist. Bey größern Winkeln wird auch die Abweichung derselben größer seyn, und die Längenabweichung des Strahls nach der vierten Brechung kann leicht sehr beträchtlich werden, da er die Axe unter einem kleinen Winkel

Winkel schneidet. Der Durchschnittswinkel ist für die mittlern Strahlen = 2° 6′ 37″.

17. Es sey die Brennweite des Doppelobjectivs von der letzten brechenden Fläche an gerechnet = 10000, so sind

die Brennweiten der Gläser:

I. 3119$\frac{1}{2}$. II. 4390.

die Halbmesser der brechenden Flächen:

I. 2166. II. 7085. III. 4632$\frac{1}{3}$. IV. 5631.

Dicke der Convexlinse = 78. Dicke der Concavlinse = 31. Abstand der innern Flächen beider Gläser = 31. Ganze Oeffnung der Convexlinse = 1003.

Diese Maaße weichen ein weniges von den in meiner Abhandlung angegebenen ab, weil ich bey der für diesen Aufsatz wiederholten Rechnung noch Bruchtheile mitgenommen habe, die bey der ersten Rechnung bey Seite gesetzt sind.

18. Das hier berechnete Doppelobjectiv verträgt eine sehr große Oeffnung, fast die ganze der Vorderlinse, da die Abweichung für einen Einfallswinkel von 10 Grad an der ersten brechenden Fläche gehoben ist. Für kleinere Einfallswinkel kann schwerlich eine Abweichung nach der letzten Brechung Statt haben, oder wird doch nur unbeträchtlich seyn. Für größere Einfallswinkel wird allerdings eine Abweichung eintreten; allein man wird ohne Zweifel einen Einfallswinkel von 12 Grad zulassen können, wozu die Oeffnung des Vorderglases 901 ist. Die Erfahrung wird bey einem nach den angegebenen Maaßen ausgearbeiteten Objectiv lehren, wie groß die Oeffnung genommen werden könne.

19. Die gefundene Einrichtung weicht von der oben (§. 6) angeführten sehr ab. Eine Hauptursache ist die Verschiedenheit der Brechungsverhältnisse. Wenn die Dicke der Gläser hintan gesetzt, der Abstand der Mitten der Gläser aber so gelassen wird, wie er hier angenommen ist, und man nun nach den Formeln §. 341. der Analyt. Dioptrik die Brennweiten der beiden Gläser berechnet, die Brennweite des Doppelobjectivs = 10000 gesetzt, so findet sich die Brennweite des Converglases = 3052, und die Brennweite des Concavglases = 4218.

20. Die angenommene Dicke der Gläser kann eine kleine Abweichung der Ausführung von der Rechnung nothwendig machen. Wenn z. B. die Dicke der Glastafel zu der Converlinse nur wenig über 2 Lin. beträgt, so daß diese nur 2 Lin. dick werden kann, so ist die Brennweite des Objectivs für diese Dicke 256 Lin. oder 21 Zoll 4 Lin. Für eine größere Brennweite muß daher, wenn man kein dickeres Glas erhalten kann, eine andere Rechnung angestellt werden, in welcher die Dicke der Converlinse in Verhältniß gegen ihre Brennweite kleiner genommen wird. Inzwischen mag auch in diesem Falle unsere Construction beybehalten werden. Denn bey einer geringen Veränderung in der Lage der brechenden Flächen, als hier sich ereignet, werden die Vereinigungspunkte der ungleichartigen Strahlen fast ganz auf dieselbe Art verrückt, so daß, wenn gleich das Bild des Objects ein weniges seine Stelle verändert, dennoch die Deutlichkeit von der Farbenzerstreuung gar nichts leidet. Die Strahlen, die um den Rand durchgehen, leiden auch sehr nahe dieselbe Veränderung ihrer Lage, als die der Axe nahen; der Unterschied ist nur der zweyer kleinen Größen, nämlich der Abweichungen wegen der Gestalt der brechenden Flächen, die wir möglichst klein gemacht haben. Inzwischen wäre

es

gut, für große Brennweiten die Rechnung besonders
machen, theils um sich von der Abweichung zu versi-
n, die eine relativ geringere Dicke der Gläser verur-
t, theils auch um bequemere Maaße zu versuchen.
in bey einer relativ geringern Dicke werden die Einfalls-
Brechungswinkel kleiner, und man hat also mehr Frey-
, die Halbmesser der brechenden Flächen zur Bequem-
keit der Ausarbeitung zu bestimmen, ohne befürchten
dürfen, daß die Abweichung der Brechungskräfte und
Ausführung nachtheilig werden mögen, oder daß die
weichung wegen der Gestalt für die ungleichartigen
rahlen merklich verschieden ausfalle. Ich werde zu ei-
andern Zeit eine solche Rechnung vornehmen. Gleich-
s ist es für kleine Brennweiten nöthig, den Weg der
rahlen für relativ größere Dicken der Gläser zu berech-
, damit die Oeffnungen groß genug ausfallen. Der
lligkeit wegen könnte man bey diesen die Vorderlinse
chseitig machen, und sich dagegen allenfalls eine kleine
weichung der Strahlen wegen der Gestalt gefallen lassen.

21. Die Uebereinstimmung des Erfolgs in der Aus-
rung mit der Rechnung, hängt theils von der Uebere-
ft der angewandten Glasarten mit den hier angenom-
nen, theils von der Genauigkeit des Künstlers in Befol-
ng der vorgeschriebenen Maaße ab. Eine kleine Ver-
iedenheit der Brechungsverhältnisse von den bey der
chnung gebrauchten, kann nicht nachtheilig seyn, weil in
n berechneten Objectiv alle Farbenzerstreuung gehoben
, und unser Auge keine geometrisch genaue Vereinigung
r Strahlen fordert. Würden die Brechungsverhältnisse
e gleichförmig geändert, so würde nur das Bild ver-
ckt, und die ungleichartigen Strahlen werden, wo nicht
nau, doch sehr nahe, in einen Punkt vereinigt werden.
on einem Unterschiede in der Farbenzerstreuung wäre et-
was

was mehr zu besorgen. Doch wird man durch eine Veränderung in dem Abstande der Gläser helfen können, da die allgemeine Rechnung, mit Weglassung der Dicke der Gläser, zeigt, daß eine Veränderung in dem Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse durch die Veränderung des Intervalls der Gläser wieder vergütet werden könne, so daß die Brennweite des Concavglases für die mittlern Strahlen dieselbe bleibt. Darum ist auch das Intervall größer gesetzt als es sonst nöthig gewesen wäre. Ist die Farbenzerstreuung durch das zweyte Glas geringer als angenommen ist, so ist dies nicht hinderlich, weil durch die Einrichtung des Glases alle ungleichartige Strahlen in einem noch größern Umfange vereinigt sind.

22. Am nachtheiligsten ist eine Abweichung an dem Vorderglase von der Annahme und der Vorschrift der Rechnung. Denn die Abweichung der mittlern, der Axe nahen Strahlen wird durch das zweyte Glas vergrößert, nahe in dem Verhältnisse der Quadrate der Vereinigungsweiten von der Mitte des Glases gerechnet, hier wie die Quadrate von 9754 und 32106, das ist, wie 1 : 10,8. Von dem Unterschiede der Farbenzerstreuung ist auch hier mehr zu fürchten, als von der Abweichung wegen der Gestalt des Glases, die nach unserer Rechnung ganz gehoben ist. Die abweichenden Strahlen ändern bey etwas andern Brechungsverhältnissen ihre Lage ohngefähr eben so, wie die an der Axe nahe hinfahrenden. Eine Veränderung des Abstandes der Gläser kann auch hier helfen. Oder man muß mehr als ein Convexglas schleifen, mit etwas verschiedenen Brennweiten, aber demselben Verhältnisse der Halbmesser, als hier angegeben ist. Am besten ist es, wenn der Künstler die Brechungsverhältnisse in seinen Glasarten genau kennt, woraus er selbst, oder ein Mathematikverständiger, die Maaße nach meiner Methode zu berechnen hat.

23. Die

23. Die Berechnung eines drenfachen Objec-s ohne alle Zerstreuung ist sehr mühsam. Die Aus-ung ist mißlich, da wegen der Beschaffenheit der arten und der Abweichung von der Vorschrift bey der arbeitung, die Fehler bey drey Gläsern sich weit mehr fen können, als bey zweyen. Ein vollkommenes Dop-jectiv hat den Vorzug der größern Helligkeit des Bil-estattet das dreyfache Objectiv einen größern Halb-er der ersten brechenden Fläche, ohne die Einfalls-Brechungswinkel nachtheilig groß zu machen, so n es dadurch in Absicht auf Helligkeit dem Doppelob-iv gleich kommen, oder gar es übertreffen. Sonst ist Vortheil, daß die Gläser des dreyfachen Objectivs ere Brennweiten haben, nur alsdann erheblich, wenn Abweichung wegen der Kugelgestalt nicht ganz gehoben Bey großen Brennweiten des Doppelobjectivs kann aber auch, wie vorher schon bemerkt ist, den messer der Vorderfläche des Convexglases relativ er machen, da in diesem Falle die Einfalls- und Bre-ngswinkel nur mäßig sind. Darinn hat das dreyfache jectiv einen eigenen Vorzug, daß die ungleichartigen rahlen, die von dem Rande des Objects durch die e des ersten Glases gehen, durch die zwey andern parallel gemacht werden können, so daß auch in Ab-t auf diese die Farbenzerstreuung unmerklich wird.

24. Das von mir gebrauchte Verfahren weicht g von dem ab, dessen sich Jeaurat in den Pariser moiren für 1770 bedient hat. Er hat hier Tafeln zur erfertigung, nicht allein gedoppelter und dreyfacher, son-n auch vier- und fünffacher Objective geliefert. Eine feines Doppelobjectivs besteht aus einer gleichseitig weren Linse von Venetianischem Glase, und einer Con-linse von Flintglas. Die Halbmesser der ersten drey

bre

brechenden Flächen sind sich gleich, der Halbmesser der vierten Fläche ist relativ beträchtlich groß. Die andere Art besteht aus einem convex-concaven Vorderglase von Flintglas und einem convexen Hinterglase von venetianischem Glase. Die Halbmesser der innern brechenden Flächen sind sich gleich, und die der äussern sind sich auch gleich, und viel größer als jene. Bey den andern Zusammensetzungen aus abwechselnden Linsen von den beiden Glasarten sind eben so die Halbmesser aller innern Flächen sich gleich, und die der beiden äussern ebenfalls. Die Winkel, welche die Halbmesser an den Brechungspunkten eines bestimmten Strahles mit der Axe machen, werden für die innern brechenden Flächen einander gleich genommen, und der Halbmesser der letzten Fläche wird so bestimmt, daß der Winkel des Halbmessers an dem Brechungspunkte mit der Axe, dem Winkel des Halbmessers der ersten Fläche mit der Axe ebenfalls gleich wird, und zugleich so, daß die ungleichartigen Strahlen parallel werden. Jeaurat bedient sich nicht der dioptrischen Formeln für Strahlen, die der Axe sehr nahe liegen, sondern er berechnet für zwey verschiedene Einfallswinkel an der ersten Fläche, den von 1° 0′ und den von 6° 50′, den Winkel des Strahls nach jeder Brechung mit der Axe. Die Rechnung ist empirisch, das ist, es wird durch arithmetische Versuche gefunden, wie groß der Winkel der Halbmesser an den Brechungspunkten der innern Flächen mit der Axe genommen werden müssen, damit der Halbmesser an dem letzten Brechungspunkte denselben Winkel mit der Axe mache, welcher für die erste brechende Fläche angenommen ward. Die ungleichartigen Strahlen werden bey dieser Methode eigentlich nicht in einen Brennpunkt zusammengebracht, wie Jeaurat annimmt, sondern nur parallel gemacht. Auch sind die Brechungspunkte für die ungleichartigen Strahlen nicht dieselben, wie Jeaurat stillschwei-

igend voraussetzt. Wegen der kleinen hier vorkom-
en Winkel ist die Rechnung etwas mißlich, da die
n Fehler sich häufen können. Die Dicke der Gläser
von Jeaurat in Betracht gezogen, allein, wie es
t, in der That nur bey dem ersten Glase. Denn es
ten bey einer gegebenen Dicke der Gläser die Winkel
i den Brechungspunkten gehörigen Halbmesser mit der
nicht genau die angenommene Grösse erhalten. Die
r sollen sich fast berühren, daher in der Rechnung
bstand ihrer entgegengesetzten Flächen als null betrach-
ird. Dieser Umstand möchte auch einige kleine Ab-
ung verursachen. Was aber als das wichtigste gegen
rats Verfahren zu erinnern ist, ist: daß er die He-
der Abweichung wegen der Kugelgestalt ganz vernach-
t. Er befriedigt sich damit, daß die Abweichung an
Linse durch die an der folgenden, wegen ihrer entge-
esetzten Brennweiten vermindert wird, und hält zur
ng der Abweichung, wenn sie möglich sey, für das
ge Mittel die Vergrösserung der Halbmesser der bre-
en Flächen. Es ist aber, bey den willkührlichen
hmen, die Jeaurat gemacht hat, sehr zweifelhaft, ob
ie Abweichung wegen der Kugelgestalt hinlänglich klein
en. Von seiner Construction eines Doppelobjectivs
einem convex-concaven Vorderglase und convexen
erglase führt er an, daß die Maaße genau dieselben
, als er sie an einem Objectiv gefunden, das vortreff-
ist. Dieses ist begreiflich, weil hier, wegen der Lage
drey ersten Flächen kleine Einfalls- und Brechungs-
kel vorkommen, und die letzte Fläche, wo diese Winkel
er werden, einen großen Halbmesser hat. Von einem
fachen Objectiv, das nach seiner Rechnung verfer-
ist, und 4 Zoll 10 Lin. Brennweite hat, rühmt er,
es noch eine etwas größere Oeffnung vertrage, als
besten englischen Perspective von 6 Zoll, die eine
Oeff-

Oeffnung von 15 Linien bekommen, da sein Objectiv 18 Lin. breit sey.

25. Die Beobachtungen, welche Jeaurat über die Brechungsverhältnisse des Venetianischen und des Flintglases angestellt hat, sind merkwürdig. Das dazu angewandte Verfahren ist folgendes. Es ward von jeder dieser Glasarten ein halbes Converglas von 29 Lin. im Durchmesser und 2 Lin. Dicke aus derselben Schale geschliffen; beide wurden zu einem zweytheiligen ganzen Glase verbunden; das Bild der Sonne durch die eine Hälfte, indem die andere bedeckt war, ward auf einem matten Glase aufgefangen. Der Abstand des Bildes von dem Glase gab die Brennweite der mittlern Strahlen. Die Brennweite der rothen und violetnen Strahlen zu erhalten, ward ein rothes und violetnes ebenes Glas nahe vor das Bild der Sonne gestellt. Aus den Brennweiten ergeben sich die Brechungsverhältnisse leicht.

26. An dem Venetianischen Glase, wovon der Cubiczoll 950 Grän wiegt, ist

das Brechungsverhältniß		der rothen Strahlen	1,[illegible]258:1
—	—	der mittlern	1,5298:1
—	—	der violetnen	1,5433:1.

An dem englischen Krystall- oder Flintglase, wovon der Cubiczoll 1215 Grän wiegt, ist

das Brechungsverhältniß		der rothen Strahlen	1,5920:1
—	—	der mittlern	1,5973:1
—	—	der violetnen	1,6229:1.

Das Zerstreuungsverhältniß ist 175 : 309.

Für die Strahlen, die hier die mittlern genannt werden, fällt das Brechungsverhältniß viel näher an das für die

die rothen. Es sind eigentlich diejenigen, deren Brechungsverhältniß aus dem Abstande des Bildes der vereinten ungleichartigen Strahlen geschlossen ist. Man muß sie ganz bey Seite setzen. Ich werde künftig die Berechnung eines Objectivs nach diesen Brechungsverhältnissen vornehmen, damit man sehe, was ein Unterschied der Brechungsverhältnisse für Einfluß auf die Maaße zu dem Objectiv habe.

III.

Buzengeiger von einigen merkwürdigen Eigenschaften der Binomial-Coefficienten.

La Grange ist, meines Wissens, der erste, der den merkwürdigen Satz von den Quadraten der Binomial-Coefficienten,

$$1^2 + \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n-1)^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} \ldots + 1^2$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots 2n} \cdot 2^{2n}$$

und zwar zufälliger Weise, gefunden. Er fand nemlich für eine gewisse Wahrscheinlichkeit zuerst den einen, und für diese nemliche Wahrscheinlichkeit hernach auch den andern Ausdruck, woraus er schloß, daß sie gleich seyen. Einen analytischen Beweis aber, sagt er, hätte er noch nicht gefunden, und ein solcher scheine auch ziemlich versteckt zu seyn. Die Abhandlung steht in den Berliner Memoiren.

Mein erster Versuch, diesen Satz zu beweisen, war, daß ich die beyde Reihen

$$1 - {}^n\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{B} \ldots \pm 1$$

$$1 - {}^m\mathfrak{A} + {}^m\mathfrak{B} \ldots \pm {}^m\mathfrak{N} \quad ^{*)}$$

von denen die erste gleich o, mit einander multiplicirte, und das Produkt in folgende Form

*) Für mehrere Leser wird es nicht überflüssig seyn, zu erinnern daß hier

$$1,\ {}^m\mathfrak{A},\ {}^m\mathfrak{B},\ {}^m\mathfrak{C} \ldots {}^m\mathfrak{N} \ldots {}^m\overset{\pm r}{\mathfrak{N}} \ldots {}^m\overset{a-1}{\mathfrak{A}} \ldots {}^m\overset{2a-1}{\mathfrak{A}} \ldots$$

zum Potenzexponenten m gehörige Binomial-Coefficienten, und zwar, nach der Ordnung wie hier stehen, den 0ten, 1sten, 2ten, 3ten ... nten ... (n±r)ten ... aten ... 2aten ... bedeuten; wo also

$${}^m\overset{\pm r}{\mathfrak{N}} = \frac{m.m-1 \ldots m-n \mp r+1}{1.2 \ldots\ldots n \pm r}$$

Herr Buzengeiger hat sich nehmlich, in dieser Abhandlung durchgängig, der von mir für diese Coefficienten eingeführten Zeichen (Nov. Syst. Perm. p. XL, 9) bedient, auf deren Bequemlichkeit, in Absicht auf kurze Darstellung und leichte Umwandlung in alle Gestalten, Herr Professor Kluigel den Verfasser zuerst aufmerksam gemacht hat. Durch Beyhülfe dieser Zeichen kann man den verwickeltsten Verbindungen und Relationen dieser Coefficienten leichter nachspüren und ihre Werthe aufinden; wovon auch gegenwärtiger lehrreiche Aufsatz eine überzeugende Probe giebt. Mehrere solcher Relationen und Verbindungen habe ich mir vorlängst zu meinem Privatgebrauche entwickelt und gesammelt; dergleichen auch M. Töpfer (Comb. Anal. S. 167—171.) und Herr Prof. Rothe (Theor. binom. — univers. demonstr. 1796. §§. IV, V, VI, VIII) aufgestellt haben; auch Herr Prof. Klügel, nach einem mir ohnlängst darüber zugesendeten Aufsatze. Davon, und wie sich dergleichen Zusammensetzungen unmittelbar aus der Construction solcher Coefficienten, mit Zuziehung der einfachsten combinatorischen Verfahren, ableiten lassen, bey gegebener Gelegenheit, und vielleicht bald, an einem andern Orte.

Hindenburg.

$$\left.\begin{array}{l} 1^2 + {}^n\mathfrak{A}.{}^m\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{B}.{}^m\mathfrak{B} \ldots\ldots + 1.{}^m\mathfrak{N} \\ - {}^n\mathfrak{A}(1) + {}^n\mathfrak{B}(1 - {}^m\mathfrak{A}) - {}^n\mathfrak{C}(1 - {}^m\mathfrak{A} + {}^m\mathfrak{B}) \\ - {}^m\mathfrak{A}(1) + {}^m\mathfrak{B}(1 - {}^n\mathfrak{A}) - {}^m\mathfrak{C}(1 - {}^n\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{B}) \end{array} \text{etc.}\right\} = 0$$

brachte, woher man, weil

$$\left.\begin{array}{l} 1 - {}^m\mathfrak{A} = - {}^{m-1}\mathfrak{A}\;;\; 1 - {}^m\mathfrak{A} + {}^m\mathfrak{B} = {}^{m-1}\mathfrak{B} \\ 1 - {}^n\mathfrak{A} = - {}^{n-1}\mathfrak{A}\;;\; 1 - {}^n\mathfrak{A} + {}^n\mathfrak{B} = {}^{n-1}\mathfrak{B} \end{array}\right. \text{etc.}$$

durch leichte Rechnung erhält,

$$1.1 + {}^n\mathfrak{A}.{}^m\mathfrak{A} \ldots + 1.{}^m\mathfrak{N} = \frac{n+m}{m}(1 + {}^n\mathfrak{A}.{}^{m-1}\mathfrak{A}$$
$$+ {}^n\mathfrak{B}.{}^{m-1}\mathfrak{B} \ldots + 1.{}^{m-1}\mathfrak{N})$$

woraus sogleich folgt

$$1.1 + {}^n\mathfrak{A}.{}^m\mathfrak{A} \ldots + 1.{}^m\mathfrak{N} = {}^{m+n}\mathfrak{N}$$

Aus welchem der Satz von La Grange auf eine leichte Art, wenn man $m = n$ setzt, hergeleitet werden kann.

Nachher, als ich diese Rechnungen längst zurückgelegt hatte, fand ich in dem Band von 1781 der Act. Petrop. zwey Abhandlungen von Euler: de mirabilibus proprietatibus unciarum binom. etc., worinn er auch den erstern Satz aus dem letztern allgemeinen herleitet, welchen er, mittelst seiner bekannten Bezeichnung der Binomial-Coefficienten, auf eine sehr einfache Art beweist. Da Euler diese Eigenschaften merkwürdig fand, so wurde ich bewogen, auch meine Rechnungen wieder hervorzusuchen, und sie hier mitzutheilen.

§. 1. Es ist bekannt, daß, wenn

$$y, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y} \ldots\ldots \overset{n}{y} \ldots$$ *)

eine Reihe von Grössen bezeichnet, und man setzt

*) Die Vorzüge der Bezeichnung solcher Glieder durch die von mir eingeführten, hier überschriebenen, Distanzexponenten, vor der gewöhnlichen, habe ich (Heft I. S. 93, 94 und 100, b) ausführlich dargethan. Die Ausdrücke, die hier in

$$\overset{1}{y}-y=\Delta y\;;\;\Delta\overset{1}{y}-\Delta y=\Delta^2 y\;;\;\Delta^2\overset{1}{y}-\Delta^2 y=\Delta^3 y$$

$$\overset{2}{y}-\overset{1}{y}=\Delta\overset{1}{y}\;;\;\Delta\overset{2}{y}-\Delta\overset{1}{y}=\Delta^2\overset{1}{y}\;;\;\Delta^2\overset{2}{y}-\Delta^2\overset{1}{y}=\Delta^3\overset{1}{y}\text{ u.s.w.}$$

$$\overset{3}{y}-\overset{2}{y}=\Delta\overset{2}{y}\;;\;\Delta\overset{3}{y}-\Delta\overset{2}{y}=\Delta^2\overset{2}{y}\;;\;\Delta^2\overset{3}{y}-\Delta^2\overset{2}{y}=\Delta^3\overset{2}{y}$$

u. s. w. u. s. w. u. s. w.

so ist

$$1^\circ;\ \pm\Delta^\alpha y = y - {}^\alpha\mathfrak{A}\overset{1}{y} + {}^\alpha\mathfrak{B}\overset{2}{y}\ldots\ldots \mp {}^\alpha\mathfrak{A}\overset{\alpha-1}{y} \pm 1.\overset{\alpha}{y}$$

wo das obere Zeichen für gerade, das untere aber für ungerade genommen werden muß.

$$2^\circ;\ \overset{\alpha}{y} = y + {}^\alpha\mathfrak{A}.\Delta y + {}^\alpha\mathfrak{B}.\Delta^2 y\ldots\ldots + 1.\Delta^\alpha y$$

§. 2. Satz. Es ist $1 - \frac{{}^\alpha\mathfrak{A}\,.\,{}^\beta\mathfrak{A}}{{}^\gamma\mathfrak{A}} + \frac{{}^\alpha\mathfrak{B}\,.\,{}^\beta\mathfrak{B}}{{}^\gamma\mathfrak{B}}$

$$- \frac{{}^\alpha\mathfrak{C}\,.\,{}^\beta\mathfrak{C}\ldots\ldots}{{}^\gamma\mathfrak{C}} \pm \frac{1.\,{}^\beta\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}{{}^\gamma\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}} = \pm \frac{{}^{\alpha+\beta-\gamma-1}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}{{}^\gamma\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}$$

Beweis. Denn statt $y, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}\ldots\ldots\overset{\alpha}{y}$, in §. 1. setzt man $1, \frac{{}^\beta\mathfrak{A}}{{}^\gamma\mathfrak{A}}, \frac{{}^\beta\mathfrak{B}}{{}^\gamma\mathfrak{B}}\ldots\ldots\frac{{}^\beta\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}{{}^\gamma\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}$;

so ist $\Delta y = \frac{{}^{\beta-\gamma}\mathfrak{A}}{{}^\gamma\mathfrak{A}};\ \Delta^2 y = \frac{{}^{\beta-\gamma+1}\mathfrak{B}}{{}^\gamma\mathfrak{B}};\ \Delta^3 y = \frac{{}^{\beta-\gamma+2}\mathfrak{C}}{{}^\gamma\mathfrak{C}}$ u.s.w.

Δy

1° und 2°, für $\pm\Delta^\alpha y$ und $\overset{\alpha}{y}$ vorkommen, stehen dort (S. 96, V. und 97 VII.) wenn man, im ersten Falle $m = \alpha$ und $r = 0$, im zweyten $r = \alpha$ setzt. H.

$$\Delta^{\alpha} y = \frac{{}^{\alpha+\beta-\gamma-1}\mathfrak{A}^{\alpha-1}}{{}^{\gamma}\mathfrak{A}^{\alpha-1}}$$; woher der Satz folgt.

§. 3. Substituirt man aber in 2°. §. 1. diese Größen, so erhält man

$$1 + \frac{{}^{\alpha}\mathfrak{A}\,.\,{}^{\beta-\gamma}\mathfrak{A}}{{}^{\gamma}\mathfrak{A}} + \frac{{}^{\alpha}\mathfrak{B}\,.\,{}^{\beta-\gamma+1}\mathfrak{B}}{{}^{\gamma}\mathfrak{B}} \dots + \frac{1\,.\,{}^{\alpha+\beta-\gamma-1}\mathfrak{A}^{\alpha-1}}{{}^{\gamma}\mathfrak{A}^{\alpha-1}} = \frac{{}^{\beta}\mathfrak{A}^{\alpha-1}}{{}^{\gamma}\mathfrak{A}^{\alpha-1}}$$

§. 4. Setzt man in §. 2., $\gamma = -1$ so ist

${}^{\gamma}\mathfrak{A} = -1$; ${}^{\gamma}\mathfrak{B} = +1$; ${}^{\gamma}\mathfrak{C} = -1$ u. s. w.

wodurch man erhält:

$$1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}\,.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}\,.\,{}^{\beta}\mathfrak{B} \dots + 1\,.\,{}^{\beta}\mathfrak{A}^{\alpha-1} = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}^{\alpha-1}$$

§. 5. Setzt man §. 2., $\gamma = \beta - 1$ so erhält man, da

$$\frac{{}^{\beta}\mathfrak{M}}{{}^{\beta-1}\mathfrak{M}} = \frac{\beta}{\beta - m}, \text{ und } {}^{\alpha}\mathfrak{A}^{\alpha-1} = 1$$

$$1 - \frac{\beta}{\beta-1}\,{}^{\alpha}\mathfrak{A} + \frac{\beta}{\beta-2}\,{}^{\alpha}\mathfrak{B} - \frac{\beta}{\beta-3}\,{}^{\alpha}\mathfrak{C} \dots \pm \frac{\beta}{\beta-\alpha}\,.\,1$$

$$= \pm \frac{1}{{}^{\beta-1}\mathfrak{A}^{\alpha-1}}$$

§. 6. Setzt man in §. 2., $\beta = -1$ so ist

$$1 + \frac{{}^{\alpha}\mathfrak{A}}{{}^{\gamma}\mathfrak{A}} + \frac{{}^{\alpha}\mathfrak{B}}{{}^{\gamma}\mathfrak{B}} \dots + \frac{1}{{}^{\gamma}\mathfrak{A}^{\alpha-1}} = \frac{\gamma+1}{\gamma+1-\alpha}$$

weil $\pm \frac{{}^{\alpha-\gamma-2}\mathfrak{A}^{\alpha-1}}{{}^{\gamma}\mathfrak{A}^{\alpha-1}} = \frac{\gamma+1}{\gamma+1-\alpha}$ ist.

§. 7. Der Satz in §. 4. läßt sich unabhängig von dem in §. 2., durch Hülfe folgender zwey Sätze, auf eine einfache Art herleiten.

$$1^\circ.\ (\alpha-\beta)\ ({}^{\alpha-1}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta-1}\mathfrak{N} - {}^{\alpha-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\ {}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}})$$
$$= \alpha.\ {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta-1}\mathfrak{N} - \beta.{}^{\alpha-1}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}$$
$$2^\circ.\ \alpha.{}^{\alpha-1}\mathfrak{M}.{}^{\beta}\mathfrak{M} - \beta\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.{}^{\beta-1}\mathfrak{M} = (\alpha-\beta)\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.{}^{\beta}\mathfrak{M}$$

denn wenn man in 1°. statt $\mathfrak{N}$ nach und nach $\overset{-1}{\mathfrak{N}}.\overset{-2}{\mathfrak{N}},\overset{-3}{\mathfrak{N}}\ldots\overset{-1}{\mathfrak{A}}$ setzt, so erhält man $(\alpha-\beta)\ {}^{\alpha-1}\mathfrak{N}\ .\ {}^{\beta-1}\mathfrak{N}$

$$=\begin{Bmatrix}\alpha\,(1+{}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta-1}\mathfrak{A}+{}^{\alpha}\mathfrak{B}.{}^{\beta-1}\mathfrak{B}\ldots{}^{\alpha}\mathfrak{N}.{}^{\beta-1}\mathfrak{N})-\\ -\beta\,(1+{}^{\alpha-1}\mathfrak{A}.{}^{\beta}\mathfrak{A}+{}^{\alpha-1}\mathfrak{B}.{}^{\beta}\mathfrak{B}\ldots{}^{\alpha-1}\mathfrak{N}.{}^{\beta}\mathfrak{N})\end{Bmatrix}$$

Und wenn man hier $\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}$ statt $\mathfrak{N}$ setzt, so erhält man

$$\alpha\,(1+{}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta-1}\mathfrak{A}+{}^{\alpha}\mathfrak{B}.{}^{\beta-1}\mathfrak{B}\ldots\ 1.{}^{\beta-1}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}})$$
$$=\beta\,(1+{}^{\alpha-1}\mathfrak{A}.{}^{\beta}\mathfrak{A}+{}^{\alpha-1}\mathfrak{B}.{}^{\beta}\mathfrak{B}\ldots\ 1.{}^{\beta}\overset{\alpha-2}{\mathfrak{A}})$$

oder der Kürze wegen $\alpha P = \beta Q$.

Ferner setze man in 2° statt $\mathfrak{M}$ nach und nach $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\ldots$ u.s.w. so erhält man

$$(\alpha-\beta)\ (1+{}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta}\mathfrak{A}+{}^{\alpha}\mathfrak{B}.{}^{\beta}\mathfrak{B}\ldots\ 1\,{}^{\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}})$$
$$=\begin{cases}\alpha\,(1+{}^{\alpha-1}\mathfrak{A}.{}^{\beta}\mathfrak{A}+{}^{\alpha-1}\mathfrak{B}.{}^{\beta}\mathfrak{B}\ldots.\ 1.{}^{\beta}\overset{\alpha-2}{\mathfrak{A}})-\\ \beta\,(1+{}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta-1}\mathfrak{A}+{}^{\alpha}\mathfrak{B}.{}^{\beta-1}\mathfrak{B}\ldots\ 1.{}^{\beta-1}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}})\end{cases}$$

oder der Kürze willen $(\alpha-\beta)\,S = \alpha Q - \beta P$.

Hieraus erhält man sogleich $S = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}\,Q$ d. i.

$$1.1+{}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta}\mathfrak{A}+{}^{\alpha}\mathfrak{B}.{}^{\beta}\mathfrak{B}\ldots+1.{}^{\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}$$
$$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\,(1+{}^{\alpha-1}\mathfrak{A}.{}^{\beta}\mathfrak{A}+{}^{\alpha-1}\mathfrak{B}.{}^{\beta}\mathfrak{B}\ldots+1.{}^{\beta}\overset{\alpha-2}{\mathfrak{A}})$$

wo

, wo man zuletzt, wenn man immer nach und nach $\alpha-1, \alpha-2, \alpha-3 \ldots\ldots 1$, statt α setzt, bekommt

$$1 \,.\, 1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{A} \ldots + 1 \,.\, {}^{\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}} = {}^{\alpha+\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}$$

§. 8. Aus dem Satz 1°, in §. 7. kann noch ein anderer merkwürdiger Satz hergeleitet werden, da nämlich

$${}^{\alpha-1}\mathfrak{N} = \frac{\alpha-n}{\alpha}\,{}^{\alpha}\mathfrak{N}; \text{ und } {}^{\beta-1}\mathfrak{N} = \frac{\beta-n}{\beta} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{N} \text{ so ist}$$

$$\alpha \,.\, {}^{\alpha}\mathfrak{N} \,.\, {}^{\beta-1}\mathfrak{N} - \beta\, {}^{\alpha-1}\mathfrak{N} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{N} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}(\alpha\beta - n(\alpha+\beta))\, {}^{\alpha}\mathfrak{N} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{N}$$

$$\text{folgl. } {}^{\alpha-1}\mathfrak{N} \,.\, {}^{\beta-1}\mathfrak{N} - {}^{\alpha-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \,.\, {}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{N}} = \frac{\alpha\beta - n(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \,.\, {}^{\alpha}\mathfrak{N} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{N}$$

Woher man, wenn man nach und nach $\overset{-1}{\mathfrak{N}}, \overset{-2}{\mathfrak{N}}$ u. s. w. statt $\mathfrak{N}$ setzt, bekommt

$$1 + \frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \,.\, {}^{\alpha}\mathfrak{A} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{A} + \frac{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\, {}^{\alpha}\mathfrak{B} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{B} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\alpha\beta - n\,(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \,.\, {}^{\alpha}\mathfrak{N} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{N} = {}^{\alpha-1}\mathfrak{N} \,.\, {}^{\beta-1}\mathfrak{N}$$

§. 9. Setzt man hier $\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}$ statt $\mathfrak{N}$ so ist ${}^{\alpha}\mathfrak{N} = 1$ und ${}^{\alpha-1}\mathfrak{N} = 0$ also $1 + \frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \,.\, {}^{\alpha}\mathfrak{A} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{A}$

$$+ \frac{\alpha\beta - 2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\, {}^{\alpha}\mathfrak{B} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{B} \ldots \frac{\alpha\beta - \alpha(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \,.\, {}^{\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}} = 0$$

§. 10. Es scheint nicht, daß sich für die Reihe $1 \,.\, 1 - {}^{\alpha}\mathfrak{A} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{B} \ldots \pm 1 \,.\, {}^{\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}$ ein ähnlicher Ausdruck finden lasse, wie für die Reihe

$$1 \,.\, 1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{B} \ldots + 1 \,.\, {}^{\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}$$

Auch läßt sich keines der vorhin gebrauchten Verfahren dabey anwenden. Dennoch findet sich für die Reihe $1^2 - ({}^{\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{B})^2 - ({}^{\alpha}\mathfrak{C})^2 \ldots\ldots \pm 1^2$ ein ähnlicher Ausdruck, wie für die Reihe $1^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{B})^2 \ldots + 1^2$ der für ungerade α aber immer 0 wird; welches man leicht der Reihe ansieht.

§. 11. Die beyden Reihen $1 \,.\, 1 - {}^{\alpha}\mathfrak{A} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{A} \ldots \pm 1 \,.\, {}^{\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}$ und $1 \,.\, 1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{A} \ldots + 1 \,.\, {}^{\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}$ sind von einander abhängig, und man kann die erste durch die zweyte ausdrücken; denn es ist bekannt, daß wenn

$$a + bx + cx^2 + \text{etc.} = S, \text{ so ist}$$

$$Aa + Bbx + Ccx^2 + \text{etc.} \ldots =$$

$$AS + \frac{\Delta A . x dS}{1 dx^1} + \frac{\Delta^2 A . x^2 d^2 S}{1 . 2 dx^2} + \frac{\Delta^3 A . x^3 d^3 S}{1 . 2 . 3 . dx^3} + \text{etc.}$$

Macht man von diesem Satz hier Anwendung, und setzt

anstatt $a \,,\, b \,,\, c \,,\, d \,,\, e$ etc.

die Größen $1 \,,\, {}^{\alpha}\mathfrak{A} \,,\, {}^{\alpha}\mathfrak{B} \,,\, {}^{\alpha}\mathfrak{C} \,,\, {}^{\alpha}\mathfrak{D}$.

Und statt, $A \,,\, B \,,\, C \,;\, D \,,\, E$ etc.

die Größen $1 \,;\, -{}^{\beta}\mathfrak{A} \,;\, {}^{\beta}\mathfrak{B} \,;\, -{}^{\beta}\mathfrak{C} \,,\, {}^{\beta}\mathfrak{D}$.

so ist $S = (1 + x)^{\alpha}$; Und nach (§. 1; 1°) und §. 4.)

$$-\Delta A = 1 \,.\, 1 + {}^{1}\mathfrak{A} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{A} = {}^{\beta+1}\mathfrak{A}$$

$$+\Delta^2 A = 1 \,.\, 1 + {}^{2}\mathfrak{A} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{2}\mathfrak{B} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{B} = {}^{\beta+2}\mathfrak{B}$$

$$-\Delta^3 A = 1 \,.\, 1 + {}^{3}\mathfrak{A} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{3}\mathfrak{B} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{3}\mathfrak{C} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{C} = {}^{\beta+3}\mathfrak{C}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\pm \Delta^{\alpha} A = 1 \,.\, 1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{B} \ldots + {}^{\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}} \,.\, {}^{\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}} = {}^{\alpha+\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}$$

Folglich hat man

$$1 - {}^{\alpha}\mathfrak{A} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{A} x + {}^{\alpha}\mathfrak{B} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{B} x^2 - {}^{\alpha}\mathfrak{C} \,.\, {}^{\beta}\mathfrak{C} x^3 \ldots\ldots \pm 1 \, {}^{\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}} \,.\, x^{\alpha} =$$

$$(1 + x)^{\alpha} - {}^{\alpha}\mathfrak{A} \, {}^{\beta+1}\mathfrak{A} (1 + x)^{\alpha-1} x + {}^{\alpha}\mathfrak{B} \,.\, {}^{\beta+2}\mathfrak{B} (1 + x)^{\alpha-2} x^2$$

$$- {}^{\alpha}\mathfrak{C} \,.\, {}^{\beta+3}\mathfrak{C} (1 + x)^{\alpha-3} x^3 \ldots\ldots\ldots \pm 1 \,.\, {}^{\alpha+\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}} \,.\, x^{\alpha}$$

§. 12.

§. 12. Setzt man $x = 1$ so hat man

$$1 - {}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.{}^{\beta}\mathfrak{B} \ldots \pm 1.{}^{\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}} =$$

$$2^{\alpha} - 2^{\alpha-1}\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta+1}\mathfrak{A} + 2^{\alpha-2}\,{}^{\alpha}\mathfrak{B}.{}^{\beta+2}\mathfrak{B} \ldots \pm 1.{}^{\alpha+\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}$$

Setzt man in §. 3. $\gamma = -1$ so erhält man

$$1 - {}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta+1}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.{}^{\beta+2}\mathfrak{B} \ldots \pm 1.{}^{\alpha+\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}} = \pm {}^{\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}$$

§. 13. Setzt man $\alpha = \beta$ so ist

$$1 - ({}^{\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{B})^2 \ldots \pm 1 = 2^{\alpha} - 2^{\alpha-1}\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}\,{}^{\alpha+1}\mathfrak{A} + 2^{\alpha-2}\,{}^{\alpha}\mathfrak{B}\,{}^{\alpha+2}\mathfrak{B} \ldots \pm 1.{}^{2\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}$$

Folglich ist

$$2^{\alpha} - 2^{\alpha-1}\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}\,{}^{\alpha+1}\mathfrak{A} + 2^{\alpha-2}\,{}^{\alpha}\mathfrak{B}\,{}^{\alpha+2}\mathfrak{B} \ldots \pm {}^{2\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}$$

eine Reihe, welche für jedes ungerade α, Null wird.

§. 14. Um nun für $1 - ({}^{\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{B})^2 \ldots \pm 1$ noch einen andern Ausdruck zu finden, multiplicire man

$$(1-x)^{\alpha} = 1 - {}^{\alpha}\mathfrak{A}x + {}^{\alpha}\mathfrak{B}x^2 - {}^{\alpha}\mathfrak{C}x^3 \ldots \pm 1.x^{\alpha}$$

beyderseits durch $x^{\beta-1}(1+x)^{\alpha}dx$ und nehme die Integralien, so erhält man

$$\int(1-x^2)^{\alpha}x^{\beta-1}dx = \int x^{\beta-1}(1+x)^{\alpha}dx - {}^{\alpha}\mathfrak{A}\int x^{\beta}(1+x)^{\alpha}dx$$
$$+ {}^{\alpha}\mathfrak{B}\int x^{\beta+1}(1+x)^{\alpha}dx \ldots \pm \int x^{\beta+\alpha-1}(1+x)^{\alpha}dx$$

Nur ist allgemein, wenn man nach dem Integriren $x = 0$ setzt

$$\int x^{\beta+\mu-1}(1+x)^{\alpha}dx = \pm \frac{{}^{\beta+\mu-1}\mathfrak{M}}{{}^{\beta+\alpha+\mu}\mathfrak{M}}\int x^{\beta-1}(1+x)^{\alpha}dx$$

wo das obere Zeichen für gerade μ, das untere aber für ungerade gilt. Hieraus folgt

$$\int(1-x^2)x^{\beta-1}dx = \left(1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\frac{{}^{\beta}\mathfrak{A}}{{}^{\alpha+\beta+1}\mathfrak{A}} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\frac{{}^{\beta+1}\mathfrak{B}}{{}^{\alpha+\beta+2}\mathfrak{B}}\right.$$

$$\left. + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\frac{{}^{\beta+2}\mathfrak{C}}{{}^{\alpha+\beta+3}\mathfrak{C}} \ldots + 1.\frac{{}^{\beta+\alpha-1}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}{{}^{\beta+2\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}\right)\int x^{\beta-1}(1+x)^{\alpha}dx$$

Nun ist für $x = 0$:

$$\int x^{\beta-1}(1-x^2)^\alpha dx = \frac{\int x^{\beta-1} dx}{(\frac{\beta}{2}+\alpha)\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}} \text{ und}$$

$$\int x^{\beta-1}(1+x)^\alpha dx = \frac{\int x^{\beta-1} dx}{(\beta+\alpha)\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}$$

Hieraus bekommt man sogleich

$$\frac{{}^{\beta+\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}{{}^{\frac{\beta}{2}+\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}} = 1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\frac{{}^{\beta}\mathfrak{A}}{{}^{\alpha+\beta+1}\mathfrak{A}} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\frac{{}^{\beta+1}\mathfrak{B}}{{}^{\alpha+\beta+2}\mathfrak{B}} \ldots + 1.\frac{{}^{\beta+\alpha-1}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}{{}^{\beta+2\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}$$

§. 15. Ist α gerade, so ist

$$\frac{{}^{\alpha+\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}{{}^{\frac{\beta}{2}+\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}} = \frac{2^\alpha(\beta+1)(\beta+3)(\beta+5)\ldots\ldots(\beta+\alpha-1)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+4)(\alpha+\beta+6)\ldots(\alpha+\beta+\alpha)}$$

Ist α aber ungerade, so ist

$$\frac{{}^{\alpha+\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}{{}^{\frac{\beta}{2}+\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}} = \frac{2^\alpha(\beta+1)(\beta+3)(\beta+5)\ldots\ldots(\beta+\alpha)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+5)\ldots(\alpha+\beta+\alpha)}$$

§. 16. Setzt man $\beta = -\alpha$, so ist

$${}^{\beta}\mathfrak{A} = -{}^{\alpha}\mathfrak{A}\,,\ {}^{1+\beta}\mathfrak{B} = {}^{\alpha}\mathfrak{B} \text{ u. s. w. } {}^{\beta+\alpha-1}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}} = 1$$

aber ${}^{\alpha+\beta+1}\mathfrak{A} = {}^{\alpha+\beta+2}\mathfrak{B} \ldots = {}^{\beta+2\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}} = 1$

Und
$$\frac{{}^{\alpha+\beta}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}}{{}^{\frac{\beta}{2}+\alpha}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}}} = \pm\frac{2^\alpha(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-5)\ldots 3.1}{2\ .\ 4\ .\ 6\ \ldots\ \alpha}$$

Ueber-

Ueberhaupt für ein gerades α, wobey aber das obere oder untere Zeichen genommen werden muß, nachdem $\frac{\alpha}{\beta}$ gerade oder ungerade ist.

Für ein ungerades α aber ist allemal für $\beta = -\alpha$

$$\frac{\overset{\alpha-1}{{}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}}}{\frac{\beta}{2} + \overset{\alpha-1}{{}^{\alpha}\mathfrak{A}}} = 0$$

Folglich ist für jedes gerade α

$$1^2 - ({}^{\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{B})^2 \ldots \pm 1 = \pm \frac{1.3.5\ldots(\alpha-1)}{2.4.6\ldots\alpha} 2^{\alpha}$$

§. 17. Da

$$1^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{B})^2 \ldots + 1 = \frac{1.3.5.7\ldots(2\alpha-1)}{2.4.6.8\ldots 2\alpha} 2^{2\alpha}$$

und nach §. 16.

$$1^2 - ({}^{2\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{2\alpha}\mathfrak{B})^2 \ldots \pm 1 = \pm \frac{1.3.5\ldots(2\alpha-1)}{2.4.6\ldots 2\alpha} 2^{2\alpha}$$

so sieht man, daß die beyden Reihen

$1^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{B})^2 \ldots + 1$ und $1 - ({}^{2\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{2\alpha}\mathfrak{B})^2 \ldots \pm 1$ gleiche numerische Werthe haben, und daß sie vollkommen gleich sind, wenn α gerade mal gerade ist.

§. 18. Da nach §. 13.

$$1^2 - ({}^{2\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{2\alpha}\mathfrak{B})^2 \ldots \pm 1^2 = 2^{2\alpha} - 2^{2\alpha-1}\, {}^{2\alpha}\mathfrak{A}\, {}^{2\alpha+1}\mathfrak{A}$$
$$+ 2^{2\alpha-2}\, {}^{2\alpha}\mathfrak{B}\, {}^{2\alpha+2}\mathfrak{B} \ldots \pm 1 . \overset{2\alpha-1}{{}^{4\alpha}\mathfrak{A}}$$

so ist die Reihe

$$2^{2\alpha} - 2^{2\alpha-1} . {}^{2\alpha}\mathfrak{A}\, {}^{2\alpha+1}\mathfrak{A} + 2^{2\alpha-2} . {}^{2\alpha}\mathfrak{B} . {}^{2\alpha+2}\mathfrak{B} \ldots \pm 1 . \overset{2\alpha-1}{{}^{4\alpha}\mathfrak{A}}$$
$$= \frac{1.3.5\ldots(2\alpha-1)}{2.4.6\ldots 2\alpha} 2^{2\alpha}$$

§. 19.

§. 19. Noch sind folgende zwey allgemeine Sätze, m[it] den bisherigen von einerley Art, merkwürdig.

$$1^{\circ}.)\ 1 - \frac{a}{b} + \frac{a(a-b)}{b(b+c)} - \frac{a(a-b)(a-b-c)}{b(b+c)(b+\overset{1}{c})}$$

$$+ \frac{a(a-b)(a-b-c)(a-b-\overset{1}{c})}{b(b+c)(b+\overset{1}{c})(b+\overset{2}{c})} \ldots \pm \frac{a(a-b)\ldots(a-b-\overset{n}{c})}{b(b+c)\ldots(b+\overset{n+1}{c})} =$$

$$\pm \frac{(a-b)(a-b-c)(a-b-\overset{1}{c})\ldots(a-b-\overset{n+1}{c})}{b(b+c)(b+\overset{1}{c})\ldots\ (b+\overset{n+1}{c})}$$

$$2^{\circ}.)\ 1 + \frac{a\alpha - b(a+\alpha)}{b.b} + \frac{(a-b)(\alpha-b)}{b.b} \cdot \frac{(a\alpha-(b+c)(a+\alpha))}{(b+c)(b+c)}$$

$$+ \frac{(a-b)(\alpha-b)}{b.b} \cdot \frac{(a-b-c)(\alpha-b-c)}{(b+c)(b+c)} \cdot \frac{(a\alpha-(b+\overset{1}{c})(a+\alpha))}{(b+\overset{1}{c})(b+\overset{1}{c})}$$

$$\ldots\ldots + \left(\frac{(a-b)(\alpha-b)}{b.b} \cdot \frac{(a-b-c)(\alpha-b-c)}{(b+c)(b+c)} \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \frac{(a+b-\overset{n}{c})(\alpha-b-\overset{n}{c})}{(b+\overset{n}{c})(b+\overset{n}{c})} \cdot \frac{(a\alpha-(b+\overset{n+1}{c})(a+\alpha))}{(b+\overset{n+1}{c})(b+\overset{n+1}{c})}\right) =$$

$$\frac{(a-b)(\alpha-b).(a-b-c)(\alpha-b-c)\ldots\ldots(a-b-\overset{n+1}{c})(\alpha-b-\overset{n+1}{c})}{b.b.\quad (b+c)(b+c)\ldots\ (b+\overset{n+1}{c})(b+\overset{n+1}{c})}$$

wo $a, b, c, \overset{1}{c}, \overset{2}{c} \ldots \overset{n}{c} \ldots$ jede beliebige Grössen seyn können.

Setzt

Setzt man in 1°. $a = -1^2$; $b = -4^2$; $b + c = -8^2$; $b + \overset{1}{c} = -12^2$; $b + \overset{2}{c} = 16^2$ u. s. w.
so erhält man

$$1 - \frac{1.1}{4.4} - \frac{1.1.3.5}{4.4.8.8} - \frac{1.1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12.12} - \text{etc.}$$

$$= \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \frac{11.13}{12.12} \text{ u. s. w. } = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

Welche Reihe Euler sehr merkwürdig nennt (Vid. de Ellipsi minima dato parallelogrammo rectangulo circumscribenda. Auct. Euler. Act. Petrop. 1780.)

Setzt man in 2°.

$a = \alpha = -1$; $b = -3$; $c = -2$; $\overset{1}{c} = -4$; $\overset{2}{c} = -6$ etc.
so erhält man

$$1 - \frac{5}{9} - \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{25} - \frac{4.16}{9.25} \cdot \frac{13}{49} - \frac{4.16.36}{9.25.49} \cdot \frac{17}{81} - \text{etc.} =$$

$$\frac{4.16.36.64 \ldots .}{9.25.49.81 \text{ u. s. w.}} = \frac{\pi}{2}.$$

IV.

IV.

Summe und Unterschied von Tangente und Secante.

1) $\mathrm{Sec}\,\phi + \mathrm{tang}\,\phi = \frac{1 + \sin\phi}{\cos\phi}$

Man setze $\phi = 90° - \zeta$; so ist (Trig. 19. S. 9 Zus. 4) diese Summe =

$$\frac{2.(\cos.\frac{1}{2}\zeta)^2}{2.\sin\frac{1}{2}\zeta.\cos\frac{1}{2}\zeta} = \cot(45° - \tfrac{1}{2}\phi) = \mathrm{tang}(45° + \tfrac{1}{2}\phi)$$

2) Auch $\mathrm{Sec}\,\phi - \mathrm{tang}\,\phi = \mathrm{tang}\,(45° - \frac{1}{2}\phi)$.

erhellt wie (1) nur die Winkel verneint gesetzt, oder auch aus Trig. 19 S. 7 Zus.

3) Daher

$$2.\sec\phi = \mathrm{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\phi) + \mathrm{tang}\,(45° - \tfrac{1}{2}\phi)$$
$$2.\mathrm{tang}\,\phi = \mathrm{tang}\,(45° + \tfrac{1}{2}\phi) - \mathrm{tang}\,(45° - \tfrac{1}{2}\phi)$$

4) Wenn ein Winkel von 0 bis 90 Gr. wächst, so zeigt schon (3) daß die Tangente der Summe von 45 Grad und seiner Hälfte immer näher an das Doppelte sowohl seiner Secante, als seiner Tangente kommt.

5) Nun ist $\frac{\mathrm{tang}\,(45° + \frac{1}{2}\phi)}{\sec\phi} = 1 + \sin\phi$ (1)

Dieser Quotient wächst von 1 bis 2; indem ϕ von 0 bis 90 Grad wächst.

6) $\frac{\mathrm{tang}\,(45° + \frac{1}{2}\phi)}{\mathrm{tang}\,\phi} = \frac{1}{\sin\phi} + 1$

Dieser Quotient nimmt unter der Bedingung (5) vom Unendlichen bis an 2 ab.

7)

7) $\frac{\tang(45^\circ + \frac{1}{2}\phi)}{\sec\phi} = 1 - \sin\phi$

nimmt unter erwähnter Bedingung von 1. bis o ab.

8) $\frac{\tang(45^\circ - \frac{1}{2}\phi)}{\tang\phi} = \frac{1}{\sin\phi} - 1$

nimmt vom Unendlichen bis an o; ab.

9) Der Unterschied zwischen Secante und Tangente nimmt immer ab, die Summe kömmt immer näher an das Doppelte eins der beyden, weil beyde der Gleichheit immer näher kommen.

10) Exempel: Ein Winkel sey $= 89^\circ 30'$; seine Hälfte $= 44^\circ 45'$, zur Hälfte des rechten addirt giebt $89^\circ 45'$.

sec = 114,5930134801
tang = 114,5886501293

Summe = 229,1816636094

eben so groß ist die Tangente von $89^\circ 45$. Die Zahlen sind aus Gellibrandi Trig. Britann.

11) Auch ist die Summe beynahe das Doppelte jedes ihrer beyden Theile.

12) Aus (1) könnte einem wohl einfallen, so zu schliessen. Wenn der Winkel = 90 Gr. so ist die Summe seiner Hälfte und des Halben rechten, auch ein rechter; also $\sec 90^\circ + \tang 90^\circ = \tang 90^\circ$.

13) Das nun verbietet (6). Allemahl ist tang $(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi)$ grösser, als 2 tang Φ, und nähert sich nur, abnehmend, diesem Doppelten, wenn Φ sich 90 Graden nähert.

14) Also den Winkel = 90 Graden gesetzt, wird das, was in (6) rechter Hand steht $= 2$, und giebt diese Zahl für den Quotienten linker Hand, welches sich mit

(1)

(1) vergleichen läßt, weil beym rechten Winkel Tangente und Secante nicht zu unterscheiden sind.

15) Eigentlich aber hat rechter Winkel weder Tangente noch Secante. Die Gleichung (12) sagt also in Worte übersetzt:

Secante eines Winkels, der keine Secante hat, und Tangente eben dieses Winkels, der auch keine Tangente hat, machen zusammen Tangente eines Winkels, der keine Tangente hat. Oder allgemeiner: Etwas, das nicht ist, und noch Etwas, das nicht ist, machen zusammen das letzte Etwas, das nicht ist.

16) Bey diesem Satze verwechsle man nicht: Etwas, das nicht ist, mit: Etwas, ohne dabey das Nichtseyn zu denken. Zwey Etwasse zusammen können nicht einem von beyden gleich seyn; gegenwärtiger Satz aber sagt eben soviel, als: Ein Nichts, und ein ander Nichts, sind zusammen weder mehr noch weniger, als das andere Nichts allein.

17) Nur der findet bey (12) Schwierigkeit, der sich das Unendliche als Etwas Wirkliches denkt, eine unendliche Secante, die, mit ihr zugehöriger unendlicher Tangente, so viel betragen soll, als eben die unendliche Tangente allein.

18) Wenn in (1) der Winkel = 0 ist, so ist die Summe seiner Secante und Tangente so groß, als die Tangente der Summe seiner Hälfte und der Hälfte des rechten Winkels. Da ist von den drey Dingen, die in der Gleichung vorkommen, das erste: Etwas, das andere: Nichts; also das Dritte dem Ersten gleich.

Ein Winkel = 0, das ist: kein Winkel, hat auch eigentlich keine Secante; aber wenn man den Winkel abnehmen läßt, so nimmt seine Secante zugleich ab, und kömmt dem Sinustotus so nah, als man will, wenn man den Winkel so klein werden läßt, als man will. Des abnehmen-

nehmenden Winkels Secante hat also eine Gränze, die man angeben, und so als erreicht ansehen kann. In der Bedeutung nennt man die Secante = 1 für den Winkel = 0; aber des Winkels seiner Secante, der bis zum rechten wächst, hat keine Gränze, die sich angeben ließe; das sagt das Wort: Unendlich.

19) So bedeutet in (12) keiner von den drey Namen, die in der Gleichung vorkommen, einer wirklichen Grösse, und was sie also sagt, läßt sich gar nicht so auslegen, wie das, was eine Gleichung sagte, wo dergleichen Namen alle drey, oder wenigstens ein Paar, wirkliche Grössen bedeuteten.

20) Aus einem Verhalten zwischen Grössen läßt sich nichts schliessen, wenn die Grössen aufgehört haben, Grössen zu seyn. Wenn in einem rechtwinklichten Dreyecke ein Winkel = 30 Grad ist, so ist die Seite ihm gegenüber halb so groß, als die Hypotenuse. Das bleibt, wenn Seite und Hypotenuse zusammen abnehmen, bis an des Winkels Scheitel; aber im Scheitel selbst sind nicht etwa drey Punkte, die sich wie 1 : 0,5 : 0,866... verhalten.

21) Ich sage aufgehört haben. Im Aufhören bleibt das Verhalten, nach seinem Gesetze, beym Verschwinden und beym Unendlichwerden. Vom letztern ist für gegenwärtige Untersuchung schon (10) eine Erläuterung.

22) Wollte man den Schluß (12) in forma darstellen, so sähe er folgendergestalt aus:

Tangente und Secante eines Winkels machen zusammen Tangente der Summe von seiner Hälfte und 45 Graden;

Atqui Tangente und Secante des rechten Winkels sind Tangente und Secante eines Winkels,

Ergo machen Tangente und Secante eines rechten Winkels zusammen Tangente der Summe von zwey halben rechten.

Und da würde ich den Untersatz läugnen (15).

23) So hätte doch die syllogistische Darstellung den Nutzen, daß man bey ihr sogleich wahrnähme, welcher Vordersatz unrichtig ist. Wenn man ein Enthymem macht, nur Obersatz und Schlußsatz nennt, so schleicht sich der Untersatz vielleicht durch, ohne daß man seine Unrichtigkeit bemerkt.

24) Wenn man Geld zählt, so wird nicht mehr und weniger, ob man es ordentlich Reihenweise hinlegt, oder nach Würfen zählt; aber bey den Würfen kann, wenn man sich auch dabey selbst nicht irrte, wohl ein ungültiges Stück unterlaufen, das man in den Reihen bemerken würde. So denke ich von der Syllogistik, die freylich bey den jetzigen Philosophen unter die verlohrnen, auch wohl nie gelernten Künste gehört. Man verachtet sie, weil durch sie keine neuen Wahrheiten gefunden würden. Und doch ist erstlich nicht ausgemacht, daß das nie geschehe, und zweytens, wie viel neue Wahrheiten haben denn ihre Verächter erfunden? Denn neue Wörter und neue Streitigkeiten, mit denen man so wenig zu Ende kommt, als mit den alten, nennt wenigstens der Mathematiker nicht: neue Wahrheiten. Ordnung beym Geldzählen verachtet doch niemand deßwegen, weil sie das Geld nicht vermehrt.

25) Ich habe unlängst gelesen, daß ein Philosoph .. neuer als Christian Thomas ... die Syllogistik mit einem Schachbrete vergleicht, und beschreibt, wie der erste sich möge gefreut haben, der auf diesem Schachbrete drey Sätze gestellt, und mit Verwunderung wahrgenommen hat, wie aus zween der dritte folgt.

26) Mir

26) Mir scheint doch immer, das Schachbret und e Spiele darauf verdienen Achtung als Erfindungen nkender Köpfe, obgleich nicht alle, welche sich mit die m Spiele belustigen, denkende Köpfe sind. Ich hatte Leipzig Freunde, die gute Schachspieler waren, und nn ich ihnen gestand, daß ich zu diesem Spiele keine Ge ld gehabt hatte, mich, als Mathematiker, deßwegen halten; ich bewies ihnen aber, daß dazu kein Mathema ker erfordert werde; denn keiner von ihnen konnte eine bikwurzel ausziehn. So haben ohne Zweifel Schul losophen die Syllogistik gut auswendig gekonnt, ohne ß ihr Verstand dadurch viel gewonnen hat; aber das weist nicht, der Verstand könne sie nicht brauchen.

27) Was ich bisher erinnert habe, wird auch deut h machen, warum man aus (3) nicht schließen darf, s rechten Winkels doppelte Secante; oder doppelte Tan nte, sey seiner einfachen gleich. Die Gleichungen gelten r von allen Winkeln, die Tangenten und Secanten ben.

28) Wenn man in jeder berechnet, was rechter Hand ht, so findet man doppelte Secante oder Tangente s ganzen Winkels durch Secante oder Tangente des lben ausgedrückt; also Wahrheit, die noch bleibt. nn man den halben Winkel = 45 Gr. setzt, da zeigen ide Ausdrückungen was Unendliches an; also, wenn n das Wort brauchen will: doppelte Unendliche, dop lten Unendlichen gleich. Die Schwierigkeit, ein Doppeltes em Einfachen gleich, erscheint, wenn man rechter nd nicht gehörig berechnet hat, was für jeden unbe mmten Werth von $\frac{1}{2}\phi$ aus beyden Theilen rechter Hand sammenkömmt, und was sich in ihnen aushebt, das ß man in jedem Ausdrucke zuerst berechnen, und dann e Bedingung, die auf was Unendliches führt, hinein ngen. Diese Vorschrift verwahrt allemahl vor Irrthum,

M 2 in

in den zu frühzeitige Anbringung des Unendlichen füh-
kann.

29) Daß Cosecante und Cotangente zusammen C
tangente des halben Bogens ausmachen, habe ich in ei-
ner geometrischen Abhandlung II. Samml. 30 Abh. §
gezeigt, wo ein Gebrauch davon gemacht ist.

30) Geometrische Construction eines Satzes gi
bekanntlich es an, wenn man ihn auf Fälle anwen-
will, auf die er sich nicht anwenden läßt. So hie für(
Man verzeichne des gegebenen Winkels Tangente und S
cante. Von dem Punkte, wo sie einander schneiden, tr
man auf die verlängerte Tangente die Secante, so k
man sich leicht überzeugen, daß beyde Summen = ta
$(45^{\circ} + \frac{1}{2}\phi)$. Nur, wenn der gegebene Winkel ein r
ter ist, giebt es keinen Durchschnitt von Tangente
Secante, also findet da diese Construction nicht statt.

A. G. Kästner.

V.

Ueber die Wegschaffung der Wurzelgrößen a den Gleichungen, von E. G. Fischer, Pr fessor am Cöllnischen Gymnasium zu Berlin.

---

§. 1. In der Theorie von der Wegschaffung der Ra
lien findet sich in unsern Lehrbüchern der Analysis n
eine wirkliche Lücke, indem die Regeln, die man gi
noch nicht einmal hinreichen, aus jeder einzelnen Za
gleichung, und noch vielweniger aus Gleichungen
allgemeinen Formeln, die Wurzelzeichen zu entfernen. (

eit meine Kenntniß mathematischer Schriften reicht, ist
iese Lücke noch nirgends ausgefüllt, und ich hoffe daher,
aß es dem mathematischen Publikum nicht unangenehm
yn wird, hier wenigstens einen Versuch dazu zu finden.

§. 2. Die gewöhnliche Regel lautet bekanntlich so:
an soll die wegzuschaffende Wurzelgröße
f eine Seite der Gleichung allein bringen,
nd alsdenn zur Höhe des Wurzelexponen-
n potenziiren; wären der Wurzelzeichen
ehrere da, so müsse dieselbe Arbeit nur
fter wiederholt werden. Diese Regel aber er-
t nur in folgenden zwey Fällen ihren Zweck vollkom-
n: 1) wenn keine höheren Radicalien als vom zweyten
ade vorkommen; 2) wenn ein einziges höheres
dicale, mit oder ohne Quadratwurzeln, da ist; in wel-
m Falle man nur noch die Regel beobachten muß, das
here Radicale zuerst wegzuschaffen.

§. 3. Finden sich hingegen mehrere höhere Wurzel-
chen, (es versteht sich verschiedene, als $\sqrt[5]{x}$, $\sqrt[9]{y}$;
r $\sqrt[7]{x}$, $\sqrt[5]{x^2}$, $\sqrt[3]{x^3}$; oder $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[5]{x}$; u. d. g. m.), in
e Gleichung, so wird bey Anwendung der obigen Re-
l (2), die Anzahl der Wurzelgrößen bey jeder Poten-
ung vermehrt, anstatt vermindert zu werden; wovon
n sich leicht durch die erste beste Gleichung, die zwey oder
hr höhere Wurzelzeichen enthält, z. B. $\sqrt[5]{x} = a + \sqrt[3]{y}$,
eugen kann. Denn man erhält zuerst

$$= a^5 + 5a^4\sqrt[5]{y} + 10a^3\sqrt[5]{y^2} + 10a^2\sqrt[5]{y^3} + 5a\sqrt[5]{y^4} + y$$

jeder Versuch durch eine bloße Potenziirung eine der
rzeln wegzuschaffen, ihre Anzahl nur noch vergrößern,
 doch nicht vermindern würde.

Ergo machen Tangente und Secante eines rechten Winkels zusammen Tangente der Summe von zwey halben rechten.

Und da würde ich den Untersatz läugnen (15).

23) So hätte doch die syllogistische Darstellung den Nutzen, daß man bey ihr sogleich wahrnähme, welcher Vordersatz unrichtig ist. Wenn man ein Enthymema macht, nur Obersatz und Schlußsatz nennt, so schleicht sich der Untersatz vielleicht durch, ohne daß man seine Unrichtigkeit bemerkt.

24) Wenn man Geld zählt, so wird nicht mehr noch weniger, ob man es ordentlich Reihenweise hinlegt, oder nach Würfen zählt; aber bey den Würfen kann, wenn man sich auch dabey selbst nicht irrte, wohl ein ungültiges Stück unterlaufen, das man in den Reihen bemerken würde. So denke ich von der Syllogistik, die freylich bey den jetzigen Philosophen unter die verlohrnen, auch wohl nie gelernten Künste gehört. Man verachtet sie, weil durch sie keine neuen Wahrheiten gefunden würden. Und doch ist erstlich nicht ausgemacht, daß das nie geschehe, und zweytens, wie viel neue Wahrheiten haben denn ihre Verächter erfunden? Denn neue Wörter und neue Streitigkeiten, mit denen man so wenig zu Ende kommt, als mit den alten, nennt wenigstens der Mathematiker nicht: neue Wahrheiten. Ordnung beym Geldzählen verachtet doch niemand deßwegen, weil sie das Geld nicht vermehrt.

25) Ich habe unlängst gelesen, daß ein Philosoph... neuer als Christian Thomas... die Syllogistik mit einem Schachbrete vergleicht, und beschreibt, wie der erste sich möge gefreut haben, der auf diesem Schachbrete drey Sätze gestellt, und mit Verwunderung wahrgenommen hat, wie aus zween der dritte folgt.

26) Mir

26) Mir scheint doch immer, das Schachbret und die Spiele darauf verdienen Achtung als Erfindungen denkender Köpfe, obgleich nicht alle, welche sich mit diesem Spiele belustigen, denkende Köpfe sind. Ich hatte in Leipzig Freunde, die gute Schachspieler waren, und wenn ich ihnen gestand, daß ich zu diesem Spiele keine Geduld gehabt hatte, mich, als Mathematiker, deßwegen tadelten; ich bewies ihnen aber, daß dazu kein Mathematiker erfordert werde; denn keiner von ihnen konnte eine Cubikwurzel ausziehn. So haben ohne Zweifel Schulphilosophen die Syllogistik gut auswendig gekonnt, ohne daß ihr Verstand dadurch viel gewonnen hat; aber das beweist nicht, der Verstand könne sie nicht brauchen.

27) Was ich bisher erinnert habe, wird auch deutlich machen, warum man aus (3) nicht schließen darf, des rechten Winkels doppelte Secante, oder doppelte Tangente, sey seiner einfachen gleich. Die Gleichungen gelten nur von allen Winkeln, die Tangenten und Secanten haben.

28) Wenn man in jeder berechnet, was rechter Hand steht, so findet man d o p p e l t e Secante oder Tangente des ganzen Winkels durch Secante oder Tangente des halben ausgedrückt; also Wahrheit, die noch bleibt. Wenn man den halben Winkel = 45 Gr. setzt, da zeigen diese Ausdrückungen was Unendliches an; also, wenn man das Wort brauchen will: doppelte Unendliche, doppelten Unendlichen gleich. Die Schwierigkeit, ein Doppeltes einem Einfachen gleich, erscheint, wenn man rechter Hand nicht gehörig berechnet hat, was für jeden unbestimmten Werth von $\frac{1}{2}\phi$ aus beyden Theilen rechter Hand zusammenkömmt, und was sich in ihnen aufhebt, das muß man in jedem Ausdrucke zuerst berechnen, und dann die Bedingung, die auf was Unendliches führt, hinein bringen. Diese Vorschrift verwahrt allemahl vor Irrthum,

in den zu frühzeitige Anbringung des Unendlichen füh
kann.

29) Daß Cosecante und Cotangente zusammen C
tangente des halben Bogens ausmachen, habe ich in m
ner geometrischen Abhandlung II. Samml. 30 Abh. 3
gezeigt, wo ein Gebrauch davon gemacht ist.

30) Geometrische Construction eines Satzes gi
bekanntlich es an, wenn man ihn auf Fälle anwe
will, auf die er sich nicht anwenden läßt. So hie für (
Man verzeichne des gegebenen Winkels Tangente und S
cante. Von dem Punkte, wo sie einander schneiden, tr
man auf die verlängerte Tangente die Secante, so k
man sich leicht überzeugen, daß beyde Summen = ta
$(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$. Nur, wenn der gegebene Winkel ein re
ter ist, giebt es keinen Durchschnitt von Tangente u
Secante, also findet da diese Construction nicht statt.

A. G. Kästner.

V.

Ueber die Wegschaffung der Wurzelgrößen a den Gleichungen, von E. G. Fischer, Pro fessor am Cöllnischen Gymnasium zu Berlin.

---

§. 1. In der Theorie von der Wegschaffung der Rad
lien findet sich in unsern Lehrbüchern der Analysis n
eine wirkliche Lücke, indem die Regeln, die man gi
noch nicht einmal hinreichen, aus jeder einzelnen Zah
gleichung, und noch vielweniger aus Gleichungen v
allgemeinen Formeln, die Wurzelzeichen zu entfernen. E
wei

weit meine Kenntniß mathematischer Schriften reicht, ist diese Lücke noch nirgends ausgefüllt, und ich hoffe daher, daß es dem mathematischen Publikum nicht unangenehm seyn wird, hier wenigstens einen Versuch dazu zu finden.

§. 2. Die gewöhnliche Regel lautet bekanntlich so: Man soll die wegzuschaffende Wurzelgröße auf eine Seite der Gleichung allein bringen, und alsdenn zur Höhe des Wurzelexponenten potenziiren; wären der Wurzelzeichen mehrere da, so müsse dieselbe Arbeit nur öfter wiederholt werden. Diese Regel aber erfüllt nur in folgenden zwey Fällen ihren Zweck vollkommen: 1) wenn keine höheren Radicalien als vom zweyten Grade vorkommen; 2) wenn ein einziges höheres Radicale, mit oder ohne Quadratwurzeln, da ist; in welchem Falle man nur noch die Regel beobachten muß, das höhere Radicale zuerst wegzuschaffen.

§. 3. Finden sich hingegen mehrere höhere Wurzelgrößen, (es versteht sich verschiedene, als $\sqrt[5]{x}$, $\sqrt[9]{y}$; oder $\sqrt[7]{x}$, $\sqrt[5]{x^2}$, $\sqrt[5]{x^3}$; oder $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[5]{x}$; u. d. g. m.), in einer Gleichung, so wird bey Anwendung der obigen Regel (2), die Anzahl der Wurzelgrößen bey jeder Potenziirung vermehrt, anstatt vermindert zu werden; wovon man sich leicht durch die erste beste Gleichung, die zwey oder mehr höhere Wurzelzeichen enthält, z. B. $\sqrt[5]{x} = a + \sqrt[3]{y}$, überzeugen kann. Denn man erhält zuerst

$$x = a^5 + 5a^4\sqrt[5]{y} + 10a^3\sqrt[5]{y^2} + 10a^2\sqrt[5]{y^3} + 5a\sqrt[5]{y^4} + y$$

wo jeder Versuch durch eine bloße Potenziirung eine der Wurzeln wegzuschaffen, ihre Anzahl nur noch vergrößern, aber doch nicht vermindern würde.

§. 4. Vollkommen allgemein wird sich die Eliminirung der Radicalien bewerkstelligen lassen, wenn sich folgendes Problem allgemein auflösen läßt.

Eine gegebene Gleichung

A) $o = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + px^t$

in eine andere

B) $o = A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \ldots + Px^{tn}$

zu verwandeln, deren Exponenten n mal größer sind; wobey n als ganz und positiv vorausgesetzt wird.

Um den Sinn dieser Aufgabe, welche die Hauptaufgabe in dieser kleinen Abhandlung ist, auf das bestimmteste auszudrücken, so werden in dem Gesagten für B) folgende Bedingungen festgesetzt: 1) jeder Exponent von x in B) soll n mal größer seyn, als der Exponent vom ebensovielsten Gliede in A); also kann 2) B weder mehr, noch weniger Glieder enthalten, als A; 3) B muß eine Verwandlung von A seyn; d. h. es muß so beschaffen seyn, daß es auf alle Fälle für A gesetzt werden kann; nun ist aber B von einem n mal höheren Grad als A, hat also n mal so viele Wurzeln; es kann daher der letzten Forderung auf keine andere Art Genüge geschehen, als wenn B ohne Ausnahme alle Wurzeln von A enthält.

Es sey mir übrigens erlaubt, dieses Problem zur Abkürzung im Ausdruck schlechthin das Erhöhungsproblem zu nennen, so wie ich auch die Gleichung B schlechthin die erhöhte Gleichung nennen werde.

§. 5. Daß aber diese Aufgabe nichts Unmögliches fordere, ist nicht schwer zu erweisen. Denn bestünde die Gleichung A) aus den einfachen Factoren $(\alpha + \pi x)$ $(\beta + \pi x)$ $(\gamma + \pi x) \ldots\ldots$; so könnte man eine neue Gleichung aus den Factoren $(\alpha^n + \pi^n x^n)$ $(\beta^n + \pi^n x^n)$ $(\gamma^n + \pi^n x^n) \ldots$, formiren; man sieht aber aus der

Theorie

Theorie der Gleichungen leicht ein, daß diese neue Gleichungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen würde.

§. 6. Um nun den Zusammenhang beyder Probleme (1 und 4) vollständig einzusehen, bemerke man folgendes.

Wenn man alle Wurzelgrößen, die in einer Gleichung vorkommen, durch gebrochene Exponenten ausdrückt, so werden diese Bruchexponenten entweder einerley, oder verschiedenen Größen zugehören. (Der erste Fall ist, in $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{4}{3}}$, etc. desgleichen in $\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$ etc.

Der letzte Fall ist, in $x^{\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{4}}$ etc.)

Alle diejenigen Radicalien nun, welche einer und derselben Größe zugehören, nenne ich eine Klasse von Radicalien.

Eine Gleichung enthalte solcher Klassen von Radicalien, so viele man will, so richte man seine Aufmerksamkeit zuerst nur auf eine derselben. Sie mag Radicalien enthalten, die sich auf x beziehen. Man bringe die Bruchexponenten dieser Klasse unter einen einzigen Nenner n, und ordne dann die Gleichung nach diesen Dignitäten von x, so wird sie die Form

$$o = a + bx^{\frac{1}{n}} + cx^{\frac{2}{n}} + dx^{\frac{3}{n}} + \ldots + px^{\frac{r}{n}}$$

erhalten, wo die übrigen Klassen von Radicalien in den Coefficienten enthalten sind.

Hier übersieht man aber mit einem Blick, daß, wenn diese Gleichung n mal erhöhet wird, die ganze Klasse von Radicalien auf einmal wegfallen werde; denn die erhöhte Gleichung wird seyn.

$$o = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Px^r$$

Die Radicalien, welche in a, b, c, d, etc. enthalten sind, mögen sich hierbey so sehr vervielfältigen, als man

will, so ist doch klar, daß keine neuen Klassen von Radicalien hinzugekommen seyn können, weil die Coefficienten A, B, C, etc. bloß durch a, b, c etc. bestimmt seyn müssen.

Schafft man demnach auf die nehmliche Art eine Klasse von Radicalien nach der andern weg, so ist klar, daß man nach so vielmaliger Wiederholung der Arbeit, als Klassen da sind, auf eine Gleichung kommen müsse, in der gar kein Radicale mehr vorhanden ist.

§. 7. Es lassen sich aber zur Auflösung der Erhöhungsaufgabe (4), sehr verschiedene Wege einschlagen, die aber alle am Ende zu einerley Resultat führen, und führen müssen.

Zuerst ist (aus 5) klar, daß, wenn man die Wurzeln, folglich auch die einfachen Factoren, von A (4) hätte, B leicht zu finden wäre. Da aber die Auffindung der Wurzeln oft so große Schwierigkeiten hat, so ist es nöthig, Wege zu suchen, auf welchen B gefunden werden kann, ohne die Wurzeln von A zu haben.

Ich kann dergleichen Wege dreye beschreiben, von denen ich aber vor jetzt nur zweye anzeigen werde, da es meine Zeit nicht verstattet hat, den dritten, der unter den übrigen hier erwähnten vielleicht der vorzüglichste seyn dürfte, in allen Stellen so gangbar zu machen, als ich wünschte. Noch zwey andere findet man in Lamberts Beyträgen Th. 2. Ab. 1. S. 202. §. 20. ff., und S. 222. §. 43. Denn daß das Problem, welches Lambert dort auflöset, nur im Ausdruck von dem unsrigen verschieden ist, wird aus §. 5. deutlich seyn.

§. 8. Indessen ist dennoch unter allen diesen Methoden keine, die mich vollkommen befriedigte; denn ungeachtet sie sich zum Theil durch combinatorische Zeichen sehr einfach darstellen lassen, so scheint mir doch keine einzige für die wirkliche Anwendung recht bequem zu seyn.

seyn. Allein es dürfte vermuthlich nicht leicht seyn, hierin den Wünschen des Analysten völlig Genüge zu leisten. Denn wenn man mit der Erhöhung einer Gleichung nur bis zum 4ten oder 5ten Grad fortschreitet, so werden die Coefficienten schon so zusammengesetzt, daß die wirkliche Berechnung auch bey der einfachsten Regel weitläuftig und ermüdend bleibt.

Erste Methode.

§. 9. Die erste Methode, welche ich erklären will, ist in Absicht der Regeln, (sobald sie ganz allgemein gefaßt werden sollen), gerade die verwickelteste. Dem ohngeachtet gewährt sie, wenn die Erhöhung den 4ten Grad nicht übersteigt, eine leichtere und kürzere Rechnung, als die übrigen. Sie wird dazu dienen können, das Problem anschaulicher zu machen. Ich habe den Gebrauch combinatorischer Zeichen geflissentlich dabey vermieden, um so viel als möglich allgemein verständlich zu werden, und ich konnte dieß hier um so füglicher thun, da sie für die Erhöhung, bis zum vierten Grad, ohne erheblichen Nachtheil entbehrt werden können. Dagegen dürften sie für die höheren Grade so gut als unentbehrlich seyn.

§. 10. Aufgabe. **Eine nach Potenzen von x geordnete Gleichung in eine andere zu verwandeln, die bloß gerade Potenzen von x enthält, d. h. welche noch einmal so hohe Exponenten hat.**

Aufl. Wenn die gegebene Gleichung höhere Potenzen, als x selbst enthält, so ziehe man alle diejenigen Glieder, in denen x schon gerade Exponenten hat, in ein einziges Glied zusammen. Eben dieß thue man mit den übrigen Gliedern, die ungerade Exponenten haben, setze aber ein x außer der Klammer, damit in der Klammer bloß gerade Exponenten bleiben, so erhält die Gleichung die Form

$$C)\ o = a + bx$$

wo a, und b zwar Potenzen von x enthalten können, aber bloß gerade. Die übrige Rechnung ist leicht; nehmlich $-a = bx$, also $a^2 = b^2x^2$, und daher endlich

$$D)\ o = a^2 - b^2x^2$$

wo a und b entweder gar keine, oder doch keine andern als gerade Potenzen von x enthalten; die höchste Potenz von x aber, die in D vorkommt, nicht mehr als doppelt so hoch seyn kann, als die höchste Potenz in C.

§. 11. Aufgabe. Eine nach x geordnete Gleichung in eine andere mit dreymal höheren Potenzen von x zu verwandeln.

Aufl. Wenn die gegebene Gleichung höhere Potenzen von x, als x^3 enthält, so ziehe man alle die Glieder in eines zusammen, deren Exponenten durch 3 theilbar sind.

Eben das thue man mit allen Gliedern, deren Exponenten, durch 3 getheilt, den Rest 1 lassen, und setze x außer der Klammer.

Eben das thue man endlich auch mit allen Gliedern, deren Exponenten, durch 3 getheilt, den Rest 2 lassen, und setze x^2 außer der Klammer.

Auf diese Art erhält die Gleichung die Form.

$$E)\ o = a + bx + cx^2$$

wo a, b, c entweder gar keine, oder bloß solche Potenzen von x enthalten, deren Exponenten durch 3 theilbar sind. Dann rechne man wie folgt:

$$-a = bx + cx^2$$

$$-a^3 = b^3x^3 + 3b^2cx^4 + 3bc^2x^5 + c^3x^6$$

$$-\alpha a x^3 = \alpha b x^4 + \alpha c x^5$$

das willkührlich angenommene α läßt sich nun so bestimmen, daß in der Summe der beyden letzten Zeilen die

Glie-

Glieder, welche x^4 und x^5 enthalten, Null werden. Dieß geschicht, wenn $\alpha + 3bc = 0$, also $\alpha = -3bc$ setzt. Die Summe beyder Zeilen ist alsdenn

$$-a^3 + 3abcx^3 = b^3x^3 + c^3x^6$$

oder

$$F)\quad 0 = a^3 + \begin{array}{l} b^3x^3 \\ -3abc. \end{array} + c^3x^6$$

wo a, b, c, entweder gar keine, oder nur solche Potenzen von x enthalten werden, deren Exponenten mit 3 aufgehn. Auch ist leicht einzusehen, daß der höchste Exponent in F nur dreymal so groß seyn könne, als der höchste in E.

§. 12. **Aufgabe.** Eine nach x geordnete Gleichung in eine andere zu verwandeln, deren Exponenten sämmtlich viermal so groß sind.

Aufl. Wenn die Gleichung nicht für sich schon die Form

$$G)\quad 0 = a + bx + cx^2 + dx^3$$

hat, so reducire man sie auf ähnliche Art, als in den beyden vorigen §§, indem man 1) alle Glieder, deren Exponenten mit 4 aufgehn, 2) alle Glieder, deren Exponenten, mit 4 getheilt, den Rest 1 lassen, 3) alle Glieder, deren Exponenten, mit 4 getheilt, den Rest 2 lassen, 4) alle Glieder, deren Exponenten, mit 4 getheilt, den Rest 3 lassen, jede in ein einziges Glied zusammenzieht. Dann schaffe man a auf die linke Seite, und erhebe so die Gleichung zur 2ten und 4ten Potenz, und rechne, wie folgt:

—a

$$-a = bx + cx^2 + dx^3$$

$$+a^2 = b^2x^2 + 2bcx^3 + 2bdx^4 + 2cdx^5 + d^2x^6$$
$$\qquad + c^2x^4$$

$$+a^4 = b^4x^4 + 4b^3cx^5 + 4b^3dx^6 + 12b^2cdx^7 + 6b^2d^2x^8 + 12bcd^2x^9 + 4bd^3x^{10} + 4cd^3x^{11} + d^4x^{12}$$
$$\qquad + 6b^2c^2x^6 + 4bc^3x^7 + 12bc^2dx^8 + 4c^3dx^9 + 6c^2d^2x^{10}$$
$$\qquad + c^4x^8$$

$$-\alpha ax^4 - \beta ax^8 = \alpha bx^5 + \alpha cx^6 + \alpha dx^7 \qquad + \beta bx^9 + \beta cx^{10} + \beta dx^{11}$$

$$+\gamma a^2x^4 = \gamma b^2x^6 + 2\gamma bcx^7 + 2\gamma bdx^8 + 2\gamma cdx^9 + \gamma d^2x^{10}$$
$$\qquad + \gamma c^2x^8$$

Was unter dem Striche steht, soll addirt werden. Vorher aber läßt sich α, β, und γ, so bestimmen, daß in der Summe alle die Glieder, wo der Exponent von x nicht mit 4 aufgeht, ausfallen. Zu dem Ende setze man zuerst $\alpha b + 4b^3c = 0$, also $\alpha = -4b^2c$; ferner $\beta d + 4cd^3 = 0$, also $\beta = -4cd^2$; endlich $\gamma b^2 + \alpha c + 6b^2c^2 + 4b^3d = 0$ das ist: $\gamma b^2 - 4b^2c^2 + 6b^2c^2 + 4b^3d = 0$, also $\gamma = -2c^2 - 4bd$.

Auf diese Art sind die Glieder, welche x^5, x^{11}, und x^6 enthalten, unmittelbar, jedes $= 0$ gemacht. Bringt man aber die gefundenen Werthe von α, β, γ auch in diejenigen Glieder, welche x^7, x^9, und x^{10} enthalten, so findet sich, daß auch diese $= 0$ geworden sind. (Der Kürze wegen sey es mir verstattet, die an sich leichte Rechnung wegzulassen). Auf diese Art bleiben, wenn man, was unter dem Striche steht, wirklich addirt, bloß solche Glieder übrig, wo die Exponenten mit 4 aufgehen. Die Summe ist nehmlich:

$$\begin{array}{rlll}
a^4 & = b^4x^4 & + 6b^2d^2x^8 & + d^4x^{12} \\
-\alpha a x^4 & & +12bc^2d, & \\
+\gamma a^2, & & + c^4, & \\
& & + 2\gamma bd, & \\
-\beta a x^8 & & + \gamma c^2, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlll}
\text{d. i.}\quad a^4 & = b^4x^4 & + 6b^2d^2x^8 & + d^4x^{12} \\
+4ab^2cx^4 & & +12bc^2d, & \\
-2a^2c^2, & & + c^4, & \\
-4a^2bd, & & - 4bc^2d, & \\
& & - 8b^2d^2, & \\
+4acd^2x^8 & & - 2c^4, & \\
& & - 4bc^2d, &
\end{array}$$

aber

oder endlich

$$
\text{H)}\ 0 = \begin{array}{llll}
 & a^4 & + & c^4 x^4 \\
- & b^4 x^4 & - & 4 b c^2 d\,, \\
+ & 4 a b^2 c\,, & + & 4 a c d^2, \\
- & 4 a^2 b d\,, & + & 2 b^2 d^2, \\
- & 2 a^2 c^2, & - & d^4 x^8
\end{array}
$$

wo die Coefficienten entweder gar kein x, oder nur solche Potenzen enthalten, deren Exponenten mit 4 aufgehen. Auch sieht man leicht, daß die höchste Potenz von x, die in H vorkommen kann, nur viermal so hoch seyn wird, als die höchste in G.

§. 13. Das Allgemeine dieser Methode ist ziemlich verwickelt; doch will ich versuchen, die Regel derselben allgemein darzustellen.

Wofern die Gleichung, welche n mal erhöhet werden soll, nicht schon die Form

$$0 = a + dx + cx^2 + \ldots + mx^{n-1}$$

hat, sondern höhere Potenzen, als x^{n-1} enthält, so bringt man sie in diese Form dadurch, daß man die Glieder, deren Exponenten, mit n dividirt, die Reste 1, 2, 3, 4, 5 . . . $(n-1)$ lassen, respective in einzelne Glieder zusammenzieht, und von diesen Gliedern respective die Factoren $x, x^2, x^3 \ldots x^{n-1}$ absondert, so daß in den Klammern bloß solche Potenzen von x bleiben, deren Exponenten durch n theilbar sind.

Dann wird die Gleichung in der Form

$$-a = bx + cx^2 + dx^3 + \ldots + mx^{n-1}$$

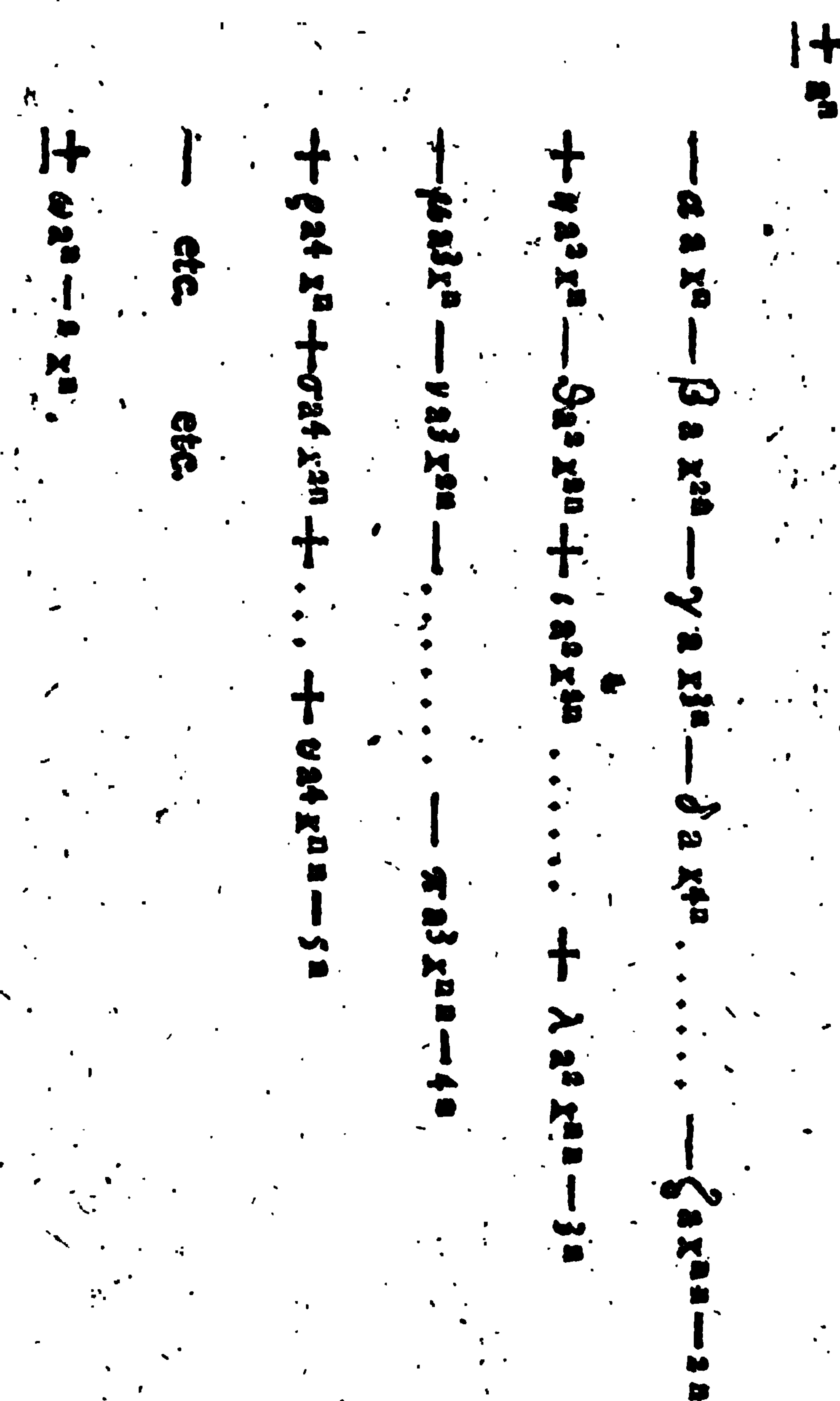
zur 2ten, 3ten, 4ten, . . . bis nten Potenz erhoben, mit Auslassung der $n-1$ten, (die im Verfolge der Rechnung nicht gebraucht wird).

Alle diese Potenzen werden dann mit willkührlich angenommenen Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. multiplicirt, und so unter einander gesetzt, daß immer gleiche Potenzen von x unter einander zu stehen kommen. Die Regel, für die

Ord-

Ordnung und Folge dieser Arbeit, liegt im folgendem Schema:

Auf der linken Seite kommt folgendes unter einander zu stehen



Was auf der rechten Seite zu stehen kommt, ist aus diesem Schema von selbst klar.

Endlich lassen sich $\alpha, \beta, \gamma \ldots \omega$ allezeit so bestimmen, daß dadurch in der Summe der durchs Schema bestimmten

ten Gleichungen, alle diejenigen Glieder Null werden, welche solche Potenzen von x enthalten, deren Exponenten nicht mit n aufgehen.

Den Beweis dieser ganzen Regel bitte ich mir zu erlassen. Es war meine Absicht nicht, eine vollständige Theorie dieser Methode zu liefern, was schwerlich ohne Weitläuftigkeit geschehen könnte; sondern nur durch die Aufgaben §. 10, 11, 12 das Problem selbst anschaulicher zu machen, und durch diesen §. wenigstens zu zeigen, wie die Sache angegriffen werden müßte, wenn man diese Methode zur Allgemeinheit erheben wollte.

§. 14. Es ist übrigens leicht einzusehen, daß die Arbeit, auf diesem Fuß fortgesetzt, schon beym 5ten Grad ziemlich weitläuftig werden muß. Da ich indessen für mich die Rechnung noch bis zum 5ten und 6ten Grad fortgesetzt habe, so wird es vielleicht dem Leser nicht unangenehm seyn, hier wenigstens noch das Resultat einer fünffachen Erhöhung zu sehen. Für die sechsfache aber würde das Resultat in gemeinen Zeichen, seiner Weitläuftigkeit wegen, zum Druck unbequem seyn.

Die Gleichung $0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ verwandelt sich durch die im vorigen §. beschriebene Arbeit in

$$0 = a^5 + \left\{\begin{matrix} b^5 & +5a^2b^2d \\ -5ab^3c & -5a^3cd \\ +5a^2bc^2 & -5a^3be \end{matrix}\right\} x^5 + \left\{\begin{matrix} c^5 & -5ac^3e \\ -5bc^3d & -5abd^3 \\ +5b^2cd^2 & -5abcde \\ +5b^2c^2e & +5ab^2e^2 \\ -5b^3de & +5a^2d^2e^2 \\ +5ac^2d^2 & +5a^2ce^2 \end{matrix}\right\} x^{10} + \left\{\begin{matrix} d^5 & +5bd^2e^2 \\ -5cd^3e & -5bce^3 \\ +5c^2de^2 & -5ade^3 \end{matrix}\right\} x^{15} + e^5 x^{20}$$

§. 15.

§. 15. Die Weitläuftigkeit dieser Formel zeigt deutlich, wie sehr das ganze Problem der Hülfe combinatorischer Zeichen bedarf, ohne die das Gesetz der Formeln schwerlich völlig sichtbar zu machen ist. Kenner der combinatorischen Analysis werden leicht bemerken, auf welche Art diese Zeichen, sowohl bey dieser, als bey der folgenden Methode angewendet werden müßten.

Zweyte Methode.

§. 16. Die gegebene Gleichung sey:

I) $x^r + ax^{r-1} + bx^{r-2} + \ldots + px + q = 0.$

die gesuchte n mal erhöhte sey:

K) $x^{rn} + Ax^{(r-1)n} + Bx^{(r-2)n} + \ldots + Px^n + Q = 0$

Vermöge der Bedingungen des Problems (§. 4), enthält K alle Wurzeln von I; also ist I ein Factor von K.

§. 17. Dividirt man also K durch I so lange, bis im Quotienten ein Glied vorkommt, das kein x mehr enthält, so muß der scheinbar übrigbleibende Rest, Glied vor Glied, $= 0$ seyn. Dieser Rest aber wird aus r Gliedern bestehen.

Denn der Divisor (I) bestehet aus r + 1 Gliedern; aus eben so vielen bestehet also auch das letzte, was beym Dividiren abgezogen wird; bey dieser Subtraction heben sich aber die beyden Anfangsglieder gänzlich, da sie, wie immer beym Dividiren, völlig identisch sind; alle übrigen Glieder heben sich zwar (scheinbar) nicht, müssen aber doch in der Formel wovon, und in der Formel welche abgezogen wird, Glied vor Glied einander gleich seyn; der scheinbare Rest wird also aus r Gliedern bestehen, deren jedes $= 0$ ist.

Man erhält also r Gleichungen für die zu bestimmenden r Größen A, B, C, D, etc.

§. 18. Ein einziges Beyspiel wird vollkommen hinreichen, die Sache zu erläutern.

Die gegebene Gleichung sey

$$L)\ x^3 + ax + b = 0$$

Die gesuchte sey die 3mal erhöhte

$$M)\ x^6 + Ax^3 + B = 0$$

Dividirt man M wirklich durch L, so erhält man den Quotienten

$$x^4 - ax^3 + (a^2 - b)x^2 - (a^3 - 2ab - A)x$$
$$+ (a^4 - 3a^2b + b^2 - aA)$$

und der letzte Rest ist

$$-(a^5 - 4a^3b + 3ab^2 - a^2A + bA)x$$
$$-(a^4b - 3a^2b^2 + b^3 - abA - B).$$

§. 19. Das erste Glied dieses Restes giebt die Gleichung

$$a^3(a^2 - b) - 3ab(a^2 - b) - A(a^2 - b) = 0$$

also $A = a^3 - 3ab$.

Das zweyte Glied giebt

$$a^4b - 3a^2b^2 + b^3 - ab(a^3 - 3ab) - B = 0$$

also $B = b^3$

§. 20. Die erhöhte Gleichung $x^6 + Ax^3 + B = 0$ ist demnach

$$x^6 + a^3x^3 + b^3 = 0$$
$$- 3ab.$$

welches mit F §. 11. mutatis mutandis völlig gleich ist.

§. 21. Diese Methode ist, wie der Augenschein lehrt, einer weit einfachern Darstellung fähig, als die vorige, und daher zu allgemeinen Untersuchungen weit bequemer. Sie ist übrigens mit der oben (§. 7) erwähnten ersten Lamberti-

berlischen Methode sehr nahe verwandt. Was hier durch Division, wird dort durch Multiplication bewirkt. Unser Quotient wird dort angenommen, und mit unbestimmten Coefficienten versehen. Multiplicirt man ihn so mit dem Divisor, so muß das Produkt dem Dividendus gleich seyn, welche Vergleichung die zur Bestimmung von A, B, C, etc. nöthigen Gleichungen liefert.

VI.

Ueber die Ausrechnung schief abgeschnittener Prismen; von Herrn Professor Rothe.

1. Erklärung. Ein Viereck, wie ABDC (Fig. 1.), wo nur zwo Seiten AB und CD einander parallel sind, heißt ein Trapez; so wie man ein Viereck, wo keine Seite der andern parallel ist, ein Trapezoid nennen kann.

2. Hülfssatz. Wenn in einem Trapez ABDC zu den beyden parallelen Seiten AB ; CD noch eine andere Linie EF parallel gezogen wird, so verhält sich I) CE : AE = DF : BF und II) wenn man diese Verhältniß = n : m setzt, so ist $EF = \frac{n.AB + m.CD}{n + m}$

Beweis. Man ziehe die Linie AD, so ist
I) CE : AE = DG : AG = DF : BF = n : m
folglich
II) CA : AE = n + m : m = CD : EG und
BD : DF = n + m : n = AB : FG also

 EG

$$EG = \frac{m.CD}{n+m};\ FG = \frac{n.AB}{n+m};\ \text{und}$$

$$EG + FG = EF = \frac{n.AB + m.CD}{n+m}$$

3. Lehrsatz. Der Inhalt eines dreyeckigten senkrechten, jedoch oben schief abgeschnittenen Prisma ABCDEF (fig. 2.), wo die Linien AD, BE, CF senkrecht auf der Ebene ABC stehen, ist

$$= \triangle ABC . \frac{AD + BE + CF}{3}.$$

Beweis. Man lege durch die drey Punkte A, E, C und auch durch die drey Punkte A, E, F Ebenen, so wird dadurch das schief abgeschnittene Prisma in drey dreyeckigte Pyramiden ABEC, AECF, ADEF getheilt. Nimmt man nun bey den beyden Pyramiden ABEC und AECF die Dreyecke BCE und CEF für die Grundflächen an, so haben sie einerley Höhen, folglich

$$\text{Pyr. } ABEC : \text{Pyr. } AECF = \triangle BCE : \triangle CEF$$
$$= BE : CF.$$

Nimmt man ferner bey den beyden Pyramiden AECF und ADEF die Dreyecke ACF, ADF für die Grundflächen an, so haben sie einerley Höhe, folglich

$$\text{Pyr. } AECF : \text{Pyr. } ADEF = \triangle ACF : \triangle ADF$$
$$= CF : AD.$$

Da nun BE senkrecht auf ABC steht, so ist

$$\text{Pyr. } ABCE = \tfrac{1}{3} \triangle ABC . BE$$
$$\text{Pyr. } AECF = \tfrac{1}{3} \triangle ABC . CF$$
$$\text{Pyr. } ADEF = \tfrac{1}{3} \triangle ABC . AD$$

folglich, wenn man zusammen addirt, so ist

$$ABCDEF = \triangle ABC . \frac{AD + BE + CF}{3}$$

Zusatz

Zusatz 1. Da die Linien AD, BE, CF parallel
nd, so haben sie gegen die Ebene DEF alle einerley
eigungswinkel. (Kästners Geometrie 47 Satz 8 Zus.)
ieser Winkel heisse α. Man fälle aus A auf die Ebene
EF das Perpendikel AG, und ziehe DG, so ist
DG $= \alpha$. Nun ist Pyr. ADEF $= \frac{\Delta DEF \cdot AG}{3}$;
war aber auch nach dem Beweise des Satzes
$\frac{\Delta ABC \cdot AD}{3}$ folglich ist $\Delta DEF \cdot AG = \Delta ABC \cdot AD$
s daraus folgt
$\Delta DEF : \Delta ABC = AD : AG = 1 : \sin \alpha$,
er: bey einem senkrechten, oben schief ab-
schnittenen dreyeckigten Prisma, verhält
ch die durch den schiefen Abschnitt entste-
nde Figur ΔDEF, zur Grundfläche ΔABC,
ie der Halbmesser, zum Sinus des Win-
ls α.

Zusatz 2. Dieser Satz ist nicht blos für dreyeckigte,
ndern auch für alle vielseitige Prismen wahr. Denn
vielseitiges Prisma ABCDE abcde (fig. 4.), wo
Linien aA, bB, u. s. w. auf der Ebene ABCDE
krecht stehen, läßt sich in dreyeckigte Prismen
BDabd, BCDbcd, CDEcde zerlegen, bey denen
en der Winkel α einerley ist. Deswegen ist

$\Delta abd : \Delta ABD = 1 : \sin \alpha$
$\Delta bcd : \Delta BCD = 1 : \sin \alpha$
$\Delta cde : \Delta CDE = 1 : \sin \alpha$ also
$abcde : ABCDE = 1 : \sin \alpha$

rner ist

$abcd : ABCD = 1 : \sin \alpha$ da nun auch
$\Delta cde : \Delta CDE = 1 : \sin \alpha$ so verhält sich
$abcd : ABCD = \Delta cde : \Delta CDE$ und
$abcd : \Delta cde = ABCD : \Delta CDE$.

4. Lehrsatz. ABCDEabcde (fig. 4) sey ein senkrechtes oben schief abgeschnittenes Prisma, wo aA, bB u. s. w. senkrecht auf der Ebene ABCDE stehen. Wenn man durch den Schwerpunkt H der Grundfläche ABCDE die Linie hH senkrecht auf ABCDE zieht, welche Linie die Ebene abcde in dem Punkte h treffen mag, so ist I) auch h der Schwerpunkt der Figur abcde und II) der Inhalt des Prisma

$$ABCDEabcde = ABCDE \cdot hH$$

Beweis. Für ein dreyeckigtes Prisma wird der Satz so bewiesen: Es sey ABC abc (fig. 3) ein senkrechtes, oben schief abgeschnittenes dreyeckigtes Prisma, wo aA, bB, cC senkrecht auf der Grundfläche ABC stehen. Man halbire AB in D, und ziehe dD parallel mit bB, lege dann durch die Linie dD und den Punkt C eine Ebene, welche ABC und abc in DC und dc schneidet; mache $DF = \frac{1}{3}CD$ und ziehe fF parallel mit cC.

I) Da nach der Construction dD mit bB und fF mit cC parallel ist, und bB, cC senkrecht auf ABC sind, so stehen auch (Kästners Geometrie 46 Satz II.) dD und fF senkrecht auf ABC. Da nun in dem Trapez aAbB, AD = BD und in dem Trapez cCdD, $DF = \frac{1}{3} DC$, so ist auch (2. I) ad = bd und $df = \frac{1}{3} dc$ folglich sind F und f die Schwerpunkte der Dreyecke ABC und abc.

II) Da in dem Trapez aAbB, AD = BD, und in dem Trapez cCdD, DF : CF = 1 : 2, so ist

$$(2 . \text{II})\ dD = \frac{aA + bB}{2} \text{ und}$$

$$fF = \frac{2dD + cC}{3} = \frac{aA + bB + cC}{3} \text{ folglich}$$

$$\Delta ABC \cdot fF = \Delta ABC \cdot \frac{aA + bB + cC}{3} = ABCabc\ (3)$$

Daß

1. Daß der Satz aber auch für jedes vielseitige Prisma wahr seyn müsse, läßt sich so beweisen: Wenn der Satz für jedes n eckigte Prisma wahr ist, so ist er auch für jedes $(n+1)$ eckigte Prisma wahr. Denn es sey ABCDE abcde (fig. 4) ein $(n+1)$ eckiges Prisma. Die Ebene, in welcher die beyden Parallellinien cC und dD liegen, schneidet die Ebenen ABCDE und abcde, in CD und cd, und theilt das $(n+1)$ eckigte Prisma, in ein neckiges ABCD abcd, und ein dreyeckiges Prisma CDE cde. Nun sey G der Schwerpunkt des nEcks ABCD, und F der Schwerpunkt des Dreyecks CDE. Man ziehe durch G und F die Linien gG und fF senkrecht auf ABCDE, welche die Ebene abcde in g und f treffen mögen. Ist nun der Satz für jedes neckige Prisma wahr, so ist (vermöge I) auch g der Schwerpunkt des n Ecks abcd und (vermöge II) ABCD abcd = ABCD . gG. Daß f der Schwerpunkt des Dreyecks cde und CDEcde = △CDE . fF sey, ist schon bewiesen worden. Man ziehe ferner FG und fg, nehme den Punkt H in FG so an, daß FH : HG = ABCD : △DCE und ziehe durch H die Linie hH senkrecht auf ABCDE oder parallel mit gG oder fF; so ist

III) in dem Trapez fF gG (2. I) fh : hg = FH : HG
ferner nach der Construction FH : HG = ABCD : △DCE
(3. 2 Zus.) ABCD : △DCE = abcd : △dce
folglich
fh : hg = FH : HG = ABCD : △DCE = abcd : △dce
und also, da F, G, f, g die Schwerpunkte von △CDE, ABCD, △cde, abcd, sind auch H und h die Schwerpunkte von ABCDE und abcde.

IV) In dem Trapez fF gG ist nach der Construction FH : HG = ABCD : △CDE, folglich (2. II)

$$hH = \frac{ABCD \cdot gG + \triangle CDE \cdot fF}{ABCD + \triangle CDE}$$

$$= \frac{ABCD \cdot gG + \triangle CDE \cdot fF}{ABCDE} \text{ und}$$

$$ABCDE \cdot hH = ABCD \cdot gG + \triangle CDE \cdot fF$$

$$= ABCDabcd + CDEcde = ABCDEabcde$$

Folglich ist bewiesen, daß wenn der Satz für jedes n eckigte Prisma wahr ist, er auch für jedes (n + 1) eckigte Prisma wahr seyn müsse. Nun ist er für jedes dreyeckigte, folglich auch für jedes viereckigte, mithin auch für jedes fünfeckigte u. s. w. für jedes Prisma von jeder Anzahl von Ecken wahr. Der Satz muß aber auch für ein Prisma wahr seyn, wo die Grundfläche keine geradlinigte Figur ist; man kann nehmlich ein solches Prisma als eines von unendlich viel Ecken betrachten.

Beyspiel. ABCDEF (fig. 5) sey die Grundfläche eines schief abgeschnittenen senkrechten Prisma, auf welcher alle Seiten senkrecht stehen. Die Ebene, welche ein solches Prisma schief abschneidet, (welches in der vierten Figur die Ebene abcde war) schneide die Grundfläche in einer Linie, welche auf der verlängerten AF senkrecht, oder mit aA parallel ist, und zwar unter einem Winkel von w° nach der Seite von A nach F zu. Die Länge der Seite, welche in A auf der Grundfläche senkrecht steht, sey = 9 und

Ab = 4		bB	}	= $1\frac{1}{2}$
bc = 3		cC		
cd = 1		dD = 6		
de = 14		eE = 4		
eF = 2				

wo die Einheit ein Fuß seyn mag. Man fragt nach dem Inhalte dieses Prisma.

Man

Man suche zuerst den Schwerpunkt der Grundfläche, und diesen findet man bald, wenn man folgende leicht zu erweisende Sätze zu Hülfe nimmt:

Erstens. Das Moment eines Trapezes ABCD (fig. 1) gegen eine, mit den beyden Seiten AB, CD parallele Linie HI, ist, wenn man
AB = a, CD = b, KL = c, LM = d setzt:

$$= \frac{(a+b)cd}{2} + \frac{c^2(a+2b)}{6}$$

Zweytens. Das Moment eines Trapezes ABCD (fig. 8), wo die Winkel BAC, ABD rechte sind, gegen die Linie AB, ist, wenn man
AC = a, BD = b, AB = c setzt,

$$= \frac{c(a^2+ab+b^2)}{6} = \frac{1}{6}c\,\frac{a^3-b^3}{a-b}$$

Vermittelst des ersten Hülfssatzes findet man (fig. 5) das Moment gegen die Linie a A,

		a	b	c	d	
des △ AbB . .	für	0,	1½,	4,	0,	= 8
des Rechtecks bB cC	für	1½,	1½,	3,	4,	= 24¾
des Trapezes cC dD	für	1½,	6,	1,	7,	= 28½
des Trapezes dD eE	für	6,	4,	14,	8,	= 1017⅓
des △ eEF	für	4,	0,	2,	22,	= 90⅔

folglich ist, wenn man alle diese Momente zusammenaddirt, das Moment der ganzen Figur ABCDEF, gegen die Linie Aa = 1169½, und ist ferner der Inhalt

des △ AbB	= 3
des Rechtecks bB cC	= 4½
des Trapezes cC dD	= 3¾
des Trapezes dD eE	= 70
des △ eEF	= 4

$$hH = \frac{ABCD \cdot gG + \triangle CDE \cdot fF}{ABCD + \triangle CDE}$$

$$= \frac{ABCD \cdot gG + \triangle CDE \cdot fF}{ABCDE} \text{ und}$$

$$ABCDE \cdot hH = ABCD \cdot gG + \triangle CDE \cdot fF$$

$$= ABCD\,abcd + CDEcde = ABCDE\,abcde$$

Folglich ist bewiesen, daß wenn der Satz für jedes n eckigte Prisma wahr ist, er auch für jedes (n + 1) eckigte Prisma wahr seyn müsse. Nun ist er für jedes dreyeckigte, folglich auch für jedes viereckigte, mithin auch für jedes fünfeckigte u. s. w. für jedes Prisma von jeder Anzahl von Ecken wahr. Der Satz muß aber auch für ein Prisma wahr seyn, wo die Grundfläche keine geradlinigte Figur ist; man kann nehmlich ein solches Prisma als eines von unendlich viel Ecken betrachten.

Beyspiel. ABCDEF (fig. 5) sey die Grundfläche eines schief abgeschnittenen senkrechten Prisma, auf welcher alle Seiten senkrecht stehen. Die Ebene, welche ein solches Prisma schief abschneidet, (welches in der vierten Figur die Ebene abcde war) schneide die Grundfläche in einer Linie, welche auf der verlängerten AF senkrecht, oder mit aA parallel ist, und zwar unter einem Winkel von w° nach der Seite von A nach F zu. Die Länge der Seite, welche in A auf der Grundfläche senkrecht steht, sey = 9 und

$$\begin{array}{llll} Ab = 4 & & bB \\ bc = 3 & & cC \end{array}\Big\} = 1\tfrac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ll} cd = 1 & dD = 6 \\ de = 14 & eE = 4 \\ eF = 2 & \end{array}$$

wo die Einheit ein Fuß seyn mag. Man fragt nach dem Inhalte dieses Prisma.

Man

Man suche zuerst den Schwerpunkt der Grundfläche, und diesen findet man bald, wenn man folgende leicht zu erweisende Sätze zu Hülfe nimmt:

Erstens. Das Moment eines Trapezes ABCD (fig. 1) gegen eine, mit den beyden Seiten AB, CD parallele Linie HI, ist, wenn man

AB = a, CD = b, KL = c, LM = d setzt:

$$= \frac{(a+b)cd}{2} + \frac{c^2(a+2b)}{6}$$

Zweytens. Das Moment eines Trapezes ABCD (fig. 8), wo die Winkel BAC, ABD rechte sind, gegen die Linie AB, ist, wenn man

AC = a, BD = b, AB = c setzt,

$$= \frac{c(a^2+ab+b^2)}{6} = \frac{1}{6}c\,\frac{a^3-b^3}{a-b}$$

Vermittelst des ersten Hülfssatzes findet man (fig. 5) das Moment gegen die Linie aA,

		a	b	c	d	
des △ AbB . .	für	0,	$\frac{3}{2}$,	4,	0,	= 8
des Rechtecks bBcC	für	$\frac{3}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	3,	4,	= $24\frac{3}{4}$
des Trapezes cCdD	für	$\frac{3}{2}$,	6,	1,	7,	= $28\frac{1}{2}$
des Trapezes dDeE	für	6,	4,	14,	8,	= $1017\frac{1}{3}$
des △ eEF	für	4,	0,	2,	22,	= $90\frac{2}{3}$

folglich ist, wenn man alle diese Momente zusammenaddirt, das Moment der ganzen Figur ABCDEF, gegen die Linie Aa = $1169\frac{1}{2}$, und ist ferner der Inhalt

des △ AbB	= 3
des Rechtecks bBcC	= $4\frac{1}{2}$
des Trapezes cCdD	= $3\frac{3}{4}$
des Trapezes dDeE	= 70
des △ eEF	= 4

Folglich ABCDEF = $85\frac{1}{4}$ und der Abstand des Schwerpunktes der Figur ABCDEF von der Linie $aA = \frac{1169\frac{3}{4}}{85\frac{1}{4}}$. Derowegen ist die Länge des aus dem Schwerpunkte der Grundfläche ABCDEF, bis an die schief schneidende Ebene aufgerichteten Perpendikels (was in der vierten Figur die Linie hH war) $= 9 + \frac{1169\frac{3}{4}}{85\frac{1}{4}} \text{ tang } w^\circ$; dieses mit der Grundfläche $85\frac{1}{4}$ multiplicirt, giebt den Inhalt des Prisma $= 767\frac{1}{4} + 1169\frac{3}{4} \text{ tang } w^\circ$. Nun sey $w^\circ = 37^\circ$, so ist

log $1169\frac{3}{4}$	=	3,0679074
log tang 37°	=	9,8771144 — 10
log $1169\frac{3}{4}$ tang 37°	=	2,9450218 mithin
$1169\frac{3}{4}$ tang 37°	=	881,093 hierzu
$767\frac{1}{4}$	=	767,25 giebt
Prisma	=	1648,343

Wenn die fünfte Figur den Profilriß einer Brustwehr im Felde vorstellt, so giebt gegenwärtige Rechnung den Inhalt eines Stücks einer solchen Brustwehr, das in der sechsten Figur im Grundriß durch AFGH vorgestellt wird, wo AG = 9 der Winkel

$$AGK = 106^\circ = 180^\circ - 2 \cdot 37^\circ,$$

und die Länge der Linien Ab, bc, cd, de, eF gleich groß ist, mit denen auf gleiche Art in der fünften Figur bezeichneten Linien. Hat man das Moment der Figur ABCDEF gegen die Linie aA ($1169\frac{3}{4}$) einmal berechnet, so kann man dies allemal brauchen, wenn auch der Winkel w anders angenommen wird, wenn nur die

Maaße

Maaße beym Profil einerley bleiben, und die Rechnung ist in jedem Falle außerordentlich leicht. Die Maaße für das Profil finden sich beym Struensee (Anfangsgründe der Kriegsbaukunst, erster Theil, 3te Auflage §. 72.)

Bey gegenwärtiger Berechnung brauchte man blos den Abstand des Schwerpunktes des Profiles ABCDEF (fig. 5) von der Linie Aa, zu wissen. Um aber den Ort des Schwerpunktes vollkommen zu bestimmen, muß man noch seinen Abstand von der Linie AF berechnen. Man suche zu dem Ende nach dem zweyten Hülfssatze, das Moment der Figur ABCDEF, gegen die Linie AF, nach der Formel $\frac{c\,(a^2 + ab + b^2)}{6}$ und so findet man das Moment

			a	b	c		
des Dreyecks	AbB	für	0,	$\frac{3}{2}$,	4,	=	$1\frac{1}{2}$
des Rechtecks	bBcC	für	$\frac{3}{2}$,	$\frac{3}{2}$,	3,	=	$3\frac{3}{8}$
des Trapezes	cCdD	für	$\frac{3}{2}$,	6,	1,	=	$7\frac{7}{8}$
des Trapezes	dDeE	für	6,	4,	14,	=	$177\frac{1}{3}$
des Dreyecks	eEF	für	4,	0,	2,	=	$5\frac{1}{3}$

folglich, wenn man addirt, das Moment der Figur ABCDEF gegen die Linie AF $= 195\frac{5}{12}$, und den Abstand des Schwerpunktes von der Linie AF $= \frac{195\frac{5}{12}}{85\frac{1}{4}}$; Dieses Abstandes würde man sich bedienen, wenn man den Inhalt eines Stücks einer solchen Brustwehr wissen wollte, das von einer Ebene abgeschnitten wird, die mit dem Horizont einen schiefen Winkel macht, jedoch das Profil in einer Linie durchschneidet, welche mit AF parallel ist. Gesetzt, man wollte den Inhalt des Stücks der Brustwehre wissen, das in der sechsten Figur im Grundrisse durch $A\beta\gamma\delta\epsilon\zeta$LG vorgestellt wird, und es ist

KG

KG = 12, der Neigungswinkel der Ebene $A\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ gegen den Horizont nach der Richtung von K nach G zu = v, so ist die Länge des aus dem Schwerpunkte aufgerichteten Perpendikels $= 12 - \frac{195\frac{1}{12}}{85\frac{1}{4}} \cot v$, dieses mit dem Inhalte des Profils $85\frac{1}{4}$ multiplicirt, giebt den Inhalt des Stücks

$$A\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta LG = 1023 - 195\tfrac{1}{12} \cot v.$$

Ist nun die Anlage der Böschung $A\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$, gleich der Hälfte der Höhe, oder $\cot v = \frac{1}{2}$, so ist $A\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta LG = 1023 - 195\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = 1023 - 97\frac{13}{24} = 925\frac{11}{24}$.

Zusatz 1. Um ein auf beyden Seiten schief abgeschnittenes Prisma ABCD abcd (fig. 7) zu berechnen, lege man durch einen beliebigen Punkt α, der Linie Aa eine Ebene, auf welcher Aa, folglich auch Bb, Cc u. s. w. senkrecht stehen. Ist nun φ der Schwerpunkt der Figur $\alpha\beta\gamma\delta$, welche durch den Durchschnitt der gedachten Ebene mit dem Prisma entsteht, und die Linie $f\varphi F$ senkrecht auf $\alpha\beta\gamma\delta$, folglich parallel mit Aa, Bb u. s. w. so sind auch F und f die Schwerpunkte von ABCD und abcd und

$$ABCD\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\beta\gamma\delta \,.\, F\varphi \text{ und}$$

$$abcd\,\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\beta\gamma\delta \,.\, f\varphi \text{ folglich}$$

$$ABCD\,abcd = \alpha\beta\gamma\delta \,.\, Ff$$

oder der Inhalt eines auf beyden Seiten schief abgeschnittenen Prisma ist gleich dem Produkte aus dem senkrechten Schnitte $\alpha\beta\gamma\delta$, in den Abstand Ff der Schwerpunkte F und f der beyden Grundflächen. Zugleich erhellet, daß die Linie fF, welche durch den Schwerpunkt F eines Schnittes ABCD, mit den Seiten des Prisma parallel gezogen wird, durch die Schwerpunkte aller nur möglichen Schnitte, z. B. durch die Schwerpunkte φ und f der

Schnit-

Schnitte $\alpha\beta\gamma\delta$ und abcd hindurch geht, und daß umgekehrt, wenn man die Schwerpunkte F und f zweyer Schnitte ABCD und abcd durch eine gerade Linie verbindet, diese Linie auch durch die Schwerpunkte aller Schnitte hindurch gehe, und zugleich mit den Seiten des Prisma parallel ist.

Zusatz 2. Der Winkel, den die Linien aA, bB, u. s. w. mit der Ebene abcd machen, heiße α, und der Winkel, den dieselben Linien mit der Ebene ABCD machen β, so ist (3. 2 Zus.)

$$abcd : \alpha\beta\gamma\delta = 1 : \sin\alpha$$
$$\alpha\beta\gamma\delta : ABCD = \sin\beta : 1 \text{ folglich}$$
$$abcd : ABCD = \sin\beta : \sin\alpha,$$

oder die Inhalte zweyer Schnitte verhalten sich umgekehrt wie die Sinus der Winkel, die die Seitenlinien des Prisma mit ihnen machen.

Zusatz 3. Man lasse aus F im Perpendikel Fg auf die Ebene abcd herab, und ziehe fg, so ist $Ffg = \alpha$ und $Ff : Fg = 1 : \sin\alpha$. Nun ist aber auch

$$abcd : \alpha\beta\gamma\delta = 1 : \sin\alpha, \text{ folglich}$$
$$abcd : \alpha\beta\gamma\delta = Ff : Fg \text{ und}$$
$$abcd.Fg = \alpha\beta\gamma\delta.Ff = ABCDabcd \text{ (1 Zus.)}$$

folglich findet man auch den Inhalt eines auf beyden Seiten schief abgeschnittenen Prisma's, wenn man eine der beyden Grundflächen, z. B. abcd mit dem Perpendikel Fg multiplicirt, das auf sie aus dem Schwerpunkte F der andern Grundfläche ABCD herabgelassen wird.

Anmerkung. Wäre Φ der Schwerpunkt des Umfangs der Figur $\alpha\beta\gamma\delta$, so würde das Produkt aus dem Umfange der Figur $\alpha\beta\gamma\delta$, in die Linie fF die Ober-

fläche

fläche des Prisma, (die beyden Grundflächen ABCD abcd nicht mitgerechnet) geben, oder es wäre dann

$$(a\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + a\delta)\ Ff = aA\,bB + bB\,cC + cC\,dD + aA\,dD.$$

Man würde aber irren, wenn man auch, wie vorher, schließen wollte, daß auch F und f die Schwerpunkte der Umfänge der Figuren ABCD und abcd wären. Der ausführliche Beweis dieses Satzes gehört nicht hieher.

VII.

Eine bestimmte Aufgabe aus der unbestimmten Analytik. An einen guten Freund; von M. A. F. Lüdicke, Lehrer der Mathematik auf der Landschule zu Meißen.

Sie haben die Auflösung folgender Aufgabe sehr mühsam gefunden: Ein Kaufmann wird gefragt, wie viel Stück seidener Zeuche einer gewissen Gattung er verkauft habe? Er antwortet: die Zahl der einzelnen Stücke habe sich zusammen zwischen 14 und 15 Schock belaufen *):

Nach

*) Durch die Angabe: die Zahl der einzelnen Stücke sey zwischen 14 und 15 Schock gefallen, wird die Aufgabe bestimmt, die, ohne sie, sonst unbestimmt gewesen seyn würde: Dies rechtfertigt die Ueberschrift des Aufsatzes, in welchem auch die Aufgabe, aus den übrigen Bedingungen wie eine unbestimmte gelöst, und hinterher jene Angabe zu Bestimmung der wirklichen Anzahl benutzt worden ist. Ganz anders verhält es sich, wenn man die Auflösung von dieser Angabe beginnt, und die folgenden Bedingungen damit vergleicht. Hiervon in meinem Zusatze zu dieser Abhandlung.
Hindenburg.

ach 2, 3, 5, 6, 9, 10 Stücken durchschossen, seyen ihm lich der Ordnung 1, 2, 4, 5, 5, 9 Stück übrig geblieben; ich 11 Stücken hingegen überzählt, sey alles aufgegangen. s wird gefragt, wie viel Stück solchen Zeuches der aufmann gehabt habe?

Daß die Auflösung dieser Aufgabe auf Eulers *) rt sehr mühsam sey, darin bin ich vollkommen Ihrer leynung. Sie würden aber sehr viel Arbeit erspart iben, wenn Sie die sehr schätzbare Abhandlung des Herrn röf. Hindenburg von den cyklischen Perioden i 3ten Stücke des Leipziger Magazins für Mathematik im Jahr 1786 gelesen hätten. Man findet darin nicht ir verschiedene sehr bequeme Auflösungsmethoden mehrer dergleichen Aufgaben, sondern man kann auch überugt werden, daß die combinatorische Analysis hr allgemein und viel umfassend sey, und nicht immer eitläuftige, oder, wie Sie vor Kurzem äußerten, abhreckende Formeln gebe **). Belieben Sie hierbey zu beden-

*) Vollständige Anleit. zur Alg. 2. Th. 2. Abschn. §. 19. 21.

**) Gehörig reducirte Formeln sind nie weitläuftig. Auch sind die combinatorischen, so wie die Lokal-Ausdrükke — wenn man ihre Bedeutung und Entwickelung kennt — nichts weniger als abschreckend; sie sind vielmehr in hohem Grade anziehend und belehrend; die lokalen, weil sie die Bestandtheile der oft so sehr verwickelten zusammengesetzten Größen, und dieser Bestandtheile Anordnung und Verbindung unter einander, ganz deutlich vor Augen legen; die combinatorischen, weil sie jederzeit auf ganz bestimmte und leichte Vorschriften und Verfahren hinweisen, nach welchen ihre Entwickelung ohne Schwierigkeit vorgenommen werden kann. Daß hierbey die Kenntniß combinatorischer Operationen und Involutionen, als Hülfsmittel vorausgesetzt wird, ist nun schon bekannt, und die Vorschriften und Regeln, die ich darüber gegeben habe, gehören offenbar zu den leichtesten, die man sich nur denken kann. Hier kann also von etwas Abschreckendem eigentlich gar nicht die Rede seyn. H.

bedenken, daß der Schreck nur relativ und zuweilen eine Krankheit sey, für welche man die Gewohnheit als Arzney empfielt, und daß mit der größern Allgemeinheit meistentheils mehrere Weitläuftigkeit verbunden sey. Der Beweis des binomischen Lehrsatzes fällt ungleich weitläuftiger aus, wenn der Exponent jede Zahl, als wenn er eine ganze positive Zahl ist. Mehrere Beyspiele werden Ihnen selbst beyfallen; so wie auch der gegenwärtige Fall als Beyspiel dienen kann.

Zu Auflösung Ihrer Aufgabe können Sie sich der Zeichen, Formeln und Vorstellungen bedienen, welche Herr Prof. Hindenburg in der oben angeführten Abhandlung (S. 306, 307) gebraucht hat.

Es sind nämlich in Ihrem Falle

die Stücke des Durchschießens	(2)	(3)	(5)	(6)	(9)	(10)	(11)
die zugehörigen Reste	1	2	4	5	5	9	0

wodurch also (in den untern Zahlen 11 statt 0 gesetzt) die cyklische Complexion vollkommen bestimmt ist. Da nun 2, 3, 5, 6, (nicht aber 11) in $9 \cdot 10 = 90$ enthalten sind; so richtet sich die Ordnungszahl der gegebenen Complexion $\begin{matrix}(2) & (3) & (5) & (6) & (9) & (10) & (11)\\ 1 & 2 & 4 & 5 & 5 & 9 & 11\end{matrix}$ blos nach dem Produkte $9 \cdot 10 \cdot 11 = 990$ der übrigen Zahlen oder Faktoren, und man hat nur die Ordnungszahl für eine Complexion wie $\begin{matrix}(9) & (10) & (11)\\ 5 & 9 & 0\end{matrix}$ oder $\begin{matrix}(9) & (10) & (11)\\ 5 & 9 & 11\end{matrix}$ zu suchen.

Sie ist die Summe folgender Ausdrücke:

$$\frac{9A+5}{a} \cdot 10 \cdot 11 + \frac{10B+9}{b} \cdot 9 \cdot 11 + \frac{11C+0}{c} \cdot 9 \cdot 10$$

wo

wo a der Rest von $\frac{10.11}{9}$, folglich a = 2

b . . . $\frac{9.11}{10}$, . b = 9

c . . . $\frac{9.10}{11}$, . c = 2.

Man hat daher die Ausdrücke:

$$\frac{9A+5}{2}.110 + \frac{10B+9}{9}.99 + \frac{11C+0}{2}.90;$$

wo man für A, B, C solche Zahlen (und vorzüglich die kleinsten) zu wählen hat, daß kein Bruch entstehe. In dieser Absicht setze man A = 1, B = 0 und C = 2; so erhält man für diese Ausdrücke

$$770 + 99 + 990 = 1859.$$

Es befinden sich also alle gegebene Reste 1, 2, 4, 5, 5, 9, 0 (oder 11) in der 1859sten Complexion der nach den Zahlen (2) (3) (5) (6) (9) (10) (11) angeordneten cyklischen Periode. Da aber diese Complexion mit der 9 . 10 . 11ten oder mit der 990sten Complexion, vor- oder rückwärts von jener gezählt, übereinkömmt, so ist die gesuchte Ordnungszahl auch 1859 − 990 = 869; die Complexion 1, 2, 4, 5, 5, 9, 11 ist nehmlich die 869ste der überhaupt aus 990 Complexionen bestehenden einfachen Periode. Auch fällt die Zahl 869 = 14 . 60 + 29 zwischen 14 und 15 Schock, wie in der Aufgabe ist angegeben worden. Sie ist also die, vermittelst der Auflösungsformel einer unbestimmten Aufgabe, gefundene bestimmte Zahl, und zugleich die kleinste, bey welcher die Divisoren und Reste der Aufgabe zusammengenommen statt haben.

Die Beweise hiervon darf ich Ihnen nicht wiederholen, da sie in der angeführten Abhandlung sehr gründlich und deutlich auseinander gesetzt worden sind.

bedenken, daß der Schreck nur relativ und zuweilen eine Krankheit sey, für welche man die Gewohnheit als Arzney empfielt, und daß mit der größern Allgemeinheit meistentheils mehrere Weitläuftigkeit verbunden sey. Der Beweis des binomischen Lehrsatzes fällt ungleich weitläuftiger aus, wenn der Exponent jede Zahl, als wenn er eine ganze positive Zahl ist. Mehrere Beyspiele werden Ihnen selbst beyfallen; so wie auch der gegenwärtige Fall als Beyspiel dienen kann.

Zu Auflösung Ihrer Aufgabe können Sie sich der Zeichen, Formeln und Vorstellungen bedienen, welche Herr Prof. Hindenburg in der oben angeführten Abhandlung (S. 306, 307) gebraucht hat.

Es sind nämlich in Ihrem Falle
die Stücke des Durchschießens (2)(3)(5)(6)(9)(10)(11)
die zugehörigen Reste 1 2 4 5 5 9 0
wodurch also (in den untern Zahlen 11 statt 0 gesetzt) die cyklische Complexion vollkommen bestimmt ist. Da nun 2, 3, 5, 6, (nicht aber 11) in 9 . 10 = 90 enthalten sind; so richtet sich die Ordnungszahl der gegebenen Complexion $\begin{matrix}(2) & (3) & (5) & (6) & (9) & (10) & (11)\\ 1 & 2 & 4 & 5 & 5 & 9 & 11\end{matrix}$ blos nach dem Produkte 9 . 10 . 11 = 990 der übrigen Zahlen oder Faktoren, und man hat nur die Ordnungszahl für eine Complexion wie $\begin{matrix}(9) & (10) & (11)\\ 5 & 9 & 0\end{matrix}$ oder $\begin{matrix}(9) & (10) & (11)\\ 5 & 9 & 11\end{matrix}$ zu suchen.

Sie ist die Summe folgender Ausdrücke:

$$\frac{9A+5}{a}.10.11+\frac{10B+9}{b}.9.11+\frac{11C+0}{c}.9.10$$

wo

wo a der Rest von $\frac{10.11}{9}$, folglich a = 2

b . . . $\frac{9.11}{10}$, . b = 9

c . . . $\frac{9.10}{11}$, . c = 2.

Man hat daher die Ausdrücke:

$$\frac{9A+5}{2}.110 + \frac{10B+9}{9}.99 + \frac{11C+0}{2}.90;$$

wo man für A, B, C solche Zahlen (und vorzüglich die kleinsten) zu wählen hat, daß kein Bruch entstehe. In dieser Absicht setze man A = 1, B = 0 und C = 2; so erhält man für diese Ausdrücke

$$770 + 99 + 990 = 1859.$$

Es befinden sich also alle gegebene Reste 1, 2, 4, 5, 5, 9, 0 (oder 11) in der 1859sten Complexion der nach den Zahlen (2) (3) (5) (6) (9) (10) (11) angeordneten cyklischen Periode. Da aber diese Complexion mit der 9.10.11ten oder mit der 990sten Complexion, vor- oder rückwärts von jener gezählt, übereinkömmt, so ist die gesuchte Ordnungszahl auch 1859 − 990 = 869; die Complexion 1, 2, 4, 5, 5, 9, 11 ist nehmlich die 869ste der überhaupt aus 990 Complexionen bestehenden einfachen Periode. Auch fällt die Zahl 869 = 14.60 + 29 zwischen 14 und 15 Schock, wie in der Aufgabe ist angegeben worden. Sie ist also die, vermittelst der Auflösungsformel einer unbestimmten Aufgabe, gefundene bestimmte Zahl, und zugleich die kleinste, bey welcher die Divisoren und Reste der Aufgabe zusammengenommen statt haben.

Die Beweise hiervon darf ich Ihnen nicht wiederholen, da sie in der angeführten Abhandlung sehr gründlich und deutlich auseinander gesetzt worden sind.

Sie können aber auch das Eulersche Verfahren viel bequemer machen *). Diese Abkürzungsmethode ist Ihnen vermuthlich nicht bekannt; da ich mich nicht erinnere, daß sie schon gebraucht worden ist.

Es sey die Anzahl der Durchschüsse in jedem Falle a, b, c, d, e, f, g, und die Menge aller einzelnen Stücke oder die gesuchte Zahl $= x$; so hat man

$$2a+1 = 3b+2 = 5c+4 = 6d+5 = 9e+5 = 10f+9 = 11g = x$$

und

$$2a = 3b+1 = 5c+3 = 6d+4 = 9e+4 = 10f+8 = 11g-1 = x-1$$

Weil aber 2 bey 2a in $6d+4$ oder auch in $10f+8$ aufgehet, so kann man ohne Nachtheil 2a weglassen und weiter gehen, und so kommt

$$3b = 5c+2 = 6d+3 = 9e+3 = 10f+7 = 11g-2 = x-2$$

Weil 3 in $6d+3$ enthalten ist, so fällt 3b hinweg; folglich hat man

$$5c = 6d+1 = 9e+1 = 10f+5 = 11g-4 = x-4$$

Es ist aber 5 in $10f+5$ enthalten; es fällt also auch 5c weg, und man hat

$$6d = 9e = 10f+4 = 11g-5 = x-5;$$

folglich

$$d = \frac{3}{2}e = f + \frac{2f+2}{3} = g + \frac{5g-5}{6} = \frac{x-5}{6}$$

Um

*) Die hier beygebrachte Abkürzung verdient alle Aufmerksamkeit. Es werden bey ihr die sämmtlichen Bedingungen gleich Anfangs, zur nähern Vergleichung, neben einander gestellt, wie bey mir (angef. Abhandl. S. 308, IV, a). Das dort von mir angewiesene Verfahren ist aber von den hier gebrauchten ganz verschieden. Beyde sind übrigens ganz allgemein. Wegen des meinigen vergleiche man noch die angef. Abhandl. (S. 311. Anmerk.). H.

Um die Brüche wegzuschaffen, setze man

$e = 2h$, $f = 3i - 1$, $g = 6k + 1$ so wird

$$3h = 5i - 1 = 11k + 1 = \frac{x-5}{6}; \text{ folglich}$$

$$h = i + \frac{2i+1}{3} = 3k + \frac{2k+1}{3} = \frac{x-5}{18}.$$

Hier setze man

$i = 3l - 1$, $k = 3m + 1$ und $x = 18y + 5$;

so wird $5l - 2 = 11k + 4 = y$ folglich

$$5l = 11k + 6 = y + 2 \text{ und}$$

$$l = 2k + 1 + \frac{k+1}{5} = \frac{y+2}{5}.$$

Man setze endlich $k = 5m - 1$ und $y = 5z - 2$; so ist

$$11k - 1 = z.$$

Zu Bestimmung der Zahl x hat man nun folgende Gleichungen:

$$z = 11k - 1;\ y = 5z - 2;\ x = 18y + 5.$$

Es sey $k = 1$; so ist $z = 10$, $y = 48$ und $x = 869$, wie oben.

Aus dem Vorhergehenden erhellet, daß man dieses Verfahren noch mehr abkürzen könne. Weil nehmlich 2, 3, 5, 6 in 9. 10 aufgehen, so sind die Reste 1, 2, 4, 5 nicht willkührlich, sondern sie hängen von den Resten 5 und 9 ab. Man hat dahero nur folgende Sätze nöthig:

$$9a + 5 = 10b + 9 = 11c = x \text{ also}$$

$$9a = 10b + 4 = 11c - 5 = x - 5 \text{ und}$$

$$a = b + \frac{b+4}{9} = c - 1 + \frac{2c+4}{9} = \frac{x-5}{9}$$

Nun setze man $b = 9d - 4$, $c = 9e - 2$, $x = 9y + 5$; so wird $10d - 4 = 11e - 3 = y$ folglich

$$10d = 11e + 1 = y + 4 \text{ und}$$

$$d = e + \frac{e+1}{10} = \frac{y+4}{10}.$$

 Wenn

Wenn man nun $e = 10f - 1$ und $y = 10z - 4$ setzt, so wird $11f - 1 = z$. Man hat daher die Bestimmungen $z = 11f - 1$, $y = 10z - 4$ und $x = 9y + 5$; und so kommt, $f = 1$ gesetzt, $z = 10$, und daraus $y = 19 . 10 - 4 = 96$, und daraus $x = 9.96 + 5 = 869$, wie vorher.

Auf eben diese Art kann das Hindenburgsche Exempel (a. a. O. S. 310, 10) ziemlich bequem berechnet werden. Man hat nehmlich:

$$12a + 5 = 15b + 14 = 20c + 9 = 24d + 17 = 36e + 5 = x; \text{ also}$$

$$12a = 15b + 9 = 20c + 4 = 24d + 12 = 36e = x - 5.$$

Es fällt aber $12a$ hinweg, weil 12 in $24d + 12$ oder in $36e$ enthalten ist. Man hat daher

$$15b = 20c - 5 = 24d + 3 = 36e - 9 = x - 14$$

Weil jedoch $15 = 5.3$ in $20c - 5$ und in $24d + 3$ aufgehet, so fällt $15b$ hinweg. Folglich ist

$$20c = 24d + 8 = 36e - 4 = x - 9 \text{ und}$$

$$c = d + \frac{d+2}{5} = e - 1 + \frac{4e+4}{5} = \frac{x-9}{20}$$

Nun setze man $d = 5f - 2$, $e = 5g - 1$ und $x = 20y + 9$, so wird

$$6f - 2 = 9g - 2 = y, \text{ folglich}$$

$$6f = 9g = y + 2, \text{ und}$$

$$f = g + \tfrac{1}{2}g = \frac{y+2}{6}.$$

Wenn nun $g = 2h$ und $y = 6z - 2$ gesetzt wird, so hat man $3h = z$, $y = 6z - 2$ und $x = 20y + 9$. Es sey also $h = 1$; so wird $z = 3$, $y = 16$ und $x = 329$.

Da aber diese Abkürzungen bequeme Zahlen voraussetzen, die als Divisoren in andern dabey vorkommenden

Zahlen

Zahlen ohne Rest aufgehen, so muß ich Ihnen auch zeigen, wie man sich bey sehr unbequemen Zahlen, wo das nicht der Fall ist, die Operation erleichtern könne. Die mühsamste Arbeit ist das fortgesetzte Substituiren; dieses vermeidet man, wenn man sich während des Dividirens den Ausdruck bequem macht, wie es in den vorigen Exempeln einigemal geschehen ist. Der Ausdruck $\frac{25q+1}{16}$ z. B. giebt eigentlich den unbequemen Quotienten $q + \frac{9q+1}{16}$. Wenn man aber an dessen statt $q+4+\frac{9q+1-64}{16} = q+4+\frac{9q-63}{16}$ schreibt; so siehet man leicht, daß $q-7$ sich mit 16 dividiren lassen solle, und daß man $q = 16r+7$ setzen müsse. Damit man den Ausdruck $\frac{56q+11}{39}$ $= q + \frac{17q+11}{39}$ bequemer mache, so setze man ihn $= 2q - \frac{22q-11}{39}$, wo $2q-1$ mit 39 dividirt werden sollen, und wo also, $q = 39r - 19$ gesetzt, den Ausdruck $\frac{56q+11}{39} = 56r-27$ giebt. Oder, da $39 = 3.13$ ist, so kann man hier erst mit 3 und alsdenn mit 13 dividiren. Bey der ersten Division bekömmt man $18q+3+\frac{2q+2}{3}$; wo man $q = 3r-1$ setzt, und den Ausdruck in $56r-15$ verwandelt. Dieser Ausdruck, mit 13 dividirt, giebt eigentlich $4r-1+\frac{4r-2}{13}$; man setzt aber an dessen Stelle

$4r - 3 + \frac{4r + 24}{13}$; so wird $r = 13t - 6$ und der Ausdruck wird, wie vorhin, $56t - 27$. Eine andere Zerlegung des Ausdrucks $\frac{56q + 11}{39}$ (a. a. O. S. 317).

Um dieses mit einem Beyspiele zu belegen, füge ich das Hindenburgische Exempel (Ebend. S. 313, 12) bey, welches würklich sehr unbequeme Zahlen hat. Man hat in demselben

$$11a = 13b + 15 = 15c - 1 = 17d + 3$$
$$= 19e - 20 = x \text{ folglich}$$

$$a = b + 1 + \frac{2b + 4}{11} = c + 1 + \frac{4c - 12}{11}$$

$$= d + 3 + \frac{6d - 30}{11} = 2e - 1 - \frac{3e + 9}{11} = \frac{x}{11}$$

Hier setze man

$b = 11f - 2$, $c = 11g + 3$, $d = 11h + 5$, $e = 11k - 3$ und $x = 11y$ so wird

$$13f - 1 = 15g + 4 = 17h + 8 = 19k - 7 = y$$

also $13f = 15g + 5 = 17h + 9 = 19k - 6 = y + 1$

und $f = g + 1 + \frac{2g - 8}{13} = h + 1 + \frac{4h - 4}{13}$

$$= k + \frac{6k - 6}{13} = \frac{y + 1}{13}$$

Wenn man nun $g = 13l + 4$, $h = 13m + 1$, $k = 13n + 1$ und $y = 13z - 1$ setzt; so wird

$$15l + 5 = 17m + 2 = 19n + 1 = z, \text{ folglich}$$

$$15l = 17m - 3 = 19n - 4 = z - 5, \text{ und}$$

$$l = m - 1 + \frac{2m + 12}{15} = n + \frac{4n - 4}{15} = \frac{z - 5}{15}.$$

Hier

Hier setze man $m = 15p - 6$, $n = 15q + 1$ und $z = 15\alpha + 5$, und man erhält

$$17p - 7 = 19q + 1 = \alpha, \text{ also}$$

$$17p = 19q + 8 = \alpha + 7, \text{ und}$$

$$p = q + \frac{2q + 8}{17} = \frac{\alpha + 7}{17}.$$

Wenn man nun endlich $q = 17t - 4$ und $\alpha = 17\beta - 7$ setzt; so hat man $19t - 4 = \beta$ Da nun $\alpha = 17\beta - 7$, $z = 15\alpha + 5$, $y = 13z - 1$ und $x = 11y$ war; so wird die kleinste gesuchte Zahl gefunden, wenn man $t = 1$ annimmt. Man hat nämlich alsdenn

$$\beta = 15, \ \alpha = 248, \ z = 3725$$

$y = 48424$ und $x = 532664$, wie a. angef. O. S. 314.)

Dieser Abkürzungen ohnerachtet, werden Sie finden, daß diese allgemeinere Auflösungsart, die so viel Erleichterung beym fortgesetzten Substituiren schaft, gleichwohl weitläuftiger sey, als die Hindenburgische allgemeine Auflösungsmethode, die nicht allein bey dergleichen unbequemen Zahlen sehr vortheilhaft, sondern auch überhaupt, wegen anderer bey dieser Gelegenheit angestellten Untersuchungen, lehrreich und sehr zu empfehlen ist.

Zusatz des Herausgebers.

Die Aufgabe: Eine Zahl zu finden, welche durch, so viel als man will, gegebene Zahlen dividirt, eben so viel gegebene Reste läßt, gehört, wenn weiter nichts von der zu suchenden Zahl angegeben wird, das sie näher kennen lehrt *), zu den unbestimmten Aufgaben. Daß Herrn

*) Wie z. B. in der Aufgabe (S. 206) der Umstand, daß die dort zu suchende Zahl der einzelnen Stücke zwischen 14 und 15 Schock liege und falle.

M. Lübickens Freund die Auflösung solcher Aufgaben mühsam gefunden hat, wird um so weniger befremden, wenn man erfährt, daß selbst Clausberg, dieser so geübte Rechner, dergleichen Aufgaben zu den schwerern gezählt, und schon die Aufsuchung der Zahl, z. B. (durch ordentliche Rechnung, nicht durch Versuche) welche in 7 aufgeht, und in 15 dividirt 10 übrig läßt, einen harten Knoten genannt hat. Seine Beyspiele erstrecken sich auch nicht über zwey Divisoren hinaus, die noch dazu kein gemeinschaftliches Maaß haben dürfen *). Indessen hat doch schon Bachet die dahin gehörige Hauptaufgabe vollständig gelöst, und gezeigt, wie man alle Gleichungen vom ersten Grade mit zwey oder mehrern unbekannten Größen, in ganzen Zahlen auflösen können. Auch haben Euler (a. a. O.) und vornehmlich Herr de la Grange **) den Zusammenhang dieser Aufgabe mit der unbestimmten Gleichung $a = bx - cy$ für die ganzen Zahlen a, b, c, x, y, nachgewiesen und erläutert. Daß man also diese Aufgabe vorlängst durch ordentliche Rechnung, wie sich Clausberg ausdrückt, aufzulösen gewußt habe, das ist aus dem hier angeführten klar; es fragt sich nur, ob diese Auflösungen auch alle erforderliche Leichtigkeit und Geschmeidigkeit haben? Die Weitläuftigkeit, auf die man schon verfällt, wenn man das für zwey Divisoren und Reste von Euler gelehrte allgemeine Verfahren auf drey (a. a. O. §. 21) überträgt, oder die von

*) Demonstrat. Rechk. 4. T. §. 1366. No. 2. Not. 2.

**) Mém. de l'Ac. des Sc. Berl. année 1768. p. 220 — 222. probl. 4, art. 24. und Coroll. 25. Eine andere Auflösung (die einfachste unter den am meisten abgekürzten, wie sie dort genannt wird) wird schon im vorhergehenden Jahrgange (1767. p. 294, 295.) beygebracht, und, eben so wie jene, auf die Auflösung der unbestimmten Gleichung $a = bx - cy$ (art. 8. p. 173) zurückgeführt.

von Herrn de la Grange nachgewiesene Verbindung und Behandlung der gegebenen Functionen zu unbestimmten Gleichungen vornimmt, läßt die Verwickelung voraus übersehen, in die man bey mehrern Divisoren und Resten nothwendig gerathen muß, und spricht so für das Gegentheil. Dieser Umstand veranlaßte mich vor einigen Jahren, diesem Problem weiter nachzudenken, und seine Auflösung auf einem ganz neuem Wege — dem combinatorischen — zu versuchen. Dies veranlaßte die obenangeführte Abhandlung von den cyklischen Perioden.

Wie die cyklischen Perioden durch der gegebenen Reihen 1, 2 ... α; 1, 2, 3 ... β; 1, 2, 3, 4 ... γ; u. s. w. fortgesetztes Schreiben in senkrechten Colonnen neben einander, formirt werden, und wie sie, nach Beschaffenheit der Zahlen α, β, γ ... auf eine doppelte Art verschieden sind, muß in der angeführten Abhandlung selbst nachgesehen werden. Hier genügt es anzumerken, daß, so wie die $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ in einer horizontalen Reihe nebeneinander zu stehen kommen, der Period geendigt sey. Ein solcher Period besteht demnach, aus der Anfangscomplexion 1, 1, 1, 1, 1 ..., der Endcomplexion $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ... und allen übrigen dazwischen fallenden Complexionen, deren festbestimmte Folge auf einander von dem angenommenen Verbindungsgesetze abhängt. Daraus erhellet zugleich, daß hierbey zwey Hauptfragen vorkommen müssen: 1) Die Ordnungszahl einer Complexion in der Periode (die wievielste sie in der Periode sey) ist gegeben, man soll die Complexion angeben. 2) Aus der gegebenen Complexion, ihre Ordnungszahl in der Periode zu bestimmen. Die Beantwortung der ersten Frage hat nicht die geringste Schwierigkeit und fällt von selbst in die Augen; anders verhält es sich mit der zweyten, deren Beantwortung zugleich die Auflösung der in diesem Aufsatze vorgelegten Aufgabe enthält.

Unter mehrern in der oft angeführten Abhandlung von mir gegebenen Auflösungen, ist unstreitig die von Herrn M. Lüdicke oben (S. 208.) aufgeführte die allgemeinste und directeste, welche, für die gesuchte Zahl x, auf die Formel führt:

$$\frac{9A+5}{2}.10.11+\frac{10B+9}{9}.9.11+\frac{11C+0}{2}.9.10=x$$

Hier giebt es nun unendlich viel Werthe für A, B, C, wo x eine ganze Zahl bleibt. Die in der Abhandlung gebrauchten Werthe A = 1; B = 0; C = 2, geben x = 1859, von welcher Zahl 990 (die Menge aller Complexionen der Periode) abgezogen, die bestimmte Zahl 869 der Aufgabe giebt; wie daraus erhellet, daß 869 = 14 Schock + 29, also zwischen 14 und 15 Schock liegt, und zugleich alle übrige Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Die Zahl 869 geradezu zu treffen, dürfte man nur A = 1; B = 0; C = 0 setzen. Für A = − 1; B = 0; C = 0 käme x = − 121, folglich − 121 + 990 = 869, wie vorhin. Man kann sich nehmlich mehrere (unendlich viele) Perioden an einander gesetzt denken; und von irgend einer willkührlich gewählten Anfangscomplexion 1, 1, 1, 1, 1 ... (als einer ersten) die Complexion vor- und rückwärts (positiv und negativ) zählen; und so übersieht man sogleich, daß die von 1, 1, 1, 1, 1 ... an aufwärts gezählte − 121ste Complexion, mit der von eben dem Anfange herunterwärts gezählten + 869sten übereinkommen müsse; wie auch daraus erhellt, daß beyde Zahlen (ohne Rücksicht auf ihre Zeichen) die Zahl 990 (die Summe aller Complexionen der Periode) zusammen geben. Natürlich verlangt und sucht man die positiven Werthe von x. Diese sind, für die unbestimmte Aufgabe

$$x = 869;\ 869 + 1.990;\ 869 + 2.990;\ \text{u. s. w.}$$

Diese

Diese Auflösung der Aufgabe ist in der Abhandlung offenbar deshalb gewählt worden, um ein Beyspiel meiner Methode zu geben; sonst könnte man noch die erhebliche Einwendung dagegen machen, daß die Aufgabe, wie sie hier von ihrem Verfasser ist vorgelegt worden, eine ungleich viel leichtere Auflösung zulasse, die man auch nicht leicht verfehlen kann, wenn man die erste Bedingung (der Gränze zwischen 14 und 15 Schock) mit den folgenden etwas näher zusammenhält und vergleicht.

Diese erste Bedingung giebt nehmlich für die Menge der einzelnen Stücke, die der Kaufmann gehabt hat, die Gleichung $x = 14 . 60 + y = 840 + y$; wo y den Ueberschuß über 14 Schock bedeutet. Dieses y näher zu bestimmen, dient vor andern die letzte Bedingung, nach welcher x durch 11 ohne Rest sich muß dividiren lassen. Daraus folgen für y die fünf Werthe 7, 18, 29, 40, 51; die eben so viel verschiedene Ausdrücke $840 + 7$; $840 + 18$; $840 + 29$; $840 + 40$; $840 + 51$ für x geben. Von diesen können aber $840 + 18$ und $840 + 40$, und eben so $840 + 7$ und $840 + 51$, nicht statt haben; die beyden ersten, weil sie, durch 2 dividirt, nicht 1, die beyden letzten, weil sie, durch 3 dividirt, nicht 2 übrig lassen. Folglich ist $x = 840 + 29 = 869$ die gesuchte Zahl, die auch allen Bedingungen zugleich Genüge thut.

Dies hat vermuthlich der Verfasser der Aufgabe nicht bedacht, die er doch gewiß nicht so hat abfassen wollen, daß sie außer der von ihm versuchten Eulerischen, oder einer andern ähnlichen Methode, noch eine so äußerst leichte Auflösung zuließ. Es ist ihm hier so gegangen, wie es zuweilen den Verfassern von Räthseln zu gehen pflegt, daß sie, wider ihr Wissen und Erwarten, eine Bedingung mit angeben, die für sich oder mit andern zusammengehalten, auf einmal zu viel verräth. Es konnte auch die erste

Bedin-

Bedingung (wodurch nehmlich die Zahl 869, aus unzählig viel andern bestimmt wird, die außerdem statt haben könnten) auf sehr mannichfaltige Art anders ausgedruckt werden. Es durfte nur, um ein Beyspiel zu geben, der Antwort des Kaufmanns am Ende noch Folgendes beygefügt werden:

„Auch habe er (der Kaufmann) gefunden, daß die „Zahl der Stücke, die er gehabt habe, gerade die kleinste gewesen sey, die man haben müsse, wenn alle Be„dingungen zusammen zutreffen sollen. Es wird ge„fragt u. s. w.“

Hier fällt nun der obige Einwurf ganz weg, weil man schlechterdings genöthiget ist, diese, obschon bestimmte Aufgabe, anfangs wie eine unbestimmte anzusehen, und auch eben so aufzulösen. So etwas hat vermuthlich Herrn M. Lübickens Freund in Gedanken gehabt.

Hindenburg.

Auszüge

VIII.

Auszüge und Recensionen neuer Bücher.

Lehrbuch der Hydraulik, mit beständiger Rücksicht auf die Erfahrung. Von Karl Christian Langsdorf, Kön. Preuß. Rath. Altenburg, in der Richterschen Buchhandlung 1794.

Fortsetzung des Lehrbuchs der Hydraulik. Daselbst, 1796. Zusammen 4 Alph. 10 B. Text; Vorreden und Inhalt 16 B. 4. mit 53 Kupfert.

Es wird keiner Entschuldigung bedürfen, daß die Beurtheilung dieses Werks bis jetzt verschoben worden, da nun nicht mehr die Absicht dabey ist, es bekannt zu machen, sondern die dem Verfasser eigenen Behauptungen zu prüfen. Den Inhalt desselben hat schon ein sachkundiger Recensent in der Allgem. Litteraturzeitung 1795, Nr. 26, und 1796, Nr. 70, ausführlich mit guten Bemerkungen angegeben. Ich will mich also damit nicht aufhalten. Man wird schon wissen, daß dieses Lehrbuch der Hydraulik das vollständigste ist, was wir besitzen; daß es nicht allein die theoretischen und empirischen Lehren von der Bewegung des Wassers, sondern auch eine umständliche Anwendung auf das Maschinenwesen enthält. Man findet darin zugleich die Lehre von den Gewölben zum Brückenbau, die Untersuchung der Bewegung der Windmühlenflügel, die Theorie der Dampfmaschinen, Berechnungen über Stangenkünste, Getraidemühlen und Schwungräder, wenn gleich das meiste hievon nicht sowohl in die Hydraulik als in die Maschinenlehre gehört. Im strengen Verstande gehört zu der hydraulischen Mechanik nur die Untersuchung über die Bewegung des Wassers, sofern es entweder Last oder bewegende Kraft ist.

In-

Inzwischen braucht ein Schriftsteller sich nicht ganz genau an die methodischen Gränzen zu binden, wenn die Ueberschreitung mit Nutzen für den Leser, wie in dem gegenwärtigen Falle, verbunden ist.

Der Vortrag des Verfassers unterscheidet sich besonders dadurch, daß er die Erfahrung überall der Theorie als Gehülfin an die Hand gehen läßt. Durch die Erfahrung geleitet (sagt er Vorr. VII.) müsse man lieber auf manche Demonstration Verzicht thun, als daß man ungeprüfte Voraussetzungen mit in den Calcul verwebe, und wichtige physische Umstände aus der Acht lasse, ohne sich um Abweichungen von der Erfahrung zu bekümmern, bloß weil man den Grund dieser Abweichungen nicht einsehen kann, oder es einem mathematischen Lehrbuche als einen unverzeihlichen Fehler anrechnet, Sätze ohne eigentliche Demonstration aufzustellen.

Es ist allerdings wahr, daß in der Hydraulik die Theorie nicht vermag, die Erfolge hinlänglich genau aus dem Gegebenen zu bestimmen, weil man theils Umstände annehmen muß, die in der Wirklichkeit eine Abänderung leiden, theils aber auch Umstände bey Seite setzt, die einen beträchtlichen Einfluß auf den Erfolg haben. Die Hydraulik ist gewissermaßen schwerer, als die physische Astronomie, weil man es in dieser größtentheils mit einzelnen schweren Puncten zu thun hat, in jener aber mit unzählig vielen, die jeder ihre besondern Bewegungen haben. Die Erfahrung allein ist aber noch viel unzuverläßiger, als die bloße Theorie, weil durch Veränderungen der Umstände die Erfolge ganz anders ausfallen können, als wie sie die aus einzelnen beobachteten Fällen hergeleitete Regel angiebt. Die reine Theorie ist sicherer, wenn man nur bey ihrer Anwendung das Quatenus derselben nicht vergißt. Eine empirische Formel mag brauchbar seyn, wenn in einer Reihe von Effecten nur eine einzige Größe veränderlich ist, um

das

das Gesetz derselben darzustellen, sollte man auch dasselbe nur errathen, ohne den Grund davon begreiflich machen zu können. Denn es ist hier nur um eine individuelle Interpolationsformel zu thun. Allein hydraulische Lehrsätze kann die Erfahrung nicht geben. Das Errathen aus undeutlich gedachten Gründen ist sehr mißlich; man müßte einen empirischen Lehrsatz verschmähen, wenn ihn auch die Erfahrung zu bestätigen schiene. Herr Langsdorf hat verschiedene solche Lehrsätze aufgestellt; aber wie unzuverläßig diese Methode ist, mag ihn seine eigene Erfahrung belehren, da er in §. 688 sich genöthigt bekennt, seine in eben diesem Werke vorgetragene Theorie von dem Stoße eines isolirten Strahls zurückzunehmen. Ein solcher Fall kommt auch §. 386 und §. 740 vor. Es wird nöthig seyn, einige Lehrsätze des Verf. von dieser Art anzuzeigen, um Ungeübte auf die schwachen Stellen des Werks aufmerksam zu machen, ohne darum den daran gewandten großen Fleiß und die praktische Brauchbarkeit desselben zu verkennen. Das Interesse der Wissenschaft selbst erfordert es, nichts Muthmaaßliches darin einzulassen.

Die allgemeine Gleichung für die Bewegung des Wassers durch ein Gefäß von irgend einer Gestalt hat Hr. L. nicht zum Grunde gelegt, weil er die Theorie, worauf sie beruht, für unzuverläßig hält, daher es nicht nöthig sey, dem Lehrlinge der Hydraulik damit Mühe zu machen. Man müsse doch Erfahrungen dabey zu Hülfe nehmen, und könne sie nur in so fern als gültig erkennen, als sie mit der Erfahrung übereinstimmt. Es ist wahr, daß in der Theorie von der Bewegung des Wassers durch Röhren und andere Gefäße der Weg aller Wassertheilchen als derselbe angesehen wird, nämlich als der längs der centrischen Linie; daß also die Kraft zu der Ablenkung auf den wirklichen Weg, der Unterschied der Zeit auf dem erdichteten und dem wirklichen Wege, und die dadurch erfolgende Abänderung der Bewegung

gung auf der centrischen Linie, nicht in Rechnung gebracht werden. Allein wenn wir die Theorie wegen dieser bis jetzt unvermeidlichen Mangelhaftigkeit wegwerfen wollen, so geben wir den wissenschaftlichen Grund der Hydrodynamik ganz auf.

Est quiddam prodire tenus, si non datur ultra.

Wir müßten in jedem einzelnen Falle eine muthmaaßliche Formel der Erfahrung anzupassen suchen, oder uns ganz und gar mit Erfahrungssätzen behelfen. Freylich muß man nicht die Gleichung, welche das Resultat der Theorie ist, auf jedes Gefäß für anwendbar halten. Hätte das Gefäß eine oder mehrere beträchtliche Verengerungen, so könnte der Erfolg von der Berechnung merklich abweichen. Selbst bey einem prismatischen Gefäße, das voll erhalten wird, zeigt sich, daß die wirkliche Wassermenge nur etwa ⅞ der berechneten ist, wenn das Wasser nämlich durch eine kurze Ansatzröhre ausfließt. Inzwischen wird bey einem aus cylindrischen Stücke zusammengesetzten Gefäße, welches in der Anwendung der wichtigste Fall ist, die Voraussetzung der Theorie beynahe Statt finden, bis auf die Stellen, wo der Durchmesser sich ändert. Warum wollten wir hier ein Mittel verschmähen, wodurch sich die vortheilhafteste Einrichtung der Maschine, und, wenn gleich nicht der wirkliche Effect doch die Gränze desselben, bestimmen läßt? Die Erfahrung muß allerdings mit zu Hülfe genommen werden, um die Berechnung mit dem Erfolge zu vergleichen. Eine gut bearbeitete Theorie ist das einzige Mittel die Erfahrung gehörig zu benutzen. Wenn aber die Theorie unsicher ist, so bleibt alle Erfahrung nur isolirte Kenntniß. Die von Hr. L. bey Seite gesetzte Theorie ist, wenn sie gut vorgetragen wird, nicht so schwer, daß man mit mäßiger Kenntniß der Analysis und der Bewegungsgesetze sie nicht sollte begreifen können. Ohne diese Hülfsmittel kann man auch Hrn. L. Lehrbuch nicht verstehen, wie es überhaupt unmög-

lich

ist, mit gemeinen elementarischen Kenntnissen in der Hydynamik auszureichen.

Das erste Kapitel führt die Ueberschrift: allgemeine Bechtungen über die Bewegung des Wassers. Es enthält aber Beobachtungen über die Menge des aus prismatischen Geen in einer Secunde ausfliessenden Wassers. Daß die Gewindigkeit sich wie die Quadratwurzel aus der Wasserhöhe halte, bey einem weiten Gefäße und kleiner Oeffnung, wird ein Erfahrungssatz vorgelegt. Die Theorie giebt, wie bent ist, für ein sehr weites, immer volles Gefäß, die Gewindigkeit so groß als die durch den Fall von der Wassere erhaltene, sobald die Beschleunigung unmerklich klein geden ist. Sie weicht nur in der absoluten Größe von der ahrung ab, welches aus den vorher angeführten Umständen ärlich ist. Hr. L. sagt §. 8. daß das Wasser durch eine ne Oeffnung mit derjenigen Geschwindigkeit gehe, die zu ganzen Wasserhöhe gehört. Allein wie stimmt damit die ingere Wassermenge, welche die Beobachtung giebt? Nun echnet Herr L. zwar seiner Voraussetzung zufolge den Querütt des zusammengezogenen Strahls, den er 0,62 der Oeffg findet; allein bei einer kurzen Ansatzröhre, wo die Zummenziehung wegfällt, ist die Wassermenge nur etwa 0,81 vollen, welche die unberichtigte Theorie giebt. Die Höhe der Geschwindigkeit ist also nur nahe 0,66 der Wasserhöhe diesem Falle. Nach Newtons Beobachtungen ist der verenn Querschnit = 0,706 der Oeffnung. Die Behauptung . gründet sich auf eine angebliche Erfahrung, daß ein lothter Wasserstrahl die Höhe des Wassers im Gefäße erreiche, nn die Wasserhöhe nicht über 4 F. betrage. Wenn die Errung auch ihre Richtigkeit hätte, so würde der Satz von der schwindigkeit auch auf eine Höhe unter 4 F. einzuschränken n. Was könnte aber ein so eingeschränkter Satz helfen? würde auch dem vorher angeführten Erfahrungssatz widerechen. Was noch in §. 8. gesagt wird, daß bey einer grös-

sern

fern Wasserhöhe als 4 F. der Widerstand der Luft und andere Umstände die Höhe des Strahls vermindern, widerspricht zum Theil dem §. 116, wo es ganz richtig heißt, daß der Widerstand der Luft bey einem springenden Strahle fast gar nicht in Betrachtung kommen könne.

Das zweyte ganz kurze Kapitel handelt von der Gestalt des (eines) Gefäßes ohne Boden, in welchem jede horizontale Wasserschichten mit der ihrer Tiefe unter dem Wasserspiegel zugehörigen Geschwindigkeit sinkt. Es ist Newtons Kataracte (Hr. L. nennt sie sehr uneigentlich ein hyperbolisches Sphäroid,) von deren Gebrauch man aber hier keinen deutlichen Begriff erhält. Newton gebraucht sie, wie er sonst auch physisch-mathematische Fictionen aus Noth sich erlaubt, um einige Sätze über die Bewegung des Wassers zu erweisen. Auf eine mir ganz unverständliche Art wird hier daraus das Verhältniß des Ausflusses aus einem prismatischen Gefäße zu dem aus der Kataracte hergeleitet, welches ich auch von der Berechnung des zusammengezogenen Strahls sagen muß. Alles scheint hier nach Gutdünken angenommen zu seyn. — Wenn von der ausfließenden Wassermenge bloß die Frage ist, so ist es einerley, ob man die Oeffnung oder den verengerten Querschnitt des Wasserstrahls mit der wirklichen Geschwindigkeit multiplicirt, oder die gehörig verminderte Oeffnung mit der Geschwindigkeit, die zu der Wasserhöhe gehört, wie es der Vf. thut. Allein wo es auf die Geschwindigkeit zugleich ankommt, ist es nicht einerley. Das ist aber der Fall bey der Untersuchung über den Stoß des Wassers gegen eine Fläche, wobey der Vf. in der Folge das letztere Product für das erstere setzt. —

Die Formel (§. 27 d) für die beschleunigende Kraft in einer Röhrenleitung ist unrichtig. Die von Hr. L. zurückgesetzte Grundgleichung der Hydrodynamik giebt einen andern Ausdruck. Den Beweis, der auf eine Vergleichung mit Kräften, die an Scheiben auf einer gemeinschafftlichen Axe wirken, gebaut ist, verstehe ist gar nicht. Bey dem Vf. heißt die Fallhöhe in einer Secunde für eine Schwerkraft die Beschleunigung der Kraft, noch dazu ohne alle Erklärung für den Ungeübten. Die ganze Rechnung führt zu nichts Brauchbarem. Auch die vorhergehenden Rechnungen über den Ausfluß aus einem Gefäße, das in ein anderes mit Wasser eingehängt ist, möchten weder theoretisch noch praktisch brauchbar seyn. Das möchte auch bey den folgenden Rechnungen dieses dritten Kap. der Fall seyn.

In

In dem 6. Kap. wird von dem Ausfluß aus Gefäßen mit wagrechten oder lothrechten Scheidwänden, in welchen sich Oeffnungen befinden, gehandelt. Die Untersuchung ist in mehr als einer Absicht brauchbar. Hr. L. theilt einige von ihm angestellte Versuche mit. Anstatt das Wasser in einem lothrechten Strahle herausspringen zu lassen, wäre es besser gewesen, dem Boden eine Oeffnung zu geben, weil man aus der Höhe des Strahls nicht mit Sicherheit auf die dazu angewandte Kraft schließen kann. Hr. L. nimmt seine vormahlige Theorie, die er in den Anmerkungen zu Bossüts Hydrodynamik vorgetragen hatte, hier zurück. Ob die neue sicherer sey, ist noch die Frage. Es kommt darauf an zu bestimmen, was die Veränderungen der Geschwindigkeit und der Richtung bey dem Durchgange durch eine Oeffnung in einer Scheidwand für eine Wirkung auf die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers haben. Dies möchte schwerlich sich erhalten lassen, da man es ja bey dem einfachen Ausflusse aus einem Gefäße nicht zu bestimmen vermag.

In dem achten Kapitel wird der Ausfluß des Wassers durch Röhrenleitungen untersucht, das schwerste in der Hydrodynamik. Den Unterschied zwischen der Wasserhöhe und der zu der Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers gehörigen Fallhöhe schreibt Hr. L. einem Widerstande der Röhrenwände zu. Wie die Röhrenwände, wenn sie mit der Richtung des Wassers parallel laufen, einen Druck demselben entgegen verursachen können, ist gar nicht klar. Das Reiben kann nicht in Betracht kommen. Denn wenn auch die nächst an den Wänden vorbeystreichenden Theilchen einen geringen Aufenthalt leiden sollten, so können doch, wegen der großen innern Beweglichkeit der flüssigen Masse, die nächst an diesen hinfließenden ohne Hinderniß fortgehen, es müßte denn eine kleine Tenacität der Wassertheilchen Statt haben. Auch sieht man nicht ein, wie bey einerley Länge und Geschwindigkeit der Widerstand sich umgekehrt wie die in Bewegung gesetzte Masse verhalten könne, wenn man auch, um des Reibens willen annehmen möchte, daß derselbe sich directe wie die Röhrenfläche verhalte. Uebrigens ist die §. 65. Nr. 4. aufgestellte Formel für die Geschwindigkeit des Ausflusses ganz unrichtig, wie es die Prüfung nach den §. 23 angeführten, von Bossut angestellten Beobachtungen zeigt. Legt man hier die erste Beobachtung des 7. Paars zum Grunde, so ergiebt sich für die zweyte Beobachtung desselben Paars die Höhe zu der Geschwindigkeit = 3,659 Zoll, da die Beobachtung nur 0,067 giebt. Für die erste Beobachtung des achten Paars giebt die

Rechnung 18,235 Zoll, die Beobachtung 4,786 Z. Fü
erste des 9. Paars jene 9,425 Z. diese 0,039 Zoll. Wei
theilt Hr. L. eine von Buat gefundene Formel mit, di
gemachten Beobachtungen fast genau darstellt. Er rühm
dieser, daß sie allein der Hydraulik mehr nutze, als eine
ge der tiefsinnigsten akademischen Abhandlungen, die,
untersucht, am Ende zu weiter nichts dienen als zu Ueb
im Rechnen. Für eine bloße empirische Interpolationsf
möchte diese Lobpreisung ein wenig zu stark seyn. Sie ist
dings künstlich genug; ich würde aber eine weniger ge
aber begreiflichere und besser übersehbare Formel vorz
Was aber befremden muß, ist, daß Hr. L. eine ausfüh
Tafel für die Geschwindigkeit des Wassers in Röhren v
bis 1300 Toisen Länge von 24 verschiedenen Durchmessern
nach der hochgelobten Buatschen Formel, sondern nach
eigenen berechnet hat. Bey dieser hat er zwar andere
achtungen zum Grunde gelegt, als ich gethan habe, und
zwey, um daraus ein Mittel zu nehmen; auch nimmt
Höhe zu der Geschwindigkeit nur etwa $\frac{2}{3}$ der eigentlichen
höhen. Allein sie bleibt bey alledem unzuverläßig.

In dem 9. Kap. wird der Druck des Wassers geg
Wände der Röhren, und der Ausfluß durch eine Seitenöf
in der Röhrenleitung untersucht. Hr. L. tadelt, und mit
die Schriftsteller über die Hydrodynamik, die, wie er
alle behaupten, daß bey einem vollen Ausfluß der Druck
die Röhre an jeder Stelle gleich groß sey. Seine Form
den Fall, da die Ausflußmündung die ganze Weite der
hat, ist auf eine bloße Proportionsrechnung gegründet,
schen doch richtig, wenn die Geschwindigkeit aus der daz
rigen Höhe richtig bestimmt wird. Die Höhe des Wasser
Behälter über der Mitte der Ausflußöffnung sey H, die
Geschwindigkeit in der Röhre gehörige Fallhöhe sey $= z$,
Länge der Röhre $= L$; die Länge von der Einflußmündu
zu einer gewissen Stelle $= \lambda$, die Höhe des Druck
selbst $= h$, so ist (und zwar zufolge der hydrodynam
Grundgleichung) $h = \frac{L - \lambda}{L}(H - z)$. Hr. L. setzt $z =$
wenn V die Geschwindigkeit in Zollen bedeutete, a
daß $z = \frac{V^2}{725}$ seyn muß, die Fallhöhe in einer S
de $= 15,1$ Par. F. genommen. Daher trifft seine Rech
mit den von ihm selbst angestellten Versuchen nicht üb
Der Wasserstrahl sprang aus einer Oeffnung 2,75 Zoll

Nach Hrn. L. Formel ist die Höhe des Drucks nur 1,76 Zoll; nach meiner 2,42 Zoll. Anstatt eines springenden Strahls wäre es besser gewesen, den Druck durch eine aufgesetzte Glasröhre zu erforschen. — Die Formel §. 107. für den Fall, da die Ausflußmündung kleiner ist als der Querschnitt der Röhre, ist unrichtig. Aus der hydrodynamischen Grundgleichung finde ich, wenn D den Durchmesser der Röhre, δ den der Oeffnung bedeutet, die Röhre horizontal und gerade angenommen, daß die Höhe des Drucks ist

$$h = \frac{L-\lambda}{L} H + \left(\frac{\lambda}{L} - \frac{\delta^4}{D^4}\right) z.$$

Die Rechnungen für den Fall, da die Einflußmündung kleiner ist als die Weite der Röhre, und den, da Seitenöffnungen in der Röhre angebracht sind, scheinen überflüssig. Bey dieser Gelegenheit gebe ich den Rath, eine Röhrenleitung, die zu wenig Wasser giebt, am Ende nach der Ausflußmündung etwas zu erweitern.

Das 10. Kap. handelt von Springwerken. Richtig wird bemerkt, daß die Luft die Höhe des Strahls nicht vermindern kann. Die Hauptursache, welche hier angegeben wird, ist richtig, nur daß nicht sowohl ein Zusammenpressen als ein Forttreiben der höhern Schichten vorgeht. In so fern sich diese ausbreiten, sind sie nicht hinderlich, wie hier scheint gedacht zu werden. Vergessen ist der nicht unwichtige Umstand, daß die Kraft, welche auf die Bewegung des Wassers in dem Behälter und der Fallröhre verwandt wird, nicht auf die Hervorbringung der Geschwindigkeit in der Mündung verwandt werden kann. Die empirische Regel, die Mariotte gegeben hat, läßt sich etwas genauer abfassen. Die Unterschiede der Wasserhöhen und Strahlhöhen kommen dem Verhältniß der Quadrate der Wasserhöhen näher als dem der Quadrate der Strahlhöhen; darum muß man die Höhe des Strahls nicht durch die Auflösung einer quadratischen Gleichung suchen, wie §. 117 geschehen ist. Ich finde aus Mariotte's Erfahrungen, daß der Unterschied beider Höhen nahe das Quadrat der Wasserhöhe durch 376 dividirt ist. Freylich bleibt die Regel unsicher, da die verschiedenen Umstände nicht dabey in Betracht gezogen werden. Auch finde ich aus denselben, daß die vortheilhafteste Fläche der Sprungöffnungen sich nahe wie die Wasserhöhe verhält, (nach dem Vf. wie die Quadratwurzel aus der Höhe), und daß bey einer Wasserhöhe von 55 F. die vortheilhafteste Oeffnung nicht 6 Lin. sondern 8½ Lin. weit ist. Es möchte also

unrichtig seyn, für eine Fallhöhe von 50 F. die vortheilhafteste Oeffnung 7 Lin. weit zu machen, wie §. 129. vorgeschrieben wird, so daß die hierauf gegründete Formel zu verbessern seyn wird. Am sichersten ist es mehrere Mündungsstücke verfertigen zu lassen, um die beste durch Erfahrung zu bestimmen. Bey Feuerspritzen kann in einem Falle eine weitere, in andern eine engere Mündung am dienlichsten seyn.

In dem 14. Kap. von dem Widerstande und Stoß des Wassers und der Luft ausführlich und lehrreich. Der Verf. hat diese Untersuchung mit eigenen vielen Versuchen über den senkrechten und schiefen Stoß eines isolirten Strahls auf eine Fläche bereichert. Die mehresten der darüber angestellten Versuche wird man hier finden. Die von de Borda gemachten, fehlen. Die neuesten von Hutton und Chapman haben schwerlich schon benutzt werden können. Das Verfahren, dessen Buat sich bedient hat, die Stärke des Stoßes zu messen, scheint zu seinem Zwecke nicht brauchbar, wiewohl Hr. L. es gut ausgedacht und höchst lehrreich nennt. Der Strahl stößt gegen die Mündung einer gebogenen Röhre, deren einer Schenkel horizontal der andere lothrecht ist. Wenn die Mündung der gebogenen Röhre nahe bey der Ausflußöffnung des Gefäßes ist, so sind jene und dieses wie ein einziges Gefäß anzusehen, das unten eine Oeffnung zum Ausflusse hat. Es muß also das Wasser in der Röhre und dem Gefäße gleich hoch stehen. Weil von der Ablenkung der Wassertheilchen hier kein Druck gegen das Wasser in der Röhre entsteht, so leidet das Wasser in der Röhre nur bloß Druck nach der Richtung des Strahls, und dieser Druck ist dem rückwärts gehenden nach dem Gefäße gleich. Bey der Berechnung, die Hr. L. über seine eigenen Versuche anstellt, möchte folgendes erinnert werden können. Er nimmt den Querschnitt des zusammengezogenen Strahls für die Grundfläche einer Wassersäule an, die so hoch als die Wasserhöhe ist, und vergleicht ihr Gewicht mit demjenigen, das dem Stoße gleich ist. Allein der zusammengezogene Strahl, so wie ihn Hr. L. bestimmt, ist zu klein, und die Geschwindigkeit zu groß. Die Frage ist, wie kann man aus der Wassermenge, die in einer gegebenen Zeit auf eine Fläche senkrecht stößt und aus ihrer Geschwindigkeit die Stärke des Stoßes bestimmen? Die Geschwindigkeit wird man nicht zuverläßiger bestimmen können, als durch Vergleichung der Ausflußöffnung mit der in einer gegebenen Zeit ausgeflossenen Wassermenge. Das Resultat wird inzwischen wenig verändert, wenn man die Ausflußöffnung mit der Geschwindigkeit in derselben nimmt. Der Stoß ist ein sehr weniges kleiner als das doppelte des Gewichts der

Säu-

Säule über jener Oeffnung von einer Höhe, die der Fallhöhe zu der Geschwindigkeit gleich ist. Nach Hr. L. Rechnung ist der Stoß ein sehr weniges größer. Es ist Schade, daß nicht auch Versuche mit Flächen von verschiedener Größe angestellt sind, um zu zeigen, was die Ausbreitung des Strahls auf der Fläche und die Ablenkung von der Richtung auf die Größe des Stoßes für Einfluß hat. Die Zusammensetzung des Stoßes aus einem hydrostatischen und einem hydraulischen Drucke (§. 207.) scheint zu willkührlich. Warum wird hier der Bernoullischen und Eulerischen Rechnung über die Größe des Stoßes nicht erwähnt? Sie machen wenigstens in der dabey gemachten Voraussetzung die Sache sehr klar. Die krumme Linie, welche die Wassertheilchen beschreiben, ist keine hyperbelartige, wie Hr. L. glaubt. Noch bemerke ich, daß in der Tafel S. 191. Col. 7 die erste Zahl 0,0324 unrichtig ist, und 0,03237 heißen muß, welches die Vergleichung mit dem wirklichen Stoße sehr ändert. Den schiefen Stoß findet Hr. L. durch viele Versuche sehr genau dem Quadrat des Sinus des Anstoßwinkels proportional. Für diese Bemühung verdient er vielen Dank. Das Resultat wird sich nur wenig ändern, wenn es nöthig seyn sollte, eine Aenderung der Rechnung wie beym senkrechten Stoße vorzunehmen. Den Widerstand, den ein bewegter Körper in einer unbegrenzten (beträchtlich ausgebreiteten) flüssigen Masse leidet, unterscheidet Hr. L. mit Recht sorgfältig von dem Stoße einer bewegten flüssigen Masse gegen einen ruhenden Körper. Seine Theorie möchte zwar nicht genügen; doch die Zusammensetzung eines hydraulischen und hydrostatischen Drucks ist nicht gehörig begründet; allein die Erfahrungen, die er anführt, geben doch gutes Licht über diese schwere Materie. Die Formel (§. 219) über den Widerstand der Luft scheint errathen, nicht durch eine Interpolationsmethode gefunden zu seyn. Sie trifft inzwischen ziemlich zu. Um Bossüts Erfahrungen mit einem Körper, der vorn zwey unter einem veränderlichen Winkel zusammenstoßende Flächen hatte, darzustellen, liefert Hr. L. eine Formel, die theils eine circulare, theils eine logarithmische Function des Anstoßwinkels ist. Vielleicht könnte sie einfacher gemacht werden. Der Vf. hatte zuerst eine andere gefunden, die sich folgendergestalt darstellen läßt,

$$\varphi = \tfrac{1}{2} F (1 - x + x^2 + x^3),$$

wo x der Sinus des Anstoßwinkels, F der senkrechte Widerstand derselben Wassermasse gegen eine ebene Fläche, und φ der Widerstand gegen die schiefliegenden Flächen ist. Sie giebt aber für x = sin 19° ein Kleinstes, welches nicht seyn darf.

Nach

Man siehe, sie ist nur errathen. Die Formel müßte diese Gestalt haben:

$$\varphi = (a + bx^2 + cx^4 + \text{etc.}),$$

auch deswegen, damit der Widerstand derselbe bleibe, wenn der Anstoßwinkel negativ ist. Emersons Formel für Anstoßwinkel unter 40° hat, wenn sie auf eine veränderliche Größe reducirt wird, eine solche Form. Man kann jene Formel aber doch nur innerhalb gewisser bestimmten Gränzen der Erfahrung anpassen. Hutton hat in seinem mathematischen Wörterbuche, Art. Resistance, eine Formel mitgetheilt, die sich zu allen Anstoßwinkeln, selbst nahe genug bey kleinen, sehr genau schickt. Die bewegte Ebene ist ½ Qu. Fuß, ihre Geschwindigkeit 12 F. in einer Secunde, der Anstoßwinkel φ, und der Widerstand gleich dem Gewichte von $0,84\,(\sin\varphi)^{1,842\cos\varphi}$ Unzen.

Ich habe mich bey der Prüfung der physischen Hydraulik so lange aufgehalten, daß zu der Beurtheilung der technischen Hydraulick, die etwa zwey Drittheil des Werks einnimmt, kein Raum übrig bleibt. Man wird auch in dieser muthmaßliche Sätze, ohne eigentlichen Beweis, antreffen. Die Theorie von der Bewegung der Windmühlenflügel möchte ganz irrig seyn. Der Winkel eines ebenen Flügels, welcher das statische Moment am größten macht, soll 35°16' betragen, (§. 321), da die gewöhnliche Theorie, die mir ganz richtig scheint, 54°44' giebt. Inzwischen ist dieser Theil des Werks für die Praxis lehrreich, wenn man auch bey den Rechnungsformeln Vorsicht anzuwenden hat. Man wird einige neue Angaben darin antreffen. In dem 19. Kap. wird eine von dem Verf. erfundene Maschine beschrieben, die das Wasser durch Schwungkraft hebt. Es wird freylich noch darauf ankommen, ob die Kraft, die zur Ertheilung der Schwungkraft nöthig ist, beträchtlich kleiner ausfalle, als die zu der directen Erhebung des Wassers erforderliche. Die Einrichtung mit dem doppelten Hahn an der Wassersäulenmaschine (§. 393), wodurch eine ununterbrochene Kraft erhalten wird, ist sinnreich. Dieselbe Einrichtung schlägt Hr. L. auch zur Anwendung bey Dampfmaschinen vor (§. 400), welches Aufmerksamkeit zu verdienen scheint. — Bey der Verbindung von vier Ausgußröhren eines Druckwerks von vier Stiefeln mit einer auf jene senkrechten Röhre muß die starke Aenderung der Richtung der Wassertheilchen viele Kraft wegnehmen. Besser möchte es seyn, die Röhren in einen kleinen Behälter sich öffnen zu lassen.

In

In dem 32. Kap. von den Stampfmühlen erzählt Hr. L. die Versuche, welche er mit einem Modelle einer solchen Mühle angestellt hat, wobey aber das Rad durch einen isolirten Strahl (nicht durch Wasser in einem Gerinne) umgetrieben ward. Er findet seine in dem Vorhergehenden aufgestellte Theorie von der Erfahrung beträchtlich abweichend, und nimmt daher Gelegenheit sie zu verbessern. Allein, wie kann eine Formel, die keinen theoretischen Grund hat, aus den Erfahrungen an einem Modell zuverläßig berichtiget werden? Die gemeine Theorie giebt hier einen Stoß oder Druck, der 2[illegible] mahl kleiner ist als nach der Erfahrung.

In dem 33. Kap. von den Pochwerken wird aus den umständlichen Datis an einem Pochwerke mit unterschlächtigem Wasserrade die Kraft berechnet, welche der Last und der Friction gleich ist. Nach des Verf. Theorie ist die Kraft 404 Pf. wo der gesammte Widerstand zu 395 Pf. berechnet ist. Nach meiner in den Götting. Comment. Th. IX. vorgetragenen Theorie findet Hr. L. den Werth der Kraft nur 96 Pf. groß. Allein er hat einen Rechnungsfehler in der Bestimmung der Geschwindigkeit der Schaufeln begangen. Nach Verbesserung desselben giebt meine Theorie 404 Pf. Kraft; Hr. L. Theorie 483 Pf. Bey der Berechnung des Widerstandes sind kleine Fehler eingeschlichen, nach deren Verbesserung derselbe 398 Pf. groß wird. Doch ist die ganze Berechnung der Friction mißlich. Der Druck gegen die Scheibelatten, der von dem schiefen Druck der Hebedaumen gegen die Hebelatten entsteht, ist nicht in Betracht gezogen. Dagegen möchte die Friction an den Scheibelatten etwas zu groß gemacht seyn *). Inzwischen will ich aus diesem Falle auch nicht folgern, daß meine Theorie immer so gut mit der Erfahrung zutreffen werde. Sie ist hypothetisch richtig; allein die Wirkung des Wassers auf ein unterschlächtiges Rad ist nicht ganz so, wie ich sie für die Theorie voraussetze. Dazu kommt die Verwickelung von mancherley Gegenwirkungen an der Maschine selbst. Durch fehlerhafte Einrichtungen kann viele Kraft verloren gehen, wie es sehr wahrscheinlich bey der von Belidor beschriebenen Pulvermühle der Fall ist.

Man

*) Ich bitte den Leser, die lehrreiche Recension des zweyten Theils dieses Werks in der allgemeinen Litteraturzeitung 1796. Nr. 90 nachzusehen.

Man muß es der Mathematick als eine Gefälligkeit anrechnen, wenn sie sich auf technische Untersuchungen einläßt. Dabey hat sie das Recht, ihre Bedingungen so zu machen, daß ihr auszeichnender Charakter, die Gewißheit, im geringsten nicht leide. Darum glaubte ich es ihr schuldig zu seyn, mich gegen die Verletzung dieses ihres Charakters zu erklären. Selbst die freundschaftlichsten Verhältnisse müssen dem Interesse der Mathematik nachgesetzt werden.

G. S. Klügel.

---

2. Della Specola Astronomica de' regj studj di Palermo, Libro quinto, di Giuseppe Piazzi C. R. Regio Prof. d'Astron., socio della reale Acad. delle scienze di Napoli et Corrisp. di quelle di Torino et Pietroburgo. Palermo 1794 della reale stamperia. 232 Folio Seiten.

Den ersten Theil dieses vortreflichen Werks haben wir im zweyten und dritten Heft dieses Archivs den deutschen Lesern angezeigt; diesem fügen wir izt den 2ten Theil bey, der an sehr schätzbaren Beobachtungen nicht weniger reich ist. Zugleich empfiehlt sich diese Sammlung durch den Umstand, daß alle Beobachtungen hier sehr sorgfältig berechnet und mit den Tafeln verglichen worden sind, wobey Hrn. P. seine beyden Schüler D. Franz Gambino und D. Franz Buffalo unterstützten. Schon Darquier zeigte wie nöthig dieß sey, und beobachtete es selbst in den beyden herausgegebenen Bänden seiner Beobachtungen; doch konnte Hr. Darquier zur Ersparung der Kosten nur die letzten Resultate seiner Berechnungen abdrucken lassen. Da dieses hier nicht so sehr nöthig, so liefert Hr. P. immer die Hauptresultate; wodurch jede künftige etwa nöthige Prüfung sehr erleichtert wird.

Dieser 2te Theil oder das 5te Buch ist in 4 Theile (parti) abgetheilt, wovon der 1ste den Kometen im Jan. 1793 betrift, der

er 2te Sonnenbeobachtungen; der 3te Planetenbeobachtungen nd der 4te die übrigen Beobachtungen enthält.

arte I. Den Kometen entdeckte Hr. Nic. Cariotti, der Gehülfe des Hr. P., (er ist der 81ste und ward auch von Miß Herschel entdeckt) am 10. Jan. Bis zum 15. Februar konnte er nur 15mal beobachtet werden, so daß mittelst des ganzen Kreises Zenithdistanzen und Azimuthe beobachtet worden. Erlaubte es das Wetter so wurden mehrere Beobachtungen hinter einander gemacht; aus diesen die stündliche Bewegung des Kometen hergeleitet, und dann alle Beobachtungen auf eine Epoche gebracht, und aus den verschiedenen Bestimmungen ein Mittel genommen. Man sieht, daß Hr. P. keine Mühe gespart hat, um seine Beobachtungen so genau als möglich zu machen. Um den Grad der Genauigkeit näher kennen zu lernen, beobachtete er α Ceti auf eben die Art; die so gefundene gerade Aufsteigung war um 20″ von der bekannten verschieden. Da Kometen bekanntlich schlecht begrenzt sind, so glaubt Hr. P. da den Fehler noch größer. Vielleicht wären die Fehler kleiner wenn Hr. P. die Azimuthe mit umgewandten Höhenkreis hätte beobachtet; ein Umstand dessen Nothwendigkeit Hr. P. erst später entdeckte. Nach der la Caillischen indirekten Methode berechnete Hr. P. folgende Elemente dieses Kometen, die wir zugleich mit denen, die Hr. Méchain aus seinen Beobachtungen schloß, hersetzen. (Bod. Jahrb. 1797 p. 136).

	Piazzi	Méchain
nge des aufsteigenden Knoten	$9^s. 13^o. 14'. 44''$ ..	$9^s. 13^o. 17'. 36''$
eigung der Bahn	49. 7. 14 ...	49. 0. 24
rt d. Sonnennähe auf d. Bahn	4. 15. 52. 35 ...	4. 16. 5. 33
g. d. Entfern. d. Sonnennähe	9, 9853499 ...	9,9848926
urchgang in d. Sonnennähe	zu Pal. 1792 Dec. 27,2615	zu Paris 1792 27.D.$4^h 55'$ m.Z.
ichtung der Bewegung	Rückläufig	Rückläufig

Bey der Neigung der Bahn bemerkt Hr. P. selbst, daß durch Verminderung derselben um ungefähr 2′, die Fehler in Länge und Breite sämmtlich kleiner werden, außer bey zwey Beobachtungen.

Parte

Part. II. Beobachtungen der Sonne. — Merkwürdig sind folgende Schiefen der Ecliptick:

		apparens		mittlere
im Wintersolstiz	1791	23. 27. 44″,35	oder	23. 27. 53″,25
im Somer . . .	1792	. . . 47, 6	. . . . .	56, 5
im Somer . . .	1793	. . . 48, 0	. . . . .	56, 5
im Winter . . .	1793	. . . 45, 2	. . . . .	53, 1.

Demnach wäre die mittlere Schiefe d. Ecl. im Anfang 1793 . . 23°. 27′ 54″,8. Mechain fand zu Barcellona 3″ weniger; Hr. la Lande nimmt das Mittel aus beyden an, nämlich 27°. 47′. 53″,3.

Die darauf folgenden Zeiten der Nachtgleichen hat Hr. P. bloß aus den beobachteten Zenithdistanzen abgeleitet. In mehrern Rücksichten würde es sehr interessant seyn, wenn zugleich gerade Aufsteigung vermittelst der Maskelynschen Sterne beobachtet worden, und daraus ebenfalls die Zeit der Nachtgleichen bestimmt worden wären.

Zuletzt fügt noch Hr. P. die mit dem Kreise beobachteten ☉ Durchmesser b. y (während der culmination ward nämlich die Höhe beyder Ränder beobachtet). und findet aus sehr vielen Beobachtungen in der Erdferne 31′. 32″,4 welches genau das Mittel zwischen den Bestimmungen von Meyer und la Lande ist.

Part. III. Planetenbeobachtungen.

Die Zeit des Durchgangs durch den Meridian wurde nicht am Fernrohr des ganzen Kreises, sondern am Durchgangsfernrohr von den Gehülfen des Hrn. P. beobachtet, theils weil die Klammer, die den Höhenkreis in der Mittagsebene hält, bisweilen nachgiebt, theils weil nur ein Stundenfaden im Fernrohr, und weil es nur 40 mal vergrößert, da jenes 5 Fäden hat und 80mal vergrößert.

Part. IV. Verschiedene Beobachtungen.

1) Prüfung der Polhöhe.

Im vorigen Theil gab der Polarstern 38°. 6′. 44″,12. Jzt versuchte Hr. P. Boscovichs Methode mit 2 Circum-

cumpolarsternen, die Polhöhe und Refraction zugleich giebt. Er fand über 38°. 6 folgende Sekunden 44",77; 45",16; 46",11; 45",34; 45",50; 45",98; 47",00 im Mittel 45",70.

Der Vortheil dieser Methode ist aber wirklich nur scheinbar. Man bestimmt nämlich die Refraction aus den beobachteten Unterschied zweyer Refractionen: soll also dieser nicht zu klein und dadurch unsicher seyn, so muß der eine Stern sehr tief seyn; in solchen kleinen Höhen ist aber die Refraction bekanntlich wieder weit unsichrer, welches denn bey dieser Methode auch auf die Refraction des hohen Sterns Einfluß hat. — Denn beobachtete Hr. P. Zenitalsterne und fand aus Wega 38°. 6'. 44",0 aus Deneb 44",7 aus Capella 45",1. Im Mittel 38°. 6'. 44",6.

Aus den obigen Solstizen findet sich 38. 6. 44",7.

Aus allen diesen Bestimmungen ist nun das Mittel 38°. 6'. 45",5.

2) Bestimmung der Refraction durch Azimuthe und Zenithdistanzen.

Seit Tycho's Zeiten, der diese Methode zuerst vorschlug und ausübte, hat sie niemand, vorzüglich aus Mangel eines guten Instruments, angewendet. Natürlich war also der erste Gedanke des Hrn. P. seinen vortreflichen Azimuthalkreis darzu zu benutzen; allein die ersten Versuche mißriethen und Hr. P. hatte damals nicht Zeit, die Ursache davon aufzusuchen. Izt nahm er diesen Gegenstand von neuen vor und fand, daß man nicht unterlassen darf, die Azimuthe zweymal mit entgegengesetzter Lage des Höhenkreises zu beobachten, wodurch natürlich der Collimationsfehler am sichersten aufgehoben wird. Dieser Umstand erschwert aber auch die Beobachtungen, da man nun zwey Tage auf einander gut Wetter haben muß. Die Resultate dieser mühsamen Beobachtungen und Berechnungen, bestehen in folgenden: „Der mittlere Unterschied der Refractio„nen aus Piazzis Beobachtungen von der Bradley„schen Tafel ist Tafel ist von 38° bis 50° Zenithdistanz „+0,006 von 60° bis 73° .... +0,020; von 70° bis „80° —0,003 von 80° bis 84° —0,0024 von 84° bis „86° —0,013 von 86° bis 89° —0,029."

Die

Die Tafel die er nach diesen Erfahrungsſätzen construirt hat giebt für 45° die Refr. 57″,2. Sie findet sich auch in Bodens Jahrbuch 1798 p. 108.

Vielleicht laſſen ſich dieſe Unterſchiede aus den noch unbekannten von Feuchtigkeit abhängenden Aenderungen der Strahlenbrechung erklären.

3) Occultationen und ☉finsternisse; aus diesen die Länge d. Sternwarte 31°.0′ 35″, und des königlichen Pallastes in Neapel 31. 54. 10. Darauf gründet sich die nun folgende Tafel der Meridianunterschiede der wichtigsten Oerter und Sternwarten.

4) Declinationen der 34 Maskelynschen Sterne. Aus seinen und den Maskelynschen Beobachtungen schloß Hr. Piazzi die eigenen Bewegungen dieser Sterne. Ein Abdruck dieser vortreflichen Tafel findet sich in Bodens Jahrbuch 1798 p. 106.

5) Meteorologische Beobachtungen.

6) Ein Emeryſches Chronometer des Cavaliere D. Giov. Vivenzio gebe den Längenunterschied zwischen Neapel und Palermo 3′. 33″. aus der ☉finst. 5. Sept. 93 ist er 3′. 35″.

7) Auf einem besondern Blatt findet sich die Beobachtungen des Monds; man findet sie in Bodens Jahrbuch 1798 p. 101.

Bey der berechneten ☌ ♄ ♍ 1791 12. Jun. ist höchst wahrscheinlich ein Druckfehler von 10″. so daß statt 10ʰ17′, 36″,2 zu lesen ist 46″,2.

IX. Nach-

IX.

Nachrichten und Anzeigen.

1. Verschiedene Nachrichten aus verschiedenen Briefen des Herrn la Lande, Director der Sternwarte der Republick, an Hrn. Obrist W. M. von Zach in Gotha.

Paris, den 13ten Febr. 1796.

[illegible]e Geschichte des königlichen Collegiums collége de France er[illegible] [illegible]t, daß Gassendi eigentlich Gassend hieß, (man spricht Gas[illegible] [illegible]l aus;) deswegen heißt ihn Fournier Gassand; sie haben bey [illegible]nder gelebt, daher kein Zweifel hierüber seyn kann *).

In Kepplers paralipomena ist pag. 392 ein Druckfehler, nämlich [illegible] statt 42° für den Abstand des culminirenden Punkts vom Nonagesimus; deswegen findet er eine Krümmung von 3 Minuten in der [illegible]inbaren Bahn, die noch nie über 1′ bey einer Sonnenfinsterniß [illegible]en kann.

Hr. Dr. Herschel hat in den Phil. Transactionen von 1790 [illegible]obachtungen über die Saturnstrabanten bekannt gemacht, ich [illegible]e meine Tafeln mit diesen Beobachtungen und mit seinen Tafeln [illegible]glichen, und finde folgende Verbesserungen meiner Epochen:

		aus den Beobachtungen	nach Hr. Hersch. Tafeln
Satellit	1	—2°. 32′.	—6°. 30′
	2	+1. 33.	—3. 0.
	3	—0. 57.	+2. 48.
	4	—2. 24.	—5. 10.
	5	+1. 33.	+0. 59.

Meine Tafeln vom 4ten Trabanten entfernen sich nur um 2′ [illegible]n der Beobachtung des Hrn. Insp. Köhlers vom 12. Nov. 1790.

Hr.

*) Dies beziehet sich auf eine gemachte Anfrage von mir, man sehe das 5te Heft dieses Archives Seite 126 die zweite Note. v. Z.

Hr. Dalby berechnet in den Philos. Trans. von 1791 die Meridiandifferenz zwischen Paris und Greenwich 9′. 19″,7 und 9′. 20″,5 aber er nimmt die Abplattung zu gros an; braucht man $\frac{1}{300}$, so findet man 9′. 21″, Eben dies fand General Roy (Phil. Trans. 1787. p. 144 & 214.) und Legendre (Mem. de l'acad. 1788 p. 752) Wahrscheinlich werden unsre neuen Gradmessungen den Unterschied der Grade mit grösserer Genauigkeit geben, und dadurch die Frage über die Abplattung entscheiden, die man zur Berechnung der Dreyecke und des Längenunterschieds zwischen Greenwich und Paris anwenden muß.

Die Länge Lilienthals findet Hr. Wurm 26′. 17″ durch die ♃ Bedeckung vom 7. April 1792; ich finde 26′ 17″ durch die Sonnenfinsterniß vom 5. Sept. 1793 und 26″. 19″ durch die Bedeckung α ♉ vom 8. Nov. 1794, die zu Paris beobachtet worden ist. Die Lage dieses Orts, die noch zweifelhaft war, scheint mir nun entschieden.

Dieß ist noch nicht der Fall bey Neapel; Piazzi findet 47′.36″; aus der ⊙finst. 1793 47′.26″ und durch die Bedeckung α ♉ 8. Nov. 1794 finde ich nur 47′.17″. *)

Die Zeit der Conjunction		Unterschied der ☾'s Breiten
zu Paris	8. 25. 8.	55′.2″
zu Neapel	9. 39. 25.	55. 2.
zu Lilienthal	9. 18. 27.	55. 5.

Bis izt habe ich alle ⊙finst. und alle Bedeckungen von Sternen 1ster Größe, die mir bekannt worden sind, berechnet; seit 1760 habe ich mich bemühet ein Beyspiel zu geben. denn vorher berechnete man sie nicht, ob man sie gleich häufig beobachtete. Sind die Sterne Ihres Catalogs 191 & 296, deren Größe Sie 4. 6 bezeichnen

*) Hr. Wurm findet aus der ⊙finstern. 5. Sept. 1793 47′. 40″. 25, aus dem Ende, welches doch die sicherste Beobachtung ist, 47′ 38″ 28 (Berl. J. B. 1799 S. 161). Mittelst eines Emeryschen Chronometers des Cavaliere Vivenzio, welcher in 4 Tagen von Neapel nach Palermo transportirt worden, fand Hr. Piazzi den Meridianunterschied, zwischen den Königl. Pallast in Neapel, und der Königl. Sternwarte in Palermo 3′. 33″. folglich zwischen Neapel und Paris 47′. 35″, 3. Es scheint daher, daß man diesen Längen-Unterschied so lange annehmen kann, bis man mehrere Sternbedeckungen wird berechnet haben, welche Hr. Joseph Casella bereits in grosser Anzahl beobachtet hat. S. Berl. J. B. 1798 S. 109. Hrn. de la Lande's Angabe scheint zuverläßig zu klein zu seyn. v. Z.

den, veränderlich; No. 371 & 372 sind bey Ihnen 5 & 5te Größe, bey Flamsteed 4 & 5, haben Sie dies absichtlich geändert? *)

Die Bedeckung ☾ ♉ im Berliner Jahrbuch 1798. p. 118, 7h 49′, 45″ stimmt nicht mit der Länge von 8°; 48′, 16″ überein, die Minute muß verschrieben seyn.

Ich berechne alle Bedeckungen von Sternen 1ter Größe so bald ich sie erhalte; die Elemente habe ich immer im voraus berechnet, daher ich nicht 2 Stunden brauche.

Ebendas. p. 199. steht 15. April statt 15. Sept. für die Immersion des Aldebaran.

Merkwürdig ists, daß bey dem nördlichen Stern der Lilie beyde die A. R. 2h 36′, Sie und la Caille um 1′ falsch verschrieben haben. **)

Im

*) Wenn ich in meinem Sternverzeichniß, denselben Stern, mit verschiedener Größe bezeichne, so bedeutet dieß nicht, daß er wirklich veränderlich sey, sondern blos, daß ihn verschiedene Astronomen, von so verschiedener Größe bezeichnet haben; ein solcher Stern kann vielleicht wohl ein veränderlicher seyn, es können sich aber auch die Astronomen in dieser so unsicheren und unbestimmten Schätzung geirrt haben, meine Absicht bey dieser Bezeichnungsart ist demnach, erstlich, die Aufmerksamkeit auf solche Sterne zu lenken, und dann die Beobachtungen selbst so anzugeben, wie sie verschiedene Beobachter gefunden haben. v. Z.

**) Dieser Fehler ist schon im Berl. J. B. 1796 S. 185 angezeigt worden. Herr de la Lande findet ihn merkwürdig, allein einem praktischen Astronomen sollte es nicht schwer seyn, eine befriedigende Erklärung davon zu geben. Da mir ähnliche Fehler öfter vorgekommen, und ich noch nirgend gefunden habe, daß man dessen wahre Quelle angezeigt habe, so gereicht es vielleicht vielen Astronomen ein Gefallen, ihn hier bemerkt zu finden. Wenn zwey Sterne nur ein Paar Minuten in gerader Aufsteigung hintereinander folgen, so daß der erste die letzten Fäden des Fernrohres noch nicht passirt hat, wenn der folgende schon an die ersten Fäden antrift, so verharrt der Beobachter im Zählen des Pendelschlages und bleibt am Fernrohre, schreibt nach vollendeter Beobachtung nur die Minute des letzten Sterns auf, und supplirt die Minute für den ersten Stern, bey dessen Beobachtung er sich nicht derangiren konnte, um nach der Pendel zu sehen; hat nun der erste Vorgänger einen Schreib- oder Druckfehler von einer Minute gemacht, so suppliren alle Nachfolger diese fehlerhafte Minute, in der sichern Voraussetzung, daß man um eine ganze Minute nicht irren könne, und nur die Secunden das Wesentliche seyn, daher diese Fehler in runder Mi-

In Ansehung ⊙ ♐ *AR*. 18^h. 52′ sind Sie und de Lalande nur um 1″ verschieden; ich habe aber 2 Beobachtungen, auf die Sekunde übereinstimmend, und die 7″ mehr geben, als Ihr Verzeichniß *)

Vidal hat zu Mirepoix bey Toulouse eine Sternwarte errichtet; der Himmel ist so schön, daß er ☿ in seiner obern Conjunction sieht. Das Bureau des longitudes hat ihm das Directorium der Toulouser Sternwarte angetrauen, er hat es aber nicht angenommen, so wie Danges; ich habe es Flaugergues angeboten. **)

Die ⊙finst. 1793 ist zu Berahen ringsförmig beobachtet worden; die Berechnung derselben gab mir eine Bestätigung der Durchmesser und Irradiationen, die ich bey den Finsternissen brauche. Ich fand nämlich Breite des ☽'s 40′. 12″, so wie Seyffert und ich schon aus andern Beobachtungen sie bestimmt hatten. Die Meridiandifferenz zwischen Berahen und Paris findet sich dadurch 12′. 3″ statt 11′ 36″, welches die Reise der Herren Verdun, Bordy und Pingré gab. ***)

Ein-

---

nutenzahl beynahe beysammenstehende Sterne, und zwar allemal bey dem vorhergehenden Stern; dieß trift auch hier bey den beyden Sternen der Lilie zu, die in 2 Minuten auf einander folgen, und zugleich im Fernrohr erscheinen, der erste No 39, ist um die Minute verschrieben, weil diese aus la Caille fehlerhaft ist supplirt worden, obgleich übrigens meine Beobachtung von der la Caillischen um 13 Sekunden differirt. Besonders solche Astronomen, welche Sternkataloge vergleichen, oder zweifelhafte Sterne ausmitteln wollen, müssen auf diesen Umstand aufmerksam seyn, er wird ihnen öfter Aufschlüsse geben, wenn alle andere Hypothesen nicht zureichen, alles Merkwürdige verschwindet bey Erwägung dieser einfachen praktischen Bemerkung. v. Z.

*) In der *AR*. dieses Sterns irrt Herr de la Lande zuverläßsig, mehr als 20 Beobachtungen geben mir die gerade Aufsteigung dieses Sterns für 1800 = 283°. 10′. 17″. so habe ich ihn in meinem neuen unter der Presse befindlichen Sternverzeichniß, und so stehet er auch in meinem ältern Verzeichniß Tab. mot. ⊙. pag. CL. nach Beobachtungen vom Jahr 1788. Ich kann auch nicht eine Sekunde, noch weniger 7″ nachgeben. v. Z.

**) Hat diesen Ruf ebenfalls nicht angenommen, und verbleibt in Viviers. v. Z.

***) Dieselbe Beobachtung hat Herr Wurm berechnet, findet aber diesen Meridian-Unterschied 12′, 29″, 51 da die identische Beobachtung bey beyden zum Grunde liegt, so steckt hier ein kleiner Rechnungsfehler. v. Z.

Eben izt habe ich die zu Christiansund ringförmige beobachtete ⊙finst. 1793 berechnet, ich finde die Breite ☽. 40′. 20″. Unterschied der Meridiane 11′. 4″. Diese Breite ist ein wenig groß, aber die Marseiller Beobachtung giebt 40′. 14″. und das Mittel aus diesen beyden ringförmigen ⊙finsternissen wäre 40″. 16″, man kann also nicht behaupten, daß die Ungewißheit hierüber groß ist, um desto mehr, weil 2″ Veränderung der halben Dauer des Rings hinreichen um 8″ Unterschied in der Breite hervor zu bringen. *)

25. Febr. Die Connoissance des tems de 1797. ist gedruckt, wir fangen izt 1798 an. Ich habe viele Beobachtungen und eine Geschichte der Astronomie von 1782 bis 1789 in dem Band von 1797 eingerückt.

26. Febr. Ich habe die merkwürdige Beobachtung des Herrn D. Koch zu Danzig (Bodens Jahrb. 1797), wo der Stern zweymal hinter Bergen des Monds verschwand, berechnet. Diese, obschon incomplette Beobachtung belehrt uns hinreichend, daß der Stern nicht 1″ weit vom Rand des Monds wegging. Denn da nach meinen Tafeln der ☽'shalbmesser 15′. 50″ und die scheinbare Bewegung des Monds 29″ innerhalb 1′ Zeit war, so finde ich, daß, wenn die Bedeckung 1′ gedauert hat, die senkrechte Linie auf die Mondsbahn 15′. 51″ gewesen seyn muß. Diese Größe giebt eine Breite des Monds, die nur 1″ von der verschieden ist, die mir die Beobachtung des Herrn Duc-la-Chapelle zu Montauban gab, wo der Mond 6 oder 6′ südlich vom Stern wegging, und dieß bestätigt den Diameter und die Parallaxe des Mondes.

Mein Kreis von 20 Zoll ist endlich beendigt; es ist ein sehr schätzbares Instrument, und es befremdet mich sehr, daß man keine mehr in England macht. **) Allein sie kommen aus Frankreich. Wir bestimmen damit die Höhen bis auf ½ Sekunde durch Vervielfältigung der Beobachtungen auf dem ganzen Umkreis: Ich habe ihn in Tausendtheile des Quadranten abtheilen lassen, und ich wünsche daß diese Methode bey den Astronomen mehr Beyfall finde. Dieser

*) Herr Wurm findet am angezogenen Orte dieser Meridianunterschied 22′. 59″. 49 also über 11 Min. größer als Herr de la Lande, es muß also ein sehr großer Irrthum vorgefallen seyn, sollte Herr de la Lande nicht etwa Christiansand mit Christiansund verwechselt haben? v. Z.

**) Der englische geschickte Künstler Ed. Troughton, verfertiget auch solche ganze Kreise mit zwey beweglichen Fernröhren nach Borda's Manier. In Paris ist jetzt (May 1796) ein solcher ganzer Kreis von 2 Fuß bey Haupois, welcher ihn verfertiget, für 4000 Livres zu kaufen. v. Z.

Kreis wird endlich die Polhöhe von Paris, die Schiefe der Ekliptik, die Fehler meines Mauerquadranten, so wie auch die Abweichungen der vorzüglichsten Sterne genauer als auf 1″ bestimmen.

De Lambre befindet sich zu Dunkerque, wo er die Breite durch 200 bis 300 Beobachtungen des Polarsterns mit einem Kreis von 1 Fuß bestimmt hat.

Den 18. Nivose haben 14 Beobachtungen gegeben 51°. 2′. 15″, 31
den 23. . . aus 30 . . . . 15, 55
den 24. . . setze er noch 21 hinzu u. alle gaben . . . 15, 61
den 25. . . hatte er 90 Beobacht. u. sie gaben . . . 16, 13
daher der Thurm 51°. 2′. 10″, 1

Sie sehen, daß es bis jetzt kein Instrument gab, das eine solche Genauigkeit verschaffen konnte, selbst 12 füßige Zenithsectoren und 10 füßige Kreise nicht, wo man nur eine Beobachtung machen kann, und wo der Fehler des Theilungspunkts ganz und immer auf gleiche Art für den nämlichen Stern Einfluß haben wird, wenn man auch 100mal die Beobachtungen wiederholte. Montuclas Geschichte der Mathematik wird izt in 4 Bänden 4to gedruckt, wovon der erste schon abgedruckt ist. Er ist zu Lyon 5. Sept. 1725 gebohren. Ich habe ihm den Fehler mitgetheilt, den Sie in der 114ten Ziffer der de Lagnyschen Zahl für den Umkreis gefunden haben.

Nach einem Monat schlecht Wetter haben wir endlich schöne Nächte. Die Opposition des Uranus ist gelungen; den 24. Febr. 10h. 13′. 57″. mittl. Zeit war seine gerade Aufsteigung 158° 2′. 25″. Abweichung 10°. 5′. 41″ ½. Länge 5ˢ. 5°. 57′. 53″. Breite 48′. 41″, 5. Verbesserung der Tafeln — 11″ in Länge und + 15″ in der Breite. Dieß bestätigt, was Sie und ich schon vermutheten, daß die Neigung der Bahn dieses Planeten, wie sie in de Lambres Tafeln ist, um 10″ vermehrt werden muß. Die Beobachtungen 2 auf einander folgender Tage geben auf die Sekunde den nämlichen Fehler der Tafeln in der Länge.

1. März. de Lambre hat sich von der Breite des Thurms zu Dünkerque bis auf ½ Sek. durch α und β des kleinen Bärs versichert. Er wird zurückkommen, um sich zu seiner Abreise nach Bourges vorzubereiten. Er findet den Bogen zwischen dem Thurm zu Dünkerque und dem Observatorium 125511 Toisen. Dieß ist 4 Toisen weniger, als in Cassini und la Caille's Werk la meridienne verifiée. Aber der Bogen zwischen Dünkerque und Bourges wird um eine beträchtlichere Größe kleiner seyn. Da übrigens die Toise, deren wir uns bedienen, nicht genau die nämliche ist mit der Cassinischen, so ist dieß eine neue Quelle von Unterschieden zwischen den ältern und neuen Vermessungen.

Der Stern, der nach Ihrem Catalog 1′ 58″ Zeit auf Procyon folgt, ist nur 0′. 38″ später. Mein Neffe hat dieß noch dieser Tage bestätigt, und wir stimmen mit Mayers No. 307.

Ihr

Ihre Beobachtung des Merkur vom 12. März 1791 (Bodens Jahrbuch 1796. p. 169) habe ich berechnen wollen, aber ich finde 15′ zu wenig; es muß die Minute verschrieben seyn. *) Wollte Sie wohl in Ihrem Journal nachsehen, denn die Beobachtung ist mir zur Prüfung meiner Tafeln wichtig, weil sie nahe beym Aphelio ist. Ich habe meine Tafeln verbessert, wie sie aus der Connoissance des tems 1797 sehen werden, in welche ich das erste Memoire gesetzt habe, das in der ersten Versammlung der 1sten Klasse des Institut National vorgelesen worden ist.

5. März. Das Nationalinstitut hat die Wahlen von 6 associés republicoles dans les departemens angestellt. Ich habe für die Sektion der Astronomie Derquier, d'Angos, Duc-la-Chapelle, S. Jaques de Sylvabello, Thulis und Flaugergues ernennen lassen.

Ich werde in der Connoissance de tems 1798 verschiedene Memoires abdrucken lassen, die für die Bände de Mem. de l'academie 1791. 92. 93. bestimmt waren, weil wir nicht wissen, ob sie werden gedruckt werden. Die Bände von 1789 und 1790 sind gedruckt, aber Herr Dupont verkauft sie nicht, **) weil er numeraire haben will, und das Geld sehr rar ist; die Assignaten stehen $\frac{1}{300}$ und viele Personen wollen sie gar nicht annehmen.

Jzt erscheint die 59ste Lieferung der encyclop. methodique; sie enthält Stücke des Wörterbuchs für Geographie, Physik, Ackerbau, Alterthümer und den Artikel Jagd ganz.

6. März. Ihre Beobachtung des Merkur vom 21. April 1792, die in der Nähe des Periheliums ist, ist von meinen Tafeln nur um 5″ verschieden. Ich habe sie eben in die Druckerey für die connoissance des tems 1798 gegeben, so wie auch Rechnungen über die eignen Bewegungen vieler Sterne.

Das Thermometer ist seit einigen Tagen 6° unterm Eispunkt; es ist selten, daß der Winter so spät kommt, aber ich glaube, daß der Mond in der Erdnähe bey seinem Durchgang durch den Aequa-

tor

*) Diese Vermuthung traf auch richtig zu, es muß demnach diese Beobachtung im Berl. J. B. 1796. S. 169 auf folgende Art verbessert werden. 1791. 12te März. 22^{h}. 40′ 37″,654 Mittl. Zeit in Gotha (nicht Seeberg), gerade Aufsteigung des ☿ = 331°. 7′. 13″,9. v. Z.

**) Durch die Gefälligkeit des Herrn de la Lande habe ich ein Exemplar dieses Bandes erhalten, eine ausführliche Anzeige davon hat Herr D. Burckhardt, in den Erfurter Nachrichten von gelehrten Sachen, herausgegeben, von der Churmaynzischen Akademie der Wissenschaften eingerückt. v. Z.

vor eine Veränderung im Wetter herbeyführen wird; wenigstens habe ich verschiedenemal diese Wirkungen auf eine sehr bemerkbare Weise wahrgenommen. Haben Sie nichts über diesen Gegenstand bemerkt?

Das Nationalinstitut hat keine ausländischen associés ernennen wollen, aus Furcht, daß die Deutschen und Engländer unsre Stellen nicht annehmen möchten; wir erwarten den Frieden.

Das Gouvernement will nicht allen 144 Mitgliedern des Instituts Pensionen geben, sondern nur den ältesten und berühmtesten, denen, welche die meisten Arbeiten und die mehresten Bedürfnisse haben.

10. März. Eben erhalte ich die Mailändischen Ephemeriden von 1796. Ein Aufsatz von Oriani über die Perturbationen des Merkurs durch Venus ist sehr merkwürdig; sie gehen bis auf 14", wenn man die 3ten Potenzen der Eccentricitäten mitnimmt. Es sind auch ☿ Beobachtungen am großen Mauerquadranten darin, die mir viel Vergnügen machen werden. Ich habe einige davon Herrn Dongos zum Berechnen zugeschickt.

Ich fand auch darin die Bedeckung α ♉ 2. Jan. 795. die Emersion stimmt nicht mit der Ihrigen und die Immersion stimmt besser mit 33'. 40" als mit 33'. 35" Unterschied unserer Meridiane. Haben Sie seit 1792, da Sie 33'. 35" haben drucken lassen, einige neue Resultate über diesen Gegenstand? *) Diejenigen, die ich habe stimmen gar nicht; 33'. 25" ⊙ Finst. 1791 33'. 39". Bedeck. ♉ im Jahr 1788 33' 31" Bedeck. ♃ 7. April 1792, 33. 42. Bedeck. ♉ 23. Sept. 1795. Ich habe mehr Zutrauen zu Sternbedeckungen als zu allen andern Bestimmungen. Ich nehme unterdessen 33'. 38" oder 37" an; allein es könnte leicht nur 34" seyn.

13. März. Ich habe meine ☿ tafeln mit den Orianischen Perturbationen von neuem bearbeitet. Ich finde für 1796. Epoche 8s. 13°. 18' 28" die Sonnenferne 8s. 14°. 17'. 27" und die Secularbewegungen 2s. 14°. 4'. 10" und 1°. 23'. 15". So werden sie auch in der Connoiss. 1798 erscheinen; sie sind schon abgedruckt.

Da wir nun eine Edition stereotype von logarithmischen Tafeln haben, so würde derjenige, der sich die Mühe geben wollte, die Fehler derselben aufzusuchen, so wie Wurm für die Tafeln meiner Astro-

*) Diese ferneren Resultate finden sich im Berl. J. B. 1796 S. 235 und 236 und stimmen vortreflich, auch harmoniren alle meine Sternbedeckungen, die Herr Wurm berechnet hat; dieselben vom Herrn de la Lande berechnet, stimmen nicht so gut, wo mag also der Fehler liegen? v. Z.

Astronomie es gethan hat, eine Arbeit übernehme, deren Nutzen groß und von langer Dauer wäre. *)

Ich habe mit Vergnügen in dem Archiv des Hrn. Prof. Hindenburg den Gebrauch gesehen, den Sie von meinen Briefen machen; dieß macht sie nur noch interessanter; doch wäre es mir zureichend, wenn sie nur Sie interessirt hätten. —

Den Apollonius des Hrn. Camerer habe ich erhalten; ich werde ihn im Magazin encyclopedique ankündigen, auch werde ich dem Hrn. Montücla sein Exemplar zustellen.

Nach neuen Untersuchungen nehme ich die Precession von 50″,25 in diesem Jahrhundert an; die Verrückung der Ecliptik ist 0″, 135 auf die Ecliptik und 0″, 147 auf dem Aequator; der erste Theil der Precession in A. R. 45″,98, und der zweyte 50″,285. sinus A. R. × tang. declin. Die nämliche Größe multiplicirt mit dem sinus der Schiefe der Ecliptik und dem Cosinus der A. R. giebt die Precession in der Declination 20″ 029 bey den Aequinoctialpunkten, anstatt dessen Wollaston 20″,05 braucht.

---

2. Anzeige eines Repertoriums der Integralrechnung von Fr. Wilh. Aug. Murhard, der Philos. Dr. in Göttingen.

Die Analyse ist in unsern Tagen so sehr gestiegen, und die Menge ihrer Wahrheiten hat sich dergestalt gehäuft, daß es so zu sagen die Last, die das menschliche Gedächtniß zu tragen im Stande ist, weit übersteigt. Schon lange mußten daher die großen Köpfe unter den Mathematikern auf den Gedanken kommen, diesem Mangel zu begegnen. Man sah aber leicht ein, daß man hier durch schickliche Tafeln dem Gedächtnisse am besten zu Hülfe kommen könne. Lambert schrieb daher in dieser Absicht seine Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tafeln (Berl. 1770 8.) und bahnte so den Weg zu ähnlichen Sammlungen. Aber außer diesen und an manchen Orten (so wie in la Caille Astro-

*) Herr Wurm, der sich schon, durch die Revision des Herrn de la Landes Jahrb. und de Lambre's ♃ Satellitentafeln, verdient gemacht hat, hat nun ebenfalls diese Revision der Caillischen Tafeln übernommen. v. Z.

Astronomie, la Lande Astron. etc.) befindlichen trigonometrischen Formelsammlungen besitzen wir noch gar nichts von der Art. Ich muß gestehen, daß mir dieser Umstand Anfangs bei meinem Studium der Analysis das größte Hinderniß war, das mir aufstieß. Denn da ich mich im Stande sah, das weite Feld derselben zu überschauen; so war ich dennoch oft nicht im Stande eine Abhandlung von Euler, la Grange, Condorcet, Monge, la Place, Cousin, le Gendre etc. etc. völlig zu verstehen, und da ich nicht ruhen konnte, bis ich sie verstand; so brachte ich oft ganze Tage mit eiteln Berechnungen hin, und verschwendete so die mir so edle Zeit. Bald aber merkte ich es, worauf es ankäme. Ich fieng an die Resultate analytischer Untersuchungen, wie und wo ich sie fand, mir anzuzeichnen, ich sammelte Integralformeln, trigonometrische Ausdrücke, Eigenschaften der Logarithmen, der Funktionen, der unendlichen Reihen — der Kegelschnitte — und bald besaß ich ein so vollständiges Archiv aller Resultate, worauf der Kalkul leitete, daß ich nun auch den schwersten und verwickeltsten mathematischen Berechnungen mit Recht Trotz bieten konnte. Lange schon lagen mir meine mathematischen Freunde an, dasjenige, was mein unermüdeter Fleiß gesammelt hätte, durch den Druck der mathematischen Welt überhaupt mitzutheilen. Aber theils fehlte es mir an erforderlicher Muße, theils war ich auch noch nicht bei mir einig, wie ich die Sachen am vortheilhaftesten ordnen sollte? Aber länger kann ich auch nicht den Liebhabern analytischer Berechnungen ein Werk vorenthalten, das gewiß zu tausenderlei neuen Erfindungen Anlaß geben wird, und ich kündige hiermit ein Repertorium der Integralformeln als die erste Probe eines solchen für die ganze Analysis äußerst wichtigen Unternehmens an. Manchem möchte vielleicht der Titel prahlend genug scheinen, und, wäre der Gegenstand nicht Mathematik, Glossen darüber zu schmieden, aber nach dem Urtheile vieler großen Mathematikverständigen, deren Rath ich mir hierüber erbat, ist dieser Titel gewiß der schicklichste und passendste von der Welt. Ich werde die Formeln so ordnen, wie sie Euler in seinem klassischen Werke über die Integralrechnung, davon eine neue Aufl. Petropol. 1792—1794 in 3 Quartbänden nebst einem Supplementbande erschienen ist, zu finden gelehrt hat. Es soll dies Repertorium alles enthalten, was von den größten Köpfen in der Integralrechnung erfunden worden ist, und man wird dadurch in den Stand gesetzt werden, dasjenige, was in hundert voluminösen Werken zerstreut und versteckt liegt, mit einem Blick zu übersehen. Auf der einen Seite setze ich die Differentialformeln mit vorgesetztem ∫, auf der andern, die durch die Integration erhaltenen Werthe. Zur Probe können folgende Beispiele dienen, die ich aus der Mitte des Manuscripts, wie ich es aufschlage, herschreibe:

$$\int \frac{adx}{(f+gx)^m} = \frac{-a}{(m-1)\,g\,(f+gx)^{m-1}} + C.$$

$$\int \frac{adx}{f+gx} = \frac{a}{g}\; l\,(f+gx) + C.$$

$$\int \frac{adx}{(f+gx)^2} = \frac{-a}{g\,(f+gx)} + C.$$

$$\int \frac{adx}{(f+gx)^3} = \frac{-a}{2\,g\,(f+gx)^2} + C.$$

Man wird mich der Mühe überheben, den Nutzen eines solchen Werks, besonders wenn es, wie dieses, vollständig ist, anzupreisen denn Kenner werden ihn von selbst einsehen, und bei andern möchte ich nicht gern als zu tauben Ohren reden. Jeder, der auch nur ein wenig in die Geheimnisse der Analysis eingeweiht ist, sieht von selbst ein, daß er ohne aufgeschriebene Formeln, oder so zu sagen Tafeln, sich nicht weit darin versteigen werde, die größten Mathematiker, die ich kenne, sind dem Gedächtnisse hierdurch zu Hülfe gekommen, ohne dies Hülfsmittel hätte ein Euler das nicht leisten können, was er geleistet hat, und durch eben dies Hülfsmittel wurden gewiß unzähliche neue Entdeckungen im weiten Felde der Analysis veranlaßt.

Sollte ein solches Unternehmen für die Integralrechnung Beifall finden; so werde ich auch nicht länger säumen, die übrigen Hülfsmittel des Kalkuls und Tafeln für andere Theile der Analysis herauszugeben, welches alles vielleicht noch einmal unter dem Titel: Handbuch des Kalkuls erscheinen soll, wenn ich mit den Theilen gehörig ins Reine bin.

Ich glaubte hierauf das mathematische Publikum im voraus aufmerksam machen zu müssen. Eine nähere Anzeige werde ich übrigens bald in unsern Zeitschriften bekannt machen.

---

3. Astronomische Nachrichten aus Briefen des Herrn Flaugergues, Astronomen zu Viviers Departement de l' Ardèche, Mitglied des Institut National in Paris, an Herrn O. W. M. v. Zach in Gotha.

I. Formel, um die Länge des Knotens vom Ring des Saturnus auf der Ecliptik aus dem beobachteten Verschwinden und Wiedererscheinen desselben zu bestimmen.

Es sey h die Länge und λ die Breite des Saturns zur Zeit der Beobachtungen des Verschwindens und Erscheinens, und zwar geocentrische Längen und Breiten, wenn diese Phasen durch den Durchgang der Ebene des Rings durch den Mittelpunkt der Sonne veranlaßt wurden; ferner sei i die Neigung der Ebene des Rings gegen die Ebene der Ecliptik, so wird man haben,

Länge des Knotens des ♄ Rings auf der Ecliptik $= h - \text{Arc. sin} (\text{tang} \lambda . \text{cotang}\ i.)$

II. Formeln, um die Wirkung der Parallaxe bey den Durchgängen ☿ und ♀ durch die Sonne zu finden.

Es sei a der Winkel, den der Halbmesser der ☉, der am wahren Berührungspunkt gezogen worden ist, mit der relativen Bahn ☿ macht;

b der Winkel, den eben dieser Halbmesser mit einem 2ten macht, der an den scheinbaren Berührungspunkt gezogen ist;

z der Winkel des Verticalkreises mit einem auf die relative Bahn senkrechten Kreis, im Mittelpunkt der Sonne.

π der Unterschied der Höhenparallaxen von ☿ und ☉ und

e die Wirkung der Parallaxe in Bezug auf die Berührung, so hat man

$$e = \frac{\sin (a \mp \tfrac{1}{2} b \mp z)}{\cos (a \mp \tfrac{1}{2} b)} \pi.$$

Die

Das Zeichen — hat beim Winkel $\frac{1}{2}$b statt, wenn die senkrechte Linie auf die relative Bahn oberhalb des Sonnendiameters liegt, der im Augenblick der Berührung horizontal ist; im entgegengesetzten Fall findet das Zeichen + statt.

Für den Winkel z muß man das Zeichen — dann brauchen, wenn diese Senkrechte auf einer der Seite des Vertikalkreises, der zur Zeit des Contacts durch den Mittelpunkt der Sonne geht, liegt, wo sich auch der Berührungspunkt befindet; im entgegengesetzten Fall braucht man +. Endlich ist die Größe e oder die Wirkung der Parallaxe für diejenigen Berührungen negativ, die oberhalb des horizontalen Durchmessers sich ereignen; durch die Wirkung der Parallaxe wird nämlich dann der Eintritt verspätig, und der Austritt beschleunigt; im entgegengesetzten Fall ist auch hier das Entgegengesetzte zu beobachten.

III. Formel zur Bestimmung des Merkursdurchmesser durch die beobachtete Zeit, die er zum Eintritt oder Austritt in die Sonnenscheibe bei einem Durchgange braucht.

Es sei d der Durchmesser ☿, D der ☉durchmesser, — a der Raum, den Merkur auf seiner relativen Bahn zwischen der äußern und innern Berührung beschrieben hat, und c der kürzeste Abstand der Mittelpunkte, so ist

$$d = a\sqrt{\left(1 - \frac{4c^2}{D^2 - a^2}\right)}$$

Vermittelst dieser Formel habe ich aus Verbindungen der Beobachtungen des ☿ Durchgang vom 5. Nov. 1789 seinen Durchmesser gefunden, 8″,66; seine Parallaxe war an diesem Tage 13″,054.

4. Neueste Bestimmung der Polhöhe von Leipzig; von Herrn Prof. Rüdiger, Observatore bey der Sternwarte daselbst.

Mit einem 10 zolligen Spiegelsextanten von Troughton, dessen Nonius die Sekunden von 10 zu 10 angiebt, und einem künstlichen Glashorizont vom Hrn. Sekr. Schröder in Gotha verfertigt, habe ich die Polhöhe der Leipziger Sternwarte aus 40 Beobachtungen im Mittel = 51° 21′ 0″ erhalten, welches Resultat von einer Bestimmung des Herrn Maj. von Zach 51° 20′ 56″, in Hrn. Bodens Jahrbuch

Buch auf 1791 Seite 260, sehr wenig abweicht. Die Polhöhen sind theils aus Sonnenhöhen außer dem Mittage, nachdem die Zeit der Uhr durch übereinstimmende Höhen bekannt war, theils aus Sonnenhöhen um den Mittag, nach den bekannten Methoden berechnet worden. Ein Paar Beyspiele dieser Rechnungen hieher zu setzen, halte ich jedoch nicht für überflüßig.

Beyspiel 1.

Den 20. August 1796 war die doppelte Höhe des untern Sonnenrandes = 82°, nach der Naumannischen Pendeluhr um 2 U. 24′ 13″ wahr. Zeit des Nachmittags; Abweichung der Sonne = 12° 8′ 8″ nördlich.

Gedopp. Höh. d. unt. ⊙rand.	=	82°	0′	0″		
Irrthum des Zeigers	=	—	13	40		
Reſt	=	81	46	20		
Hälfte	=	40	53	10		
Strahlenbrechung	=	—	1	2		
Reſt	=	40	52	8		
Sonnenparallaxe	=			+ 6		
Summe	=	40	52	14		
Sonnenhalbmesser	=		+ 15	52		
Wahre Höhe der ⊙	=	41	8	6	=	h
Stundenwinkel	=	36	5	15	=	p
Abweichung der ⊙	=	+12	8	8	=	δ
Die Polhöhe					=	φ

findet sich nun durch:

$$\text{Tang } u = \text{Cos } p \ \text{Cot } \delta;$$

$$\text{Cos } z = \frac{\text{Cos } u \ \text{Sin } h}{\text{Sin } \delta}$$

$$u - z = 90^\circ - \varphi$$

Bey

Log. Cos τ	=	9,	907	6590
+ log Cot δ	=	10,	667	4998
log tang u	=	10,	575	1588
u	=	75°	6′	20″
log Cos u	=	9,	409	9992
+ log Sin τ	=	9,	818	1173
Summe	=	19,	228	1165
− log Sin δ	=	9,	322	6849
log Cos z	=	9,	905	4316
z	=	36°	27′	18″
u	=	75	6	20
u − z = 90° − ε	=	38	39	2
ε	=	51	20	58

Beyspiel 2.

Mittagshöhen den 15. Julius 1797.

Beob.	Zeit der Wulliam. Uhr.			Dopp. Höhe des unt. ☉ Randes.			Untersch. v. Mittag = n	log n²	
	U.	′	″	°	′	″	′		
1	1	51	36	119	55	0	2, 333	0, 735	5989
2	1	59	14	119	53	10	5, 3	1, 448	5517
3	2	8	27	119	50	0	8, 517	1, 860	5776

$$\text{Höhenänderung } \Delta\eta = 1,96345 \text{ Cos } \varepsilon \frac{\text{Cos } \delta}{\text{Sin } (\varepsilon - \delta)} n^2$$

ε = 51° 21′ für Leipzig, giebt

log (1, 96345 Cos ε) = 0, 088 5950 = log Const.

δ = + 21° 27′; log Cos δ = 9, 968 8870

ε − δ = 29 54; − log sin(ε − δ) = 9, 697 6545

Rest = 0, 271 1725

+ log Const. = 0, 088 5950

log Δη − log n² = 0, 359 7675

log Δη = 0, 359 7675 + log n²

für alle 3 Beobachtungen.

Für

Für die 1. Beobachtung ist:

$\log n^2 = 0,735\ 5999$
$+ 0,359\ 7665$

$\log \Delta v = 1,095\ 3664$
$\Delta v = 12,45''$

Dopp. Höhe des unt. ☉rand.	=	119°	55′	0″
Irrth. d. Zeig.	=		− 13	30
Rest	=	119	41	30
Hälfte	=	59	50	45
Strahlenbr.	=			− 31
Rest	=	59	50	14
Sonnenparallaxe	=			+ 4
Summe	=	59	50	18
Sonnenhalbm.	=	+	15	47
wahre Höhe der ☉	=	60	6	5
Δv	=	+		12
Mittagshöhe d. ☉	=	60	6	17
δ	=	+ 21	27	14
90° − φ	=	38	39	3
φ	=	51	20	57

Eben so findet sich aus der

2ten Beobachtung	=	51°	21′	0″
3	=	51	20	53

5. Eben

Ebendesselben Beobachtung der Sonnenfinsterniß vom 24. Junius 1797.

Die der Sonnenfinsterniß vorhergehenden Tage waren trübe, doch
Tage der Finsterniß selbst heiterte sich der Himmel etwas auf,
daß ich mit dem Hadleyischen Spiegelsextanten genug Sonnen-
en die Zeit der Uhr zu bestimmen, nehmen konnte, welches auch
nächstfolgenden Tage verstattet war. Den Anfang der Sonnen-
sterniß habe ich mit einem 3½ füßigen achromat. Fernrohr von
rge, astronom. 62maliger Vergrößerung, nach Williams's Se-
denuhr, so ziemlich genau um 5 U. 32' 26" Nd. w. Z. beobach-
Die Sonne war noch kurz vorher häufig mit Wolken umgeben.
d trat sie hervor, als der Anfang herannahete. Während der
sterniß ließen sich nicht mit der gehörigen Ruhe und Genauigkeit
hnen messen, da außer den um die Sonne schwebenden Wolken,
ermals Regen einfiel. Um das Ende heiterte sich der Himmel
der Gegend der Sonne auf, so daß ich sehr richtig das Ende
2' 9. 75" w. Z. ansetzen kann. Vergleicht man diese Anga-
der Beobachtung mit der Berechnung dieser Sonnenfinsterniß
meinem Handbuche der rechnenden Astronomie, (B. I.
ite 80) so ergeben sich nur folgende ganz geringe Unterschiede:

	Anfang			Ende		
	U.	'	"	U.	'	"
Beobachtung	5	32	26	7	2	9, 75
Rechnung	5	32	25	7	2	26
Unterschied			1			16, 25

6. Das

6. Das arithmetische Mittel, in einer wichtigen Bestimmung des deutschen Staatsrechts gebraucht.

In der deutschen Monatsschrift Berlin, Nov. 1793. ist N. 4 ein Aufsatz Hrn. Pr. Häberlin, vom Religionszustande im deutschen Reiche. Da steht 197. S, vom anno decretorio folgendes.

„Die Katholiken wollten dazu das Jahr 1630, in welchem man das Restitutionsedict an mehreren Orten gelten zu machen gewußt hatte, bestimmt haben, die Protestanten, daß nichts billiger sey, als auf das Jahr, in welchem der Krieg ausgebrochen war, zu sehen, also auf 1618. Endlich gaben beyde Theile nach, und so ward denn der Besitzstand des 1. Jan. 1624 zur künftigen Richtschnur bestimmt.“

Gerade also das Jahr, das mitten zwischen den beyden liegt, welche beyde Partheyen vorschlugen. Vollkommen, wie man ein arithmetisches Mittel nimmt. Die angewandte Rechenkunst räth dieses freylich nur, wenn die äußern Zahlen näher beysammen liegen. So viel mir aus der Geschichte bekannt ist, war indessen der Grund dieser Bestimmung nicht arithmetisch, sondern politisch, weil in diesem Jahre beyde Partheyen ohngefähr gleiche Vortheile gehabt hatten.

A. G. Kästner.

Verbesserungen.

Seite 199 Zeile 25 statt Constitution lies Construction; Zeile [illegible] st. adee l. adce; Seite 203 letzte Zeile, und Seite 20[illegible] Zeile 1 — 10 ist durchgängig statt A, [illegible] zu lesen K, I; S. 20[illegible] Z. 17 statt im lies ein.

Wegen Seite 201 fehlt in der Fig. 1. über AB eine zu AB parallele Linie HI, und eine die Parallelen CD, AB, HI in K, L, M rechtwinklicht durchschneidende Linie. In Fig 7. muß der Endpunkt der Linie fo linker Hand innerhalb ABCD mit [illegible] bezeichnet werden.

Archiv der reinen und angewandten Mathematik.

Siebentes Heft. 1797.

I.

Deduction der Euclidischen Definitionen 3, 4, 5, 7 des V. Buchs der Elemente; von C. F. Pfleiderer, der Physik und Mathematik Professor zu Tübingen *).

1. Es mögen m, n, p, q, r in der Folge ganze Zahlen bezeichnen; manchmal mit Einschluß der Einheit, wo es aber ausdrücklich bemerkt werden wird.

2. Die Frage: Welches (geometrische) Verhältniß zwey ungleiche homogene Größen A, B gegen einander haben? wird, wenn es möglich ist, d. h. wenn A und B commensurabel sind, durch die Angabe beantwortet: A ent-

*) Dieser lehrreiche Aufsatz ist eine Revision und Ergänzung eines Theiles der lateinischen Dissertation des Herrn Verfassers über das 5te Buch von Euklid's Elementen, und ist zum Theil durch die Erneuerung der Klagen über Undeutlichkeit, Schwierigkeit und Unrichtigkeit der Euklidischen Lehre von Verhältnissen und Proportionen, in Herrn Prof Büsch's Encyklopädie der mathematischen Wissensch. (Hamb. 1795.) Seite 51 und Anhang, veranlaßt worden. Hier werden die blos scheinbaren Schwierigkeiten gründlich gehoben, ohne jene Dissertation dabey nöthig zu haben. Hindenburg.

enthalte B, $m$mal, $\frac{1}{n}$mal, $\frac{m}{n}$mal; A seye $= m$ B, oder $= \frac{1}{n}$B, oder $= \frac{m}{n}$B: und m, $\frac{1}{n}$, $\frac{m}{n}$ heißen der Exponent des Verhältnisses A : B.

Sind aber A und B incommensurabel; so giebt man für irgend eine angenommene Zahl n an: A enthalte B mehr als $\frac{r}{n}$, und weniger als $\frac{r+1}{n}$mal, (wo r auch $= 1$ seyn kann); A sey $> \frac{r}{n}B < \frac{r+1}{n}B$: und $\frac{r}{n}$, $\frac{r+1}{n}$ heißen Grenzen des Exponenten des Verhältnisses A:B; $\frac{r}{n}$ die kleinere, $\frac{r+1}{n}$ die größere. Je größer die Zahl n ist, desto näher fallen beyde Grenzen zusammen.

3. In dem erstern Falle ist $A = mB$, oder $nA = B$, oder $nA = mB$; und in dem zweyten ist $nA > rB$, aber $< (r+1)B$. Das heißt: ein gewisses Vielfaches der einen Größe ist entweder der andern, oder einem Vielfachen der andern gleich; oder ein gewisses Vielfaches der ersten ist größer als ein gewisses Vielfaches der zweyten, aber kleiner als das nächstfolgende Vielfache derselben.

4. Umgekehrt folgen aus den Angaben §. 3. die §. 2. d. h. weiß man, wenn A und B commensurabel sind, welchem Vielfachen von B die andere Größe A gleich sey; oder, welches Vielfache von A der Größe B gleich sey; oder, welche Vielfache beyder Größen einander gleich seyen; so weiß man den Exponenten ihres Verhältnisses.

Sind

Sind hingegen A und B incommensurabel; und weiß man, zwischen welche zunächst auf einander folgende Vielfache von B irgend ein Vielfaches von A falle: so kennt man die Grenzen des Exponenten des Verhältnisses A : B für die Zahl, welche das Vielfache von A angiebt.

5. So reducirt sich im Allgemeinen die Untersuchung des Verhältnisses A : B auf die Vergleichung (in Rücksicht auf Gleichheit und Ungleichheit) entweder der einen Größe mit den Vielfachen der andern, oder der Vielfachen beyder unter einander; auf die Untersuchung: qualiter magnitudines A, B se habeant quoad multiplicitatem? wie Joh. Wallis (De Algebra Tractatus Cap. IX. p. 85. Oper. Math. Vol. II.) den Sinn der 3ten Definition des V. B. der Elem. angiebt: λογος εστι δυο μεγεθων ομογενων η κατα πηλικοτητα προς αλληλα ποια σχεσις. Auf eben diese Erklärung weisen die Folge der 1. 2. 3. Defin. und die Fassung der 3, 5, 7. hin.

6. Die Reduction §. 3. 4. gewährt den Vortheil, zu der Behandlung der Verhältnisse nicht, wie die erstere Vorstellungsart §. 2, Division einer Größe durch die andere, welche eigentlich nur bey Zahlen statt hat, wenigstens Theilung der Größen in gleiche Theile, sondern bloß Multiplication der Größen, oder wiederholte Addition derselben zu sich selbst, vorauszusetzen und zu fodern. Letztere allein, und umgekehrt, wiederholtes Abziehen einer gegebenen kleinern Größe von einer gegebenen größeren, nimmt Euclides stillschweigend als Postulate an: Theilung gerader Linien, Winkel, Cirkelbögen in gleiche Theile lehrt er, ehe er sie zu den Constructionen seiner Beweise gebraucht. Daher bemerkt Rob. Simson (Euclidis Element. Oxon. 1756 p. 357. sq.) bey dem 5ten Satz des V. Buchs: In constructione demonstrationi hujus praemissa, quae habetur in textu Graeco ejusque

que versionibus Latinis, requiritur, ut — EB secetur in tot partes aequales, quot sunt in AE aequales ipsi CF. Ex hoc autem manifestum est, constructionem hanc non esse Euclidis. Non enim docet Euclides, quomodo secari possint rectae lineae, nedum aliae magnitudines, in partes aequales, antequam ad VI, 9. veniat. Nunquam autem in constructione jubet aliquid fieri, quod facere non prius docuerat [vel postulaverat]. Constructionem igitur mutavimus in eam, quam sine dubio Euclides dederat; in qua nihil requiritur, praeterquam quod magnitudo sibi ipsi aliquoties addatur.

7. Sind A und B commensurabel; also entweder die eine einem Vielfachen der andern, oder ein Vielfaches der einen einem Vielfachen der andern gleich; $A = mB$, oder $nA = B$, oder $nA = mB$: so ist in dem ersten Falle $A + A$ d. h. $2A > mB$, und $mB + B$ oder $(m+1)B > A$; in dem zweyten $nA + A$ d. i. $(n+1)A > B$, und $B + B$ oder $2B > nA$; in dem dritten $nA + A$ d. i. $(n+1)A > mB$, und $mB + B$ oder $(m+1)B > nA$. Da nun, wenn A und B incommensurabel sind, sich immer nur angeben läßt: $nA > rB < (r+1)B$ oder $(r+1)B > nA$; so faßt Euclides in der 4. Defin. wider beyde Fälle zusammen, und setzt als allgemeines Merkmal homogener Größen, oder solcher, die ein Verhältniß zu einander haben, fest: daß sie vervielfältiget einander übertreffen können: λογον εχειν προσαλληλα μεγεθη λεγεται, α δυναται πολλαπλασιαζομενα αλληλων υπερεχειν.

8. In der Folge nimmt er besonders, entweder als in dieser Definition enthalten, oder stillschweigend als Postulat an: von zweyen dergleichen homogenen Größen lasse sich die kleinere so vervielfältigen, daß sie größer werde, als die größere. Eben dieses postulirt Archimedes

des (de sphaera et cylindro, Lib. I. und quadratura parabolae. Praef.) von dem Ueberschusse einer gegebenen größern Linie, Fläche, Körper, über eine gegebene kleinere.

9. Zwey Verhältnisse A:B, C:D, heißen nach der Vorstellungsart §. 2. gleich, wenn ihre Exponenten gleich sind, oder immer zwischen einerley Grenzen fallen.

D. h. soll A:B sich verhalten wie C:D; so muß, wenn A die Größe B, $m, \frac{1}{n}, \frac{m}{n}$mal enthält, auch C die Größe D, $m, \frac{1}{n}, \frac{m}{n}$mal enthalten; und umgekehrt, wenn so wohl A die Größe B, als C die Größe D, $m, \frac{1}{n}, \frac{m}{n}$mal enthält; so sagt man, es sey A:B = C:D. Die Glieder beyder Verhältnisse müssen also zugleich commensurabel seyn.

Enthält A weder B, noch irgend einen aliquoten Theil von B, ein oder etlichemal genau; so kann auch C weder D, noch irgend einen aliquoten Theil von D, ein oder etlichemal genau enthalten, wenn die Verhältnisse A:B, C:D unter einander einerley seyn sollen. Die Glieder beyder gleichen Verhältnisse müssen also auch zugleich commensurabel seyn. Und nun würde C:D sich nicht wie A:B verhalten, wenn, für irgend eine Zahl n, für welche $A > \frac{r}{n}B < \frac{r+1}{n}B$ ist, nicht auch $C > \frac{r}{n}D < \frac{r+1}{n}D$, sondern entweder C schon $< \frac{r}{n}D$, oder noch $> \frac{r+1}{n}D$ wäre.

10. Der Vorstellungsart §. 3. f. zufolge, wird diesemnach zur Einerleyheit zweyer Verhältnisse A:B, C:D

 erfo-

erfodert: daß, wenn $A = mB$, oder $nA = B$, oder $nA = mB$ ist, auch $C = mD$, $nC = D$, $nC = mD$ sey; und in dem Falle der Incommensurabilität, daß für jede Zahl n, zugleich $nA > rB < (r + 1) B$, $nC > rB < (r + 1) B$ seyen. Diese Bedingungen müssen statt haben, wenn man zu der Folgerung berechtiget seyn solle: A verhalte sich zu B, wie C zu D. Und umgekehrt, wenn man angiebt: A und B, C und D haben zu einander einerley Verhältniß; so muß verstanden werden, daß jene Bestimmungen bey ihnen statt haben.

11. Euclids 5te Definition: Εν τω αυτω λογω μεγεθη λεγεται ειναι, πρωτον προς δευτερον, και τριτον προς τεταρτον· οταν τα τȣ πρωτȣ και τριτȣ ισακις πολλαπλασια των τȣ δευτερȣ και τεταρτȣ ισακις πολλαπλασιων, καθ᾽ ομοιονȣν πολλαπλασιασμον, εκατερȣ η αμα ελλειπη, η αμα ισα η, η αμα υπερεχη, ληφθεντα καταλληλα; welche also zur Einerleyheit zweyer Verhältnisse A:B, C:D die Bedingung erfodert, oder aus derselben die Consequenz folgert: daß für jede Zahlen n, m immer zugleich $nA <=> mB$, $nC <=> mD$ seyen; enthält nun theils mehr, theils weniger, als §. 10. angegeben ist. Für Verhältnisse commensurabler Größen fehlen nämlich die Fälle $A = mB$, $nA = B$: für Verhältnisse incommensurabler Größen wird hingegen mit jeder Zahl n, statt der bestimmten darauf sich beziehenden r, $r + 1$, nach welchen $nA > rB < (r + 1)B$ ist, jede andere m verbunden, und auf $nA <> mB$ Rücksicht genommen; ferner, eben dieses auf gleiche Verhältnisse ohne Unterschied ausgedehnt.

12. Was das zweyte betrift: so ist ohne Zweifel die bestimmte Bedingung §. 10. unter der Euclidischen weiteren als ein besonderer Fall begriffen, in so fern der Beweis der Einerleyheit zweyer Verhältnisse darnach geführt wird. Und die Anwendung wird, wie die Beyspiele davon zeigen, durch diese Erweiterung nicht nur

nicht

nicht erschwert; sondern in der Rücksicht erleichtert, daß man nicht nöthig hat, für jedes Vielfache von A (nA) die nächstvielfachen von B (rB, ($r+1$) B), zwischen welche es fällt, zu bestimmen; oder für jede Zahl n die Grenzen $\frac{r}{n}$, $\frac{r+1}{n}$ des Exponenten des Verhältnisses A:B anzugeben. Diese Grenzen mögen seyn, welche sie wollen: so wird, wenn man gezeigt hat, daß immer zugleich $n A >< m B$, und $n C >< m D$ seyen; auch bestimmt $n C > r D < (r+1) D$ seyn, wenn $n A > r B < (r+1) B$ ist.

13. Die Rechtfertigung der Fassung der Euclidischen Definition in Beziehung auf die Converse des Falls §. 12. so wie in Betreff der bey andern §. 11. erwähnten Puncte, beruhet auf einigen Sätzen über die gleich Vielfache zweyer Größen; welche theils Euclides selbst der Anwendung seiner 5. Defin. voranschickt; theils Folgerungen aus denselben und aus den Grundsätzen des ersten Buches sind.

14. **Satz I.** Einerley oder gleicher Größen gleich Vielfache sind gleich.

Bew. Ist nämlich $A = B$: so ist auch $A + A = B + B$ (I. B. Ax. 2.); d. h. $2A = 2B$.

Und nun ferner $2A + A = 2B + B$ (I. B. Ax. 2.); d. h. $3A = 3B$; u. s. w.

Ueberhaupt $nA + A = nB + B$ (I. B. Ax. 2.), d. i. $(n+1) A = (n+1) B$, wenn $nA = nB$.

15. **Satz II.** (V, 1.) Sind $a, b, c, \ldots$ gleichartige Größen; und A, B, C, ... gleich Vielfache derselben: so ist die Summe $A + B + C + \ldots$ der letztern, das eben so Vielfache der Summe $a + b + c + \ldots$ der ersten

stern, das wievielfache jedes der letztern von jedem der erstern ist, A nämlich von a, B von b, C von c, u. s. w. Kurz, wenn $A = na$, $B = nb$, $C = nc \ldots$ ist; so ist auch $A + B + C + \ldots$ oder $na + nb + nc + \ldots = n(a + b + c + \ldots)$.

Bew. Nämlich unter der angegebenenen Bedingung sind

$$A = \overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \overset{4}{a} + \overset{5}{a} + \ldots + \overset{n}{a}$$
$$B = b + b + b + b + b + \ldots + b$$
$$C = c + c + c + c + c + \ldots + c$$
etc.

Folglich (I. B. Ax. 2.) $A + B + C +$ etc.

$$= \begin{cases} a + a + a + a + a + \ldots + a \\ + b + b + b + b + b + \ldots + b \\ + c + c + c + c + c + \ldots + c \\ \text{etc. etc. etc. etc. etc. etc.} \end{cases}$$

$$= \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \ldots + \alpha$$
d. h. $= n\alpha$, wenn $\alpha = a + b + c + \ldots$

16. Zusatz 1. Eben so ist

$$\overset{1}{na} + \overset{2}{na} + \overset{3}{na} + \overset{4}{na} + \overset{5}{na} + \ldots + \overset{r}{na}$$
$$= n\,(\overset{1}{a} + \overset{2}{a} + \overset{3}{a} + \overset{4}{a} + \overset{5}{a} + \ldots + \overset{r}{a}$$
d. h. $= n.ra$, oder dem $n$fachen des $r$fachen von a.

17. Zusatz 2. Gleich Vielfache ungleicher Größen sind ungleich, nämlich, das der größeren ist größer.

Denn, wenn $A > B = B + C$ ist:

so ist $nA = n(B + C)$ (§. 14.)

Aber $nB + nC = n(B + C)$ (§. 15.)

Also ist $nA = nB + nC$ (I. B. Ax. 1.) $> nB$ (I. B. Ax. 2.).

18. Zu-

18. Zusatz 3. Größen, deren gleich Vielfache gleich sind, sind gleich.

Ist nämlich $nA = nB$: so kann von den Größen A, B nicht die eine A größer als die andere B seyn; indem sonst $nA > nB$ wäre (§. 17.).

19. Zusatz 4. Größen, deren gleich Vielfache ungleich sind, sind ungleich; nämlich, diejenige ist größer, deren gleich Vielfaches größer ist.

Denn, wenn $nA > nB$ ist: so kann weder $A = B$ seyn, weil sonst $nA = nB$ wäre (§. 14.);
Noch kann $A < B$, $B > A$ seyn, weil sonst $nB > nA$ wäre (§. 17.).

20. Satz III. Wenn A, E, G, ... Vielfache sind einer nämlichen Größe B; so ist ihre Summe das so Vielfache von B, als die Zahl angiebt, welche die Summe der Zahlen ist, die die Vielfachheit von jeder derselben bezeichnen: d. h. wenn $A = pB$, $E = qB$, $G = rB$, ... und $n = p + q + r + \ldots$ ist: so ist $A + E + G + \ldots = nB$.

Bew. Denn so bestehet $A + E + G + \ldots$ aus p, und q, und r, ... Theilen oder Größen, jeder $= B$; d. i. aus B, gesetzt oder zu sich selbst addirt, $p + q + r + \ldots = n$mal.

21. Anmerk. Der einfachste Fall ist, wenn zu irgend einem Vielfachen A einer Größe B, diese Größe selbst noch addirt wird. Alsdann enthält $A + B$ die Größe B, $(r + 1)$mal, wenn A dieselbe $r$mal enthält; oder es ist $A + B = (r + 1)B$, wenn $A = rB$.

22. Zusatz 1. (V, 2.) Wenn A und C gleich Vielfache sind von B und D; E und F wieder gleich Vielfache von B und D; G und H ebenfalls gleich Vielfache von B und D; u. s. w.: so sind auch $A + E + G + \ldots$, $C + F + H + \ldots$, gleiche Vielfache von B und D.

Denn, wenn sowohl $A = pB$ als $C = pD$
$E = qB$ $F = qD$
$G = rB$ $H = rD$
etc.

so ist auch, sowohl $A+E+G+\ldots = nB$, als $C+F+H+\ldots = nD$, wenn $n = p+q+r+\ldots$ (§. 20.).

23. Anmerk. Wenn n und m gleiche Zahlen sind; so sind nA und mA, als gleich Vielfache derselben Größe A, gleich (§. 14.).

24. Zusatz 2. Ist aber $n > m = m + p$: so ist $mA + pA = nA$ (§. 20.); folglich $nA > mA$ (I. B. Ax. 9.).

25. Zusatz 3. Umgekehrt ist $n = m$, wenn $nA = mA$.

Denn nun kann nicht eine der beyden Zahlen $n >$ als die andere m seyn; sonst wäre $nA > mA$ (§. 24.).

26. Zusatz 4. Hingegen ist $n > m$, wenn $nA > mA$. Denn so kann weder $n = m$ seyn; weil sonst $nA = mA$ wäre (§ 23.).

Noch kann $n < m$, $m > n$ seyn; weil sonst $mA > nA$ wäre (§. 24.).

27. Zusatz 5. Sind also A und C gleich Vielfache von B und D; und wiederum E und F gleich Vielfache derselben B und D: so wird $C <=> F$ seyn, so wie $A <=> E$ ist.

Denn, wenn A und C die $n$fache, E und F die $m$fache von B und D sind; so muß

1) wenn $A = E$, d. h. $nB = mB$ ist; $n = m$ (§. 25.), folglich $nD = mD$ (§. 23.), d. i. $C = F$ seyn.

2) wenn $A > E$, d. h. $nB > mB$ ist; $n > m$ (§. 26.); folglich $nD > mD$ (§. 24.), d. i. $C > F$ seyn.

3) wenn

3) wenn $A < E$, also $E > A$, d. i. $mB > pB$ ist: muß $m > n$ (§. 26), daher $mD > nD$ (§. 24.), d. i. $F > C$, $C < F$ seyn.

28. Satz IV. Das *r*fache des *n*fachen einer Größe ist dem *n*fachen des *r*fachen der nämlichen Größe gleich; d. h. $r \times nA = n \times rA$.

Bew. $r \cdot nA = \overset{1}{n}A + \overset{2}{n}A + \overset{3}{n}A + \overset{4}{n}A + \overset{5}{n}A + \ldots + \overset{r}{n}A$

u. eben so $rA = A + A + A + A + A + \ldots + A$

folglich $n \cdot rA = n(A + A + A + A + A + \ldots + A)$ (§. 14.)

$= nA + nA + nA + nA + nA + \ldots + nA$ (§. 16.).

Also $r \times nA = n \times rA$ (I. B. Ax. 1.)

29. Zusatz. (VII, 16.) Mithin ist $r \times n = n \times r$ (§. 25.): d. h. das *r*fache der Zahl *n* ist dem *n*fachen der Zahl *r* gleich; oder, das Product zweyer ganzen Zahlen wird durch die Verwechslung des Multiplicandus und Multiplicators nicht geändert.

Dieses läßt sich auch schon, so wie in dem Beweise §. 28. folgern, und als ein besonderer Fall des Satzes §. 28. betrachten; da die ganzen Zahlen *n*, *r* das *n*fache, *r*fache der Einheit sind.

30. Satz V. (V, 3.) Wenn A und C gleich Vielfache sind von B und D; und man nimmt E und F gleich Vielfache von A und C: so sind auch E und F gleich Vielfache von B und D.

Bew. Den Bedingungen zufolge sind

$$\text{sowohl } E = \left\{\begin{array}{l} A = pB \\ +A = pB \\ +A = pB \\ \quad\vdots \\ +A = pB \end{array}\right. \quad \text{als } F = \left\{\begin{array}{l} C = pD \\ +C = pD \\ +C = pD \\ \quad\vdots \\ +C = pD \end{array}\right.$$

folg-

folglich (§. 22.) E und F gleich Vielfache von B und D, nämlich, sowohl $E = n \times pB$, als $F = n \times pD$, weil beydes, $E = nA$ und $F = nC$.

31. Satz VI. Wenn $A = mB$, und $C = mD$ ist; oder wenn $nA = B$, und $nC = D$; oder wenn $nA = mB$, und $nC = mD$ ist: so sind jede gleich Vielfache von A und C irgend gleich Vielfachen von B und D, das von A nämlich dem von B, und das von C dem von D, entweder beyde gleich, oder zugleich größer, oder kleiner; d. h. pC ist $= qD$, $> qD$, $< qD$, so wie $pA = qB$, $> qB$, $< qB$ ist, für jede zwey ganze Zahlen p, q.

Bew. 1°. Wenn $A = mB$, und $C = mD$; also auch $pA = p \times mB$, $pC = p \times mD$ (§. 14.);
so ist, so wie $pA <=> qB$, eben daher $p \times mB$, (als $= pA$), $<=> qB$;
und nun ebenfalls $p \times mD <=> qD$ (§. 30. 27.);
folglich, da $p \times mD = pC$, auch $pC <=> qD$.

2°. Eben so, wenn $nA = B$, und $nC = D$; also auch $q \times nA = qB$, $q \times nC = qD$ (§. 19.):
ist, so wie $pA <=> qB$, ebenfalls $pA <=> q \times nA$; daher auch $pC <=> q \times nC$ (§. 30. 27.) oder qD.

3°. Wenn $nA = mB$, und $nC = mD$:
so ist, so wie $pA <=> qB$, auch $n \times pA <=> n \times qB$ (§. 14. 17.)

Da aber $nA = mB$ (hypoth.); so ist $p \times nA = p \times mB$ (§. 14.)
und $p \times nA = n \times pA$ (§. 28.); und
So wie $pA <=> qB$: ist also auch $p \times mB <=> n \times qB$;
und daher ebenfalls $p \times mD <=> n \times qD$ (§. 30. 27.)

Da

Da aber $nC = mD$ (hypoth.): so ist
$nC = p \times mD$ (§. 14.)

Folglich ist zugleich auch $p \times nC <=> n \times qD$.

Nun ist $p \times nC = n \times pC$ (§. 28.)

Mithin gleichfalls auch $n \times pC <=> n \times qD$;
daher ebenfalls zugleich $pC <=> qD$ (§. 18. 19.).

32. Aus der Einerleyheit zweyer Verhältnisse commensurabler Größen, A : B, C : D, der gemeinschaftliche
onent derselben mag m, $\frac{1}{n}$, oder $\frac{m}{n}$ seyn, wird also
ner richtig gefolgert: daß zugleich $nA <=> mB$,
$nC <=> mD$ seyen, für jede ganze Zahlen n, m
31.).

33. Sind aber A und B, C und D incommensura-
; und $\frac{r}{n}$, $\frac{r+1}{n}$ die gemeinschaftliche Grenzen der Ex-
tenten der gleichen Verhältnisse A : B; C : D, für die
l n; ist also bestimmt $nA > rB < (r+1) B$, und
leich $nC > rD < (r+1) D$: so muß,

1) wenn überhaupt $nA > mB$ ist; $mB =$ oder
rB; folglich $m =$ oder $< r$ (§. 25. 26.), $mD =$ oder
rD (§. 23. 24.); daher nC, welches $> rD$ (hyp.),
ch $> mD$ seyn.

2) Eben so, wenn $nA < mB$: muß $mB =$ oder
$(r+1) B$; daher $m =$ oder $> r+1$ (§. 25. 26.);
D = oder $> (r+1) D$ (§. 23. 24.); folglich nC,
lches $< (r+1) D$ (hyp.), auch $< mD$ seyn.

34. Die allgemeine Angabe der Euclidischen 5. De-
ition, daß, wenn $A : B = C : D$, immer zugleich
$A <=> mB$, $nC <=> mD$ seyen, ist also ge-
ndet (§. 32. 33.).

35. Daß

35. Daß umgekehrt, wenn in dem nach eben dieser Definition geführten Beweise der Einerleyheit zweyer Verhältnisse A:B, C:D dargethan wird, es seyen immer zugleich $nA <=> mB$, $nC <=> mD$; eben daraus die durchgängige Einerleyheit der Grenzen der Exponenten beyder Verhältnisse, wenn A und B, C und D incommensurabel sind, bewiesen werde, ist schon §. 12. bemerkt worden.

Sind aber A und B, C und D commensurabel: und ist

1) $\frac{m}{n}$ der Exponent des Verhältnisses A:B; also $nA = mB$; folglich vermöge des Beweises nach Defin. 5. zugleich $nC = mD$: so ist auch $C = \frac{m}{n}D$, oder $\frac{m}{n}$ der Exponent des Verhältnisses C:D.

2) wenn $A = mB$; also $pA = p \times mB$ (§. 14.) ist: so ist vermöge des Beweises und §. 30. zugleich $pC = p \times mD$, und daher auch $C = mD$ (§. 18.).

3) Wenn $nA = B$; also $p \times nA = pB$ (§. 14.) so ist wieder vermöge des Beweises und §. 30. auch $p \times nC = pD$; folglich $nC = D$ (§. 18.).

36. Der nach der Euclidischen 5. Definition geführte Beweis der Einerleyheit zweyer Verhältnisse, enthält also für den Fall, wenn die Größen commensurabel sind, den Beweis der Gleichheit ihrer Exponenten, von welcher Form diese auch seyn mögen, m oder $\frac{1}{n}$, oder $\frac{m}{n}$; und für incommensurable Größen, den vollständigen Beweis der durchgängigen Einerleiheit der Grenzen ihrer Exponenten.

Er schließt zwar, besonders in dem erstern Fall, viel mehreres in sich. Dieser weitere Umfang aber, der übri-

gens

es seine Anwendung nicht erschweret, verschaft ihm den
ortheil, alle verschiedene Fälle und Formen auf einmal
umfassen.

37. Nach der Vorstellungsart §. 2. werden die
erhältnisse A:B, C:D verschieden seyn, wenn ihre Ex-
nenten ungleich sind, oder nicht immer zwischen einer-
i Grenzen fallen.

Und das Verhältniß A:B wird größer heißen als
s C:D, wenn C die Größe D wenigermal enthält oder
thalten kann, als vielmal A die B enthält; oder wenn
die Größe B mehrmal enthält, wenigstens enthalten
uß, als C die D enthält oder enthalten kann: und
ngekehrt.

38. Hiebey können nämlich entweder die Glieder
yder Verhältnisse commensurabel; oder die Glieder bey-
r incommensurabel; oder die des einen commensura-
l, und die des andern incommensurabel seyn.

39. Sind sowohl A und B, als C und D commen-
rabel; die Exponenten ihrer Verhältnisse aber ungleich:
heißt dasjenige von beyden A:B das größere, dessen
xponent der größere ist. Wenn also $A = mB$, oder
$= \frac{1}{n}B$, oder $= \frac{m}{n}B$; aber $C < mD$, oder $< \frac{1}{n}D$,
er $< \frac{m}{n}D$ ist: folglich, wenn $A = mB$, aber $C < mD$;
er wenn $nA = B$, aber $nC < D$; oder wenn nA
$= mB$, aber $nC < mD$ ist: so ist $A:B > C:D$.

Umgekehrt soll $A:B > C:D$ seyn: so muß, wenn
e Glieder beyder Verhältnisse commensurabel sind, der
xponent des ersten größer seyn, als der Exponent des
weyten: folglich, wenn $A = mB$ ist, $C < mD$ seyn;
wenn

wenn $nA = B$, muß $nC < D$; wenn $nA = mB$ ist, $nC < mD$ seyn.

40. Sind A und B commensurabel, aber C und D incommensurabel: so wird $A:B > C:D$ heißen, wenn der Exponent $m, \frac{1}{n}, \frac{m}{n}$ des Verhältnisses $A:B$ größer ist, als die größere Grenze des Exponenten des Verhältnisses $C:D$ (§. 2.); und umgekehrt: wenn $A = mB$, aber $C > (m-1)D < mD$; oder wenn $nA = B$, aber $nC > rD < D$; oder wenn $nA = mB$, aber $nC > (m-1)D < mD$: und umgekehrt.

41. Sind C und D commensurabel, A und B incommensurabel: so wird $A:B > C:D$ seyn, wenn die kleinere Grenze des Exponenten des Verhältnisses $A:B$ dem Exponenten des Verhältnisses $C:D$ gleich ist, oder denselben noch übertrift; und umgekehrt: d. h. wenn, indem $A > \frac{r}{n}B < \frac{r+1}{n}B$ ist, entweder $C = \frac{r}{n}D$ oder $< \frac{r}{n}D$ ist; folglich wenn, indem $nA > rB$ ist, nC ist $= rD$ oder $< rD$; und umgekehrt.

42. Sind endlich sowohl A und B, als C und D incommensurabel; so wird $A:B > C:D$ heißen, wenn die kleinere Grenze des Exponenten des Verhältnisses $A:B$ der größeren Grenze des Exponenten des Verhältnisses $C:D$ gleich, oder größer als sie ist; und umgekehrt: d. h. wenn, indem $A > \frac{r}{n}B < \frac{r+1}{n}B$ ist, entweder C nur $> \frac{r-1}{n}D$ und schon $< \frac{r}{n}D$, oder sogar schon $C < \frac{r-1}{n}D$ ist; folglich wenn wiederum, indem $nA > rB$ ist, nC hingegen ist $< rD$; und umgekehrt.

43. Eu-

43. Euclids 7te Definition: Οταν δε των ισακις πολλαπλασιων, το μεν τȣ πρωτȣ πολλαπλασιον υπερεχη τȣ τȣ δευτερȣ πολλαπλασιȣ, το δε τȣ τριτȣ πολλαπλασιον μη υπερεχη τȣ τȣ τεταρτȣ πολλαπλασιȣ· τοτε το πρωτον προς το δευτερον μειζονα λογον εχειν λεγεται, ηπερ το τριτον προς το τεταρτον; schränkt sich bloß auf die Bedingungen und Folgerungen §. 41. 42. ein, ohne der Fälle §. 39. 40. zu erwähnen.

Dieses wird durch folgende zwey Sätze gerechtfertiget.

44. Satz VII. Wenn $A = mB$, aber $C < mD$; oder wenn $nA = B$, aber $nC < D$; oder wenn $nA = mB$, aber $nC < mD$; so lassen sich immer ein gleich Vielfaches von A und C, und ein gleich Vielfaches von B und D angeben; so, daß das Vielfache von A größer ist als das von B, das Vielfache von C aber nicht größer ist als das von D.

Bew. 1°. Es sey $A = mB$, aber $C < mD$, nämlich $mD = C + E$: so wird

α) wenn $C =< E$ ist; $2C =< C + E$, oder mD seyn (I. B. Ax. 2. 9.), da hingegen $2A = 2mB$ (§. 14) $> mB$ ist.

β) wenn $C > E$ ist: so nehme man E das Zweifache, Dreyfache, u. s. w. bis man ein Vielfaches von E erhält, das größer als C ist (§. 8.). Dieses sey das $r$fache von E: also $C < rE$.

So ist $rC + C < rC + rE$ (I. B. Ax. 4.); d. h. $(r + 1) C < r (C + E)$ oder $r \times mD$ (§. 21. 15); da hingegen (§. 24.) $(r + 1) A > rA$ oder (§. 14.) $r \times mB$ ist. $r \times mB$ und $r \times mD$ aber sind gleich Vielfache von B und D (§. 30.).

2°. Es sey $nA = B$, aber $nC < D$, nämlich $D = nC + E$: so wird

 α) wenn

α) wenn $C = < E$, also (I. B. Ax. 2. 4.) $nC + C = < nC + E$, d. i. $(n+1) C = < D$ ist, $2(n+1) C = < 2D$ seyn (§. 14. 17), indem $(n+1) A > nA$ oder B, folglich $2(n+1) A > 2B$ ist (§. 17.).

β) wenn $C > E$ ist; so sey wieder, wie no. 1, $C < rE$.

So ist $r \times nC + C < r \times nC + rE$ (I. B. Ax. 4.); d. h. $(r \times n + 1) C < r(nC + E)$ oder rD (§. 21. 15.): hingegen $r \times nA + A$ oder $(r \times n + 1) A > r \times nA$ oder rB (§. 21. 14.). Nun sind $(r \times n + 1) A$, $(r \times n + 1) C$ gleich Vielfache von A und C (§. 30.).

3°. Es sey $nA = mB$, aber $nC < mD$, nämlich $mD = nC + E$; so wird

α) wenn $C = < E$, wieder (I. B. Ax. 2. 4.) $nC + C = < nC + E$, d. h. $(n+1) C = < mD$ seyn, indem $(n+1) A > nA$, also $> mB$ ist.

β) wenn $C > E$, und, wie no. 1. $C < rE$ ist:
so ist wieder $r \times nC + C < r \times nC + rE$ (I. B. Ax 4.), d. h. $(r \times n + 1) C < r \times (nC + E)$ oder $r \times mD$ (§. 21. 15.);
da hingegen $r \times nA + A$, d. i. $(r \times n + 1) A > r \times nA$ oder $r \times mB$ ist (§ 21. 14.).

Nun sind $(r \times n + 1) A$, $(r \times n + 1) C$ gleich Vielfache von A und C; $r \times mB$, $r \times mD$ gleich Vielfache von B und D (§. 30. 22.).

45. Satz VIII. Umgekehrt, wenn unter den gleich Vielfachen von A und C, und den gleich Vielfachen von B und D, ein Vielfaches von A grösser ist, als das von B, daß Vielfache von C aber nicht grösser ist, als das von D; wenn nämlich $pA > qB$, aber pC nicht $>$ sondern $= < qD$: und es ist $A = mB$;
so ist $C < mD$: oder es ist $nA = B$; so ist $nC < D$: oder es ist $nA = mB$; so ist $nC < mD$.

Bew.

Bew. 1°. Es sey $A = mB$; also $pA = p \times mB$ 14.).

Da (hyp.) $pA > qB$: so ist auch $p \times mB > qB$; daher ebenfalls $p \times mD > qD$ (§. 30. 27.).

Aber $pC = < qD$ (hyp.) Mithin, da $qD < p \times mD$; aequo, oder a fortiori, $pC < p \times mD$; und daher $< mD$ (§. 19.).

2°. Es sey $nA = B$; also $q \times nA = qB$ (§. 14.).

Da $pA > qB$ (hyp.): so ist auch $pA > q \times nA$; glich ebenfalls $pD > q \times nD$ (§. 27. 30).

Aber $pC = < qD$ (hyp.); daher auch $n \times pC < n \times qD$ (§. 14. 17.), oder $p \times nC = < q \times nD$ 28.);

folglich, da $q \times nD < pD$: ex aequo oder a fortiori $nC < pD$; mithin $nC < D$ (§. 19.).

3°. Es sey $nA = mB$: also $p \times nA = p \times mB$ 14); oder $n \times pA = m \times pB$ (§ 28.).

Da $pA > qB$ (hyp.); folglich $m \times pA > n \times qB$ 17.); so ist $m \times pB > n \times qB$, und daher auch $\times pD > n \times qD$ (§. 27. 30.).

Aber $pC = < qD$ (hyp.); mithin $n \times pC < n \times qD$ (§. 14. 17.).

In beyden Fällen ist also wieder $n \times pC < m \times pD$ er $p \times nC < p \times mD$ (§. 28.); und daher $nC < mD$ 19.).

46. So erhellet aus dem Bisherigen: daß die Eu-dischen Definitionen 5. 7. des V. Buchs, die Bedingun-n und Eigenschaften zweyer Verhältnisse, und des ößerseyns des einen, welche sich aus dem gemeinen griffe des Enthaltenseyns einer Größe in der andern 2) nach den mancherley Fällen, die dabey statt ha-n können, ergeben, in größter Allgemeinheit, auf die instmögliche Anzahl reducirt, enthalten und angeben.

 47. Jene

47. Jene gewöhnliche Vorstellungsart (§. 2.) bey Seite gesetzt; dagegen den Euclidischen Begriff vom Verhältniß (§. 3. f.) zum Grunde gelegt, vermöge dessen die Einerleyheit oder Verschiedenheit zweyer Verhältnisse A : B, C : D, von der Vergleichung der ersten A und der dritten C, oder ihrer gleich Vielfachen, mit gleich Vielfachen der zweyten B und der vierten D, oder mit ihnen selbst, abhängen müssen: läßt sich eben dieses auf folgende Art darstellen.

48. Bey der Vergleichung von A und C mit gleich Vielfachen von B und D, so wie bey der von B und D mit gleich Vielfachen von A und C, kommen folgende Fälle in Betrachtung:

1°. A ist einem Vielfachen von B, und zugleich C dem eben so Vielfachen von D gleich; oder ein Vielfaches von A ist gleich B, und das nämliche Vielfache von C ist gleich D: es ist $A = mB$, und zugleich $C = mD$; oder es ist $nA = B$, und zugleich $nC = D$.

In beyden Fällen sind alsdenn jede gleich Vielfache von A und C, irgend gleich Vielfachen von B und D, das von A nämlich dem von B, und das von C dem von D, entweder beyde gleich, oder beyde zugleich größer oder kleiner: es sind immer zugleich $pA \lessgtr= qB$, und $pC \lessgtr= qD$; was auch p, q für ganze Zahlen seyn mögen (§. 31. no. 1. 2.).

2°. A ist zwar einem Vielfachen von B gleich, oder ein Vielfaches von A ist gleich B; aber C ist dem gleich Vielfachen von D nicht gleich, oder das gleich Vielfache von C ist nicht gleich D: es ist $A = mB$, aber $C \lessgtr mD$; oder es ist $nA = B$, aber $nC \lessgtr D$.

In den Fällen $A = mB$, aber $C < mD$; $nA = B$, aber $nC < D$: läßt sich immer ein gleich Vielfaches von

A

und C, und ein gleich Vielfaches von B und D ange-
n; so daß das Vielfache von A größer ist, als das von
das Vielfache von C aber nicht größer ist, als das
n D (§. 44. no. 1. 2.).

Und in den Fällen $A = mB$, aber $C > mD$;
$A = B$, aber $nC > D$:

sind (§. 14. 17.) $2A = 2mB$, aber $2C > 2mD$;
$nA = 2B$, aber $2nC > 2D$:

Man hat also gleich Vielfache von A und C, und
. 30.) gleich Vielfache von B und D; so daß das Viel-
che von C größer ist, als das von D, das Vielfache
n A aber nicht größer ist, als das von B.

3°. C ist einem Vielfachen von D gleich, oder ein
ielfaches von C ist gleich D; aber A ist nicht dem gleich
ielfachen von B gleich, oder das gleich Vielfache von
ist nicht gleich B: es ist $C = mD$, aber $A <> mB$;
er es ist $nC = D$, aber $nA <> B$.

Aus den Fällen $C = mD$, aber $A < mB$; $nC = D$,
er $nA < B$; ergiebt sich die zweyte Folgerung no. 2.
s §. 44. no. 1. 2.

Und aus den Fällen $C = mD$, aber $A > mB$;
$C = D$, aber $nA > B$; ergiebt sich die erste Folge-
ng no. 2.; indem nun wieder $2C = 2mD$,
$A > 2mB$; $2nC = 2D$, $2nA > 2B$ (§. 14. 17.).

Ist weder A einem Vielfachen von B, noch C einem
ielfachen von D gleich; und auch, weder ein Vielfaches
n A gleich B, noch irgend ein Vielfaches von C gleich
: so beruhet das weitere auf der Vergleichung der
eich Vielfachen von A und C, mit den gleich Vielfachen
n B und D.

49. Hierbey ergiebt sich nun entweder: daß Viel-
che von A Vielfachen von B, und zugleich die eben so

Vielfachen von C, wie von A, den nämlichen Vielfachen von D, wie von B, gleich sind; oder nicht: d. h. es sind entweder zugleich $nA = mB$, und $nC = mD$ für einige ganze Zahlen n, m; oder für keine.

In dem ersten Falle hat die Folgerung §. 48. no. 1. wieder statt, vermöge §. 31. no. 3.

In dem zweyten ist entweder, für gewisse ganze Zahlen n, m, zwar $nA = mB$, aber nicht zugleich auch $nC = mD$, sondern $nC <> mD$; oder zwar $nC = mD$, aber nicht zugleich $nA = mB$, sondern $nA <> mB$; oder es ist weder irgend ein Vielfaches von A einem Vielfachen von B, noch irgend ein Vielfaches von C einem Vielfachen von D gleich.

Ist nun $nA = mB$, aber $nC > mD$; oder $nC = mD$, aber $nA > mB$: so hat man gleich Vielfache von A und C, und gleich Vielfache von B und D, die so beschaffen sind; daß entweder das Vielfache von C größer ist, als das von D, das Vielfache von A aber nicht größer ist, als das von B; oder daß umgekehrt, das Vielfache von A größer ist, als das von B, hingegen das Vielfache von C nicht größer ist, als das von D: wie §. 48. no. 2. 3.

Und wenn $nA = mB$, aber $nC < mD$; oder $nC = mD$, aber $nA < mB$: so haben die nämlichen Folgerungen statt, vermöge §. 44. no. 3.

Endlich wenn weder irgend ein nA irgend einem mB, noch irgend ein nC irgend einem mD gleich ist: so sind entweder immer zugleich $nA <> mB$, und $nC <> mD$; oder es ist für gewisse Zahlen n, m, indem $nA <> mB$, im Gegentheil $nC >< mD$.

Der erstere von diesen Fällen ist wieder in der Folgerung §. 48. no. 1.; und der zweyte in den Folgerungen §. 48. no. 2. 3. begriffen.

50. Die

50. Die Erfolge der Vergleichung sowohl der Grössen A und C mit den gleich Vielfachen von B und D, als der gleich Vielfachen von A und C, beydes mit den Grössen B und D, und mit den gleich Vielfachen derselben, reduciren sich also auf die zwey allgemeine in den zwey Euclidischen Definitionen 5. 7. angegebene Resultate.

1°. Entweder sind immer zugleich $pA <=> qB$, $pC <=> qD$; was auch p, q für ganze Zahlen (mit Ausschluß der Einheit) bedeuten.

2°. Oder es ist für einige ganze Zahlen n, m (wieder mit Ausschluß der Einheit) $nA > mB$, aber nC nicht $>$ sondern $= < mD$.

Das Resultat: $nC > mD$, aber $nA =< mB$; reducirt sich nämlich auf das vorige durch Verwechslung von A und C, B und D.

51. Durch welche technische Benennungen Euclides die Beziehung der Verhältnisse A : B, C : D, nach jenen zwey Hauptresultaten, Abkürzung des Vortrags halber, bezeichnen und unterscheiden wollte, war im Grunde willkührlich. Nur mußte er, wenn er in der gemeinen Sprache schon gangbare Worte dazu wählen wollte, dieselben dem Sprachgebrauche und seiner Analogie möglichst genau anpassen.

Das erste Resultat enthält die besondern Fälle, wo zugleich $nA = mB$, und $nC = mD$; also beydes,

$A = \frac{m}{n} B$, und $C = \frac{m}{n} D$; mit Einschluß der Einheit in den Bedeutungen von m und n (§. 48.): in welchen also A die Größe B, (sowohl nach der auf das Ganze eingeschränkten Bedeutung, als nach der weitern Ausdehnung derselben auf Theile) eben so vielmal enthält, als C die Größe D.

Das zweyte Resultat: $nA > mB$, aber $nC = < mD$; folglich $A > \frac{m}{n}B$, aber $C = < \frac{m}{n}D$, besagt, wenigstens wenn sowohl A und B, als C und D commensurabel sind, in dem erst angegebenen Anfange: A enthalte B mehrmal, als C die Größe D enthält.

So waren für das erstere Resultat die Benennungen einerley, gleiche, ähnliche Verhältnisse, oder der Ausdruck, A verhalte sich zu B wie C zu D; und für das zweyte der Ausdruck, A habe zu B ein größeres Verhältniß, als C zu D, der allgemeinen Bedeutung dieser Worte gemäß; vielleicht auch schon mit ihrer Anwendung auf Verhältnisse commensurabler Größen, wenigstens auf die einfachsten Fälle derselben, übereinstimmend.

52. Was einerley und gleiche Größen, verschiedene und ungleiche, größere und kleinere heißen, hat Euclides nicht definirt; sondern die Bedeutung dieser Benennungen von Größen, als aus dem gemeinen Sprachgebrauche bekannt, angenommen. Dagegen hat er, um den Abgang dieser vielleicht an und für sich nicht genau möglichen Bestimmung zu ergänzen, und den Mißbrauch unbeschränkter, schwankender Berufung auf den Sprachgebrauch zu verhüten, ausdrücklich in den 1—7. und 9. Axiomen des I. Buchs, die auf Gleichheit und Ungleichheit der Größen überhaupt sich beziehende Sätze angegeben, deren er sich, als in den gemeinen Begriffen derselben enthalten, in der Folge zu Begründung seiner Schlüsse bedienen werde. Außer diesen nimmt er in seinen Beweisen Gleich und Ungleich, und in dem letztern Falle Größer und Kleinerseyn, als so entgegengesetzte Eigenschaften homogener Größen an, daß die Folgerungen allgemein gelten: A ist entweder gleich B, oder größer als B, oder kleiner als B; A und B sind gleich, wenn keine von beyden größer ist als

als die andere; A ist größer als B, wenn A weder gleich B, noch kleiner als B ist.

53. Gleiche und ungleiche Verhältnisse kennt der gemeine Sprachgebrauch wenigstens nur dunkel, schwankend, und weder in der Bestimmtheit einerseits, noch in der Ausdehnung andrerseits, deren der Mathematiker bedarf.

Indem nun Euclides die Bedeutung der Benennungen Einerley, Größer, für Verhältnisse in seiner. 5. und 7. Defin. genau bestimmt: nimmt er zugleich die Verbindlichkeit auf sich, seine Sätze von den Verhältnissen bloß hiernach, ohne Einmischung der gewöhnlichen Bedeutung der Worte Einerley, Gleich, Verschieden, Ungleich, Größer, Kleiner, und der darauf sich beziehenden Axiome, abzufassen und zu beweisen. Letztere bleiben hiebey für ihn nur noch zur Anwendung bey den Gleichvielfachen brauchbar, auf deren Gleichheit und Ungleichheit, in der gemeinen Bedeutung, sich seine Definitionen beziehen. Daher beweiset er wirklich in den Sätzen V, 7 — 11. 13. von Verhältnissen, was er von Größen als Axiome angenommen hatte. Und Rob. Simson (l. c. p. 362. sqq.) tadelt und verwirft mit Recht die nun in den Elementen stehende Beweise der Sätze V, 9. 10. theils als unvollständig, theils als fehlerhaft und unächt, mit folgender Bemerkung: Hujus propositionis (V, 9.) demonstrationem dedimus magis explicitam ea, quae in Elementis hactenus habetur. Aliam hujus (V, 10.) demonstrationem tradere necessarium fuit: ea enim, quae in editionibus Graecis et Latinis aliisque habetur, legitima non est. Verba enim: *major*, *eadem* sive *aequalis*, *minor*, de magnitudinibus et rationibus diverso prorsus sensu dicuntur; ut ex Defin. 5. et 7. hujus Libri patet — Videtur autem, eum, qui demonstrationem decimae, quae jam ha-

 betur.

betur, posuit vice ejus, quam Eudoxus aut Euclides dederat, deceptum fuisse, transferendo id, quod manifestum quidem est de magnitudinibus, ad rationes: magnitudinem scilicet quamvis non posse simul majorem et minorem esse alia. Quae eidem aequalia, et inter se sunt aequalia, Axioma est maxime evidens, si de magnitudinibus intelligatur. Euclides autem eo non vtitur ad ostendendum: rationes, quae eidem rationi sunt eaedem, inter se easdem esse; sed hoc explicite demonstrat in V, 11. —

54. Uebrigens folgt aus der obigen Deduction §. 48. ff. daß die zwey oder drey Endresultate derselben, mithin auch die darauf bezogene Benennungen einerley oder gleicher, größerer, kleinerer Verhältnisse, einander eben so entgegengesetzt sind, wie nach dem gemeinen Sprachgebrauche die Benennungen einerley oder gleicher, größerer, kleinerer Größen; daher denn die zuletzt §. 52. von den Größen angeführte Sätze auch von Verhältnissen in Euclidischem, seinen Defin. 5. 7. gemäßen, Sinne gelten: wie es in allewege die Sprachanalogie erfodert.

55. Hieron. Saccherius (Euclides ab omni naevo vindicatus. Mediol. 1733.) hat p. 115. sqq. in der Absicht aus den Beweisen der Sätze V, 18. XII, 2. die Voraussezzung einer vierten Proportionalgröße zu drey gegebenen wegzuschaffen, einen nicht ganz gerathenen Versuch gemacht, die Deduction §. 49. zu dem Zwecke §. 54 zu gebrauchen; welchen Rob. Simson (l. c. Not. ad V, 18. p. 366. sqq.) noch schlechter aufgenommen hat.

Seinen Hülfssatz, oder, wie er ihn nennet, Axiom: Sint quatuor magnitudines A, B, C, D, quarum duae priores in suo proprio genere, ac similiter posteriores, vel in eodem cum prioribus genere, vel in alio

alio quodam suo proprio genere, consistant; dico, rationem tertiae C ad quartam D vel aequalem fore, vel majorem, vel minorem ratione primae A ad secundam B — zu beweisen, schickt Saccherius voraus: Sumantur ipsarum A primae et tertiae C quaelibet aequemultiplices E, G; atque item ipsarum B secundae et quartae D duae quaelibet aequemultiplices I, L. Constat *primo*: rationem ipsius A ad B aequalem fore rationi ipsius C ad D, si vel in uno casu talium assumtarum aequemultiplicium contingat, ut E aequemultiplex primae aequalis sit ipsi I multiplici secundae, et G multiplex tertiae aequalis sit ipsi L multiplici quartae — Constat *secundo*: rationem primae A ad secundam B majorem fore ratione tertiae C ad quartam D, si vel in uno casu talium assumtarum aequemultiplicium contingat, vt E multiplex primae excedat ipsam I multiplicem secundae, sed G multiplex tertiae non excedat illam L multiplicem quartae; aut illae E aequalis sit praedictae I (prout ego cum Clavio interpretor), dum altera G minor est sibi correspondente L — Und fährt darauf fort: Vel inter possibiles aequemultiplices primae A et tertiae C, ac simul inter possibiles aequemultiplices secundae B et quartae D, una quaepiam reperitur E multiplex primae A et I multiplex secundae B invicem aequales; ac simul (in eodem casu) una quaedam G multiplex tertiae C aequalis ipsi L multiplici quartae D: vel nusquam talis aequalitas reperitur. Si primum: constat ex jam demonstratis, ita fore A ad B ut C ad D. Sin vero nusquam reperitur ejusmodi simul ex utraque parte aequalitas: vel saltem ad alterutram partem reperitur, ut puta ad partem primae A; vel nusquam. Si primum: ergo (ex praemissa Euclidea majoris ac minoris proportionis definitione)

tione) habebit A ad B majorem, aut minorem proportionem quam C ad D, prout G multiplex tertiae C minor fuerit, aut major ipsa L multiplici quartae D. Sin vero secundum: ergo ex una quidem parte, v. gr. ad ipsas A primam et B secundam, contingere poterit, ut illa multiplex E minor sit altera multiplici I, dum vice versa ex altera parte illa multiplex G major est altera multiplici L. Tunc autem (sub eadem Euclidea definitione) ratio primae A ad secundam B erit minor ratione tertiae C ad quartam D: aut vice versa. Igitur demonstratum manet substitutum illud axioma —

Minime, fügt Rob. Simson bey, sed sine demonstratione manet. Quod enim dicit posse contingere, poterit innumeris casibus nunquam contingere; et propterea demonstratio ejus nulla est. Nam ex. gr. si fuerit A latus et B diameter quadrati, C vero latus et D diameter alterius quadrati: nunquam poterit multiplex ipsius A aequalis esse multiplici ipsius B, nec aliqua ipsius C aequalis alicui ipsius D, ut notum est; tamen nunquam contingere poterit, ut, existente multiplici quadam ipsius A majore, vel minore multiplici quadam ipsius B, multiplex ipsius C vice versa minor, vel major sit multiplici ipsius D; sumtis scilicet ipsarum A, C aequemultiplicibus, et ipsarum B, D aequemultiplicibus. Sunt enim A, B, C, D proportionales.

Seiner Bemerkung zu folge, hätte Simson den Beweis des Saccherius nicht für ganz untauglich, nur für unvollständig, aber leicht ergänzbar, erklären sollen; indem der von ihm übersehene Fall nur einen zweyten der Gleichheit beyder Verhältnisse angiebt.

Triftig möchte aber gegen den Beweis, den Saccherius dem ersten seiner vorausgeschickten Sätze beygefügt

fügt hat, eingewendet werden, daß er nicht allgemein gültig sey. Er ist nämlich kurz gefaßt folgender: Wenn sowohl $nA = mB$, als $nC = mD$; so ist beydes, $A : B$ und $C : D = m : n$ (VII, 19.); folglich $A : B = C : D$ (V, 11.). In dem Satze VII, 19. sind aber A, B, C, D Zahlen: und sein Beweis, in so fern er sich zum Theil auf VII, 17. gründet, verstattet nicht, ihn auf jede andere Größen auszudehnen.

Zweytens bekennet Saccherius selbst p. 122. 126.: Die Auslegung und Ausdehnung der 7. Definition in seiner zweyten Prämisse könne blos Bedürfnisses halber gemacht zu seyn scheinen. Und die Rechtfertigungen davon p. 122. sq. möchten eben so wenig als der p. 125. sqq. beygefügte Beweis des zweyten Theils jener Prämisse genugthuend seyn.

56. Sonst lassen sich die Sätze §. 54. 55. auch aus den Euclidischen Definitionen 5. 7. mit Zuziehung des Satzes, §. 43. no. 3. und einiger anderer, die gleich Vielfache betreffenden, herleiten. Nämlich

1°. Wenn die Verhältnisse $A:B$, $C:D$ unter sich einerley; also (Defin. 5.) immer zugleich $nA <=> mB$, und $nC <=> mD$ sind; folglich niemals weder $nA > mB$, aber $nC =< mD$; noch $nC > mD$, aber $nA =< mB$ ist: so kann weder $A:B > C:D$, noch $C:D > A:B$, oder $A:B < C:D$ nach Defin. 7. seyn.

2°. Umgekehrt, wenn weder $A:B > C:D$, noch $C:D > A:B$; so kann,

α) indem $nA = mB$, weder $nC > mD$ seyn, weil sonst (Defin. 7.) $C:D > A:B$ wäre; noch $nC < mD$, weil sonst (§. 43. no. 3. und Defin. 7.) $A:B > C:D$ wäre. Also muß auch $nC = mD$ seyn.

β) In

β) Indem $nA > mB$, wird auch $nC > mD$ seyn: weil, wenn $nC = < mD$ sollte seyn können, $A:B > C:D$ wäre (Defin. 7.).

γ) Indem $nA < mB$, muß ebenfalls $nC < mD$ seyn: da sonst, wenn $nC = > mD$ wäre, $C:D > A:B$ seyn würde (Defin. 7. und §. 43. no. 3.).

Folglich ist alsdenn immer zugleich $nA < = > mB$, und $nC < = > mD$; also (Defin. 5.) $A:B = C:D$.

3°. Wenn die Verhältnisse $A:B$, $C:D$ nicht unter einander einerley; also nicht immer zugleich $nA < = > mB$, $nC < = > mD$ sind (Defin. 5.): so wird für einige ganze Zahlen n, m,

α) entweder $nC > < mD$ seyn, indem $nA = mB$ ist: alsdenn ist in dem ersten Falle $C:D > A:B$ (Def. 7.); und in dem zweyten $A:B > C:D$ (§. 43. no. 3. und Defin. 7.).

β) Oder es wird $nC = < mD$ seyn, indem $nA > mB$ ist: so ist $A:B > C:D$ (Defin. 7.).

γ) Oder es wird $nC = > mD$ seyn; indem $nA < mB$ ist: alsdann ist $C:D > A:B$ (Defin. 7. und §. 43. no. 3).

4°. Wenn $A:B > C:D$; also (Defin. 7.) für einige Zahlen n, m ist $nA > mB$, aber $nC = < mD$: so sind

α) nicht für jede Zahlen n, m zugleich $nA < = > mB$, und $nC < = > mD$; also nicht $A:B = C:D$ (Defin. 7.).

β) kann auch alsdenn nicht $A:B < C:D$, oder $C:D > A:B$ seyn; d. h. (Defin. 7.) es können für keine zwey ganze Zahlen p, q, seyn $pC > qB$, hingegen $pA = < qB$.

Denn

Denn wegen $nA > mB$, aber $nC = < mD$ (hypoth.);

ist auch (§. 17. 14.) $p \times nA > p \times mB$, aber $p \times nC = < p \times mD$, oder $p \times mD = > p \times nC$.

Und wenn $pC > qD$: so ist auch (§. 17.) $n \times pC$, oder (§. 28.) $p \times nC > n \times qD$.

Also ex aequo oder a fortiori $p \times mD > n \times qD$.

Daher ebenfalls (§. 27.) $p \times mB > n \times qB$.

Folglich um so vielmehr $p \times nA$ oder (§. 28.) $n \times pA > n \times qB$; und also noch $pA > qB$ (§. 19.).

II.

Ueber die Bewegung der Fässer in welchen Kugeln geründet werden; von J. H. Lambert *).

I. Kugeln von Stein oder gegossenem Eisen abzuründen, werden sie in ein Faß gethan, das man sodann um seine Achse drehen läßt. Hierdurch geschiehet, daß die darein gethanen Stücke sich unter einander anstoßen und abnutzen, so daß alle Ungleichheiten ihrer Oberflächen verschwinden, und dieselben eine sphärische Figur, wie auch eine ziemlich glatte Oberfläche gewinnen. Dies gelingt um so viel besser, wenn die Steine in allen ihren Theilen einen gleichen Grad von Härte haben. Auf eben die Weise ungefähr haben sich nach der Meynung des Cartesius die Elementartheilchen der Welt nach und nach abge-

*) Aus dessen hinterlassener französischer Handschrift, welche, wie sein Tagebuch bezeuget, im Junius 1776 (ein Jahr vor seinem Tode) aufgesetzt worden. J. Bernoulli.

abgerundet. Und gleichermaßen ründen sich die Steine in den sie fortwälzenden Flüssen ab.

II. Dieser Mechanismus ist sehr einfach. Indessen erfordert er doch einige Aufmerksamkeit, wenn die Maschine solchergestalt soll eingerichtet werden, daß die Abründung so geschwind als möglich Statt finde. Zu dem Ende muß sowohl die Kraft als die Vielheit, oder öftere Wiederholung der Stöße, ein Maximum werden. Die Vermehrung der Geschwindigkeit trägt etwas darzu bey. Sobald aber diese Geschwindigkeit bis auf einen gewissen Grad zugenommen hat, theilet die drehende Bewegung des Fasses den Kugeln eine Fliehkraft (vim centrifugam) mit, welche verursachet, daß sie an der inneren Fläche des Fasses wie ankleben, und sodann das Aneinanderstoßen aufhöret.

III. Es sey BAEV, Fig. 1. der Durchschnitt der Tonne, C der Mittelpunkt der Achse, $AC = r$ der Halbmesser, und c die Geschwindigkeit des Umkreises oder irgend eines Punktes M desselben. Es habe eine mit dieser Geschwindigkeit bis zu dem Punkt M gelangte Kugel die Fliehkraft $MF = \gamma$, so ist

$$\gamma = \frac{cc}{2r}.$$

Nun sey ferner $MG = g$ die Wirkung der Schwere. Vollendet man das Parallelogramm MGNF, so giebt die Diagonallinie MN den Werth und die Richtung der aus der Zusammensetzung der zwey Kräfte MF, MG entstehenden Kraft. Nennen wir φ den Winkel VCM $=$ GMC, welchen der Halbmesser CM mit den senkrechten Linien VC, GM bildet, so haben wir

$$MN^2 = g^2 + \gamma^2 - 2g\gamma \cdot \cos\varphi.$$

IV. Es werde aus dem Punkte G eine senkrechte Linie GP auf den Halbmesser CM gezogen, so wird die

Wir-

Wirkung der Schwere MP in zwey andere PG, PM aufgelöset. Und unstreitig wird die Kugel aufhören, gegen die Oberfläche angedrückt zu werden, sobald als PM anfängt größer als FM zu seyn. In solchem Fall wird der Winkel CMN = 90°, und man hat

$$g . \cos \varphi = \gamma.$$

Von dem Augenblicke an wird die von der Oberfläche sich ablösende Kugel sich frey bewegen; sie wird die Tangentialgeschwindigkeit c haben, und indem sie nach dem Gesetze der schief geworfenen Körper fällt, eine krumme Linie beschreiben, welche parabolisch seyn wird, wenn man den Widerstand der Luft aus der Acht lassen kann. Auf solche Weise fällt dann die Kugel in einen Punkt Q des Umkreises zurück.

V. Es sey der Winkel ACQ = ψ; ferner τ die Zeit, welche die Kugel braucht, die Parabel MQ zu beschreiben; und wenn die Verticallinie QKD bis zur Tangente MD gezogen worden, so ist

$$MD = c\tau \text{ und } QD = g\tau\tau$$

woraus man durch Eliminirung des τ erhält

$$\frac{QD}{g} = \frac{MD^2}{cc}$$

Allein man hat auch durch die Eigenschaft des Kreises

$$MD^2 = QD . KD$$

Folglich ist $KD = \frac{cc}{g}$

und weil $g \cos \varphi = \gamma = \frac{cc}{2r}$

so geben diese Gleichungen, wenn c eliminiret wird

$$KD = 2r . \cos \varphi$$

das ist $KD = MR.$

Man findet aber durch die Construction

$$QD = r\,[\cos\varphi + \cos\psi + (\sin\varphi - \sin\psi)\,.\,\tan\varphi]$$
$$QK = 2r\,.\cos\psi$$

Demnach

$$KD = r\,[\cos\varphi - \cos\psi + (\sin\varphi - \sin\psi)\tan\varphi]$$
$$= \frac{r - r\cos(\varphi - \psi)}{\cos\varphi}.$$

Substituirt man diesen Werth in der Gleichung

$$KD = 2r\cos\varphi$$

so hat man $2\cos\varphi^2 = 1 - \cos(\varphi - \psi)$
oder $\cos 2\varphi = -\cos(\varphi - \psi)$

Woraus sich leicht ergiebt

$$\varphi = 60^\circ + \tfrac{1}{3}\psi.$$

VI. Dieses Verhältniß der Winkel φ und ψ ist sehr einfach. Allein da es nicht hinreichet, diese Winkel selbst zu bestimmen; so muß man noch andere Betrachtungen zu Hülfe nehmen. Ich bemerke demnach, daß die Geschwindigkeit zunimmt, je mehr der Punkt M dem Scheitelpunkt V näher ist. Deswegen wird man besser thun, den Punkt Q irgendwo in dem Bogen AB anzunehmen. Denn alsdann ist ψ verneinend, und der Winkel φ wird um so viel kleiner. Außerdem habe ich in der vorigen Rechnung angenommen, die Kugel in M sey die höchste von allen. Man kann aber auch zugleich annehmen, die Kugel in Q sey an dem andern Ende, so daß alle Kugeln in dem Bogen QM sich befinden. Dieser Bogen muß nicht über 180° betragen. Und wenn man ihn dem halben Kreise gleich setzet, so hat man $\varphi = 45^\circ$, und $\psi = -45^\circ$. In diesem Falle können die Kugeln die Hälfte des innern Raumes der Tonne einnehmen, und wenn diese mit der erforderlichen Geschwindigkeit umgedrehet wird, so werden die Kugeln solchergestalt ihren Platz bekommen, daß der Durchmesser des halben Krei-

ses

fes, den sie ausfüllen, eine Neigung von 45 Graden hat. Wenn übrigens das Faß auf solche Weise angefüllt ist, so werden die den Punkt M erreichenden Kugeln, nur sehr selten in der Parabel MQ wieder herabfallen, sondern über die andern wegrollen. Hierdurch entstehen zwar minder starke Stöße, aber desto öftere: welches denn mehr oder weniger auf eins herauskommt.

VII. Ich beobachte nun weiter, daß nur der Winkel Φ allein auf die Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher das Faß umgedrehet werden soll, Einfluß hat. Die Geschwindigkeit der Punkte der inneren Fläche ist

$$c = \sqrt{(2rg \,.\, \cos\varphi)}.$$

Man siehet leicht ein, daß sie nicht kann größer seyn als $\sqrt{(2rg)}$, und daß, wenn man $\varphi = 45^\circ$ macht, dieselbe wird

$$c = \sqrt{(rg\sqrt{2})}$$

so daß sie nur etwa um den $\frac{1}{8}$ Theil kleiner ist, als wenn man $\varphi = 0$ setzt. Nun aber ist die Biquadratwurzel von $2 = 1,189207$.

Demnach $c = 1,189207 . \sqrt{(rg)}$.

Daher wenn $g = 15,625$ Rheinische Fuß angenommen wird, ist $\sqrt{g} = 3,9530$, und folglich $c = 4,7009 . \sqrt{r}$ Rhein. Fuß.

VIII. Nachdem die Geschwindigkeit c mittelst des Halbmessers der Tonne gefunden worden, hat man auch noch den Widerstand, welchen das Gewicht der Kugeln der bewegenden Kraft entgegen setzt, zu bestimmen. Es sey der Winkel $VCM = \varphi = 45^\circ$, Fig. 2. und werde der Durchmesser MQ gezogen, so hat man den Winkel $QCA = \psi = -45^\circ$. Wenn denn die Tonne halb voll ist, so werden die Kugeln den Raum des halben Kreises QCMEQ, oder vielmehr den krummlinichten Raum qHMEq einnehmen. Es sey I der gemeinschaft-

liche Schwerpunkt der Kugeln; man ziehe die Verticallinie IL, welche den Horizontaldiameter BCE unter rechten Winkeln durchschneiden wird. So giebt alsdann die mit dem Gewichte der Kugeln multiplicirte Distanz CL das statische Momentum der Kugeln. Man setze jenes Gewicht $= p$, und CL $= a$, so ist das Product ap das Maaß dieses Momentums.

IX. Die Kugeln lassen leere Zwischenräume zwischen einander, und diese machen ungefähr $\frac{7}{27}$ Theile des ganzen Raumes, den die Kugeln einnehmen, aus. Wenn nun die innere Länge der Tonne $= \lambda$ ist, so wird ihr Inhalt $= rr\pi\lambda$ seyn, und die Hälfte dieser Masse $= \frac{1}{2}\pi rr\lambda$. Der $\frac{20}{27}$te Theil dieser Hälfte ist $= \frac{10}{27}\pi rr\lambda$ Cubikfuß. Kennt man dann das Gewicht eines Cubikfußes der Materie, aus welcher die Kugeln bestehen, so multiplicire man dieses Gewicht mit $\frac{10}{27}\pi rr\lambda$, oder (weil $\pi = \frac{22}{7}$ kann gesetzt werden) mit $\frac{220}{189} rr\lambda$, und man erhält das Gewicht p der sämmtlichen Kugeln. Hiernächst hat man $CI = \frac{14}{33} r$, und da der Winkel $ICL = 45°$ ist, so wird $CL = \frac{14}{33} . r\sqrt{\frac{1}{2}} = a$.

Wenn die Kugeln von Eisen sind, wird der Rhein. Cubikfuß ungefähr 510 Pfund Berliner Gewichtes wiegen. Dies giebt $p = 594\, rr\lambda$ Pf. und das statische Momentum $ap = 178\, rrr\lambda$. Dieses Momentum zeigt ein Gewicht an, welches an einem Hebel, in der Entfernung von 1 Fuß angehängt ist. Sind die Kugeln von Stein, so hat man $ap = 44\, rrr\lambda$, und wäre von Pulverkörnern die Rede, so hätte man für dieses Momentum nur $ap = 28\, rrr\lambda$. Dabey ist allemal zu verstehen, daß diese Werthe für die Fälle gelten, wo die Kugeln die Hälfte der Tonne füllen, und der Winkel $\phi = 45°$ ist.

X. Nach-

X. Nachdem auf diese Weise das statische Moment und die Geschwindigkeit, mit welcher ein Faß von einem gegebenen Durchmesser soll gedrehet werden, bestimmt worden, so findet man keine Schwierigkeit in Ansehung der Art, die bewegenden Kräfte dabey anzubringen. Wir wollen z. B. annehmen, man wolle vier Pferde hierzu gebrauchen, die Kugeln seyen von Eisen, und die Absicht sey, die Anzahl und die Größe der Fässer, welche mit der erforderlichen Geschwindigkeit können umgedrehet werden, zu bestimmen. Die an die Hebel D, D, D; Fig. 3. angespannten Pferde werden das Kammrad R, R umdrehen, welches wiederum, indem es in die Getriebe L, L eingreifet, die Fässer T, T umwälzet. Wir wollen den Halbmesser der Laternen oder Getriebe ϱ nennen; R den Halbmesser des Rades R, und D den Abstand der Pferde von der Achse der Welle. Ich setze ferner voraus, daß die Pferde einen Weg von 10 Fuß in 3 Secunden zurücklegen, und mit Anwendung einer Kraft von 178 Pfunden: (Ich hätte können 175 schreiben; ich wähle aber 178, um die Rechnung abzukürzen).

XI. Weil nun die Geschwindigkeit des innern Umfanges der Fässer $c = 4{,}7 \cdot \sqrt{r}$ ist, so wird die Geschwindigkeit der Triebstöcke oder Stäbe der Laternen, wie auch der Zähne des Rades R

$$= \frac{\varrho c}{r} = 4{,}7 \cdot \frac{\varrho}{\sqrt{r}}$$

und die Geschwindigkeit der Pferde

$$4{,}7 \cdot \frac{D\varrho}{R\sqrt{r}} = \tfrac{10}{3} \text{ Fuß}.$$

Dies giebt

$$\frac{DR}{R} = \frac{\sqrt{r}}{1{,}41}.$$

 XII. Ueber

XII. Ueberdies haben wir für das statische Moment eines jeden Fasses, wenn die Kugeln von Eisen sind,

$$ap = 178 \cdot r^3 \lambda.$$

Es sey die Anzahl der Fässer $= m$; so ist dieses Moment $= 178\, m \lambda r^3$. Betrachtet man dasselbe in Ansehung der Laternenstäbe, und durch diesen Weg, der Zähne des Rades R, so ist es $= 178\, m \lambda r^3 : \rho$; endlich in Ansehung der Punkte D wird es $= 178\, m \lambda R r^3 : \varrho D$. Diese Größe ist aber der Kraft der 4 Pferde gleich, d. i. 4mal 178 Pfunde. Demnach hat man

$$\frac{178\, m \lambda R r^3}{\varrho D} = 4 \cdot 178.$$

Dies giebt

$$\frac{D\varrho}{R} = \frac{m \lambda r^3}{4},$$

und weil

$$\frac{D\varrho}{R} = \frac{\sqrt{r}}{1,41}$$

so ist

$$m \lambda r^{5:2} = \tfrac{400}{141}.$$

XIII. Diese Gleichung giebt uns zu erkennen, daß wenn die innere Länge der Fässer $= 1$ Fuß angenommen wird, man für 2 Fässer $m = 2$, und $r = 1,15$ Fuß erhält. Wollte man aber lieber vier Fässer gebrauchen, so wäre $m = 4$, und $r = 0,8325$ Fuß.

XIV. Ich habe das Reiben nicht in Betrachtung gezogen, nicht, als ob es nicht von einigen Belang seyn könnte, sondern weil man dasselbe am besten in Anschlag bringt, indem man die Anzahl der Kugeln um so viel vermindert, als die Erfahrung anzeigen wird, daß nöthig sey. Es schadet nichts, daß die Kugeln nicht ganz die Hälfte des innern Raumes der Fässer anfüllen.

XV. Das

XV. Das Verhältniß der Halbmesser ϱ, R eines zu
em andern muß rational seyn, nämlich ϱ zu R, wie eine
anze Zahl zu einer ganzen Zahl. Denn dieses Verhält-
ß ist dasselbe, als das Verhältniß der Anzahl der Stäbe
es Getriebes L zu der Anzahl der Zähne des Rades R.
Man hat demnach

$$\frac{\varrho}{R} = \frac{\sqrt{r}}{1,41 . D}$$

Da nun der Abstand D wenigstens 7 bis 8 Fuß be-
agen muß, und r von der Einheit 1 wenig verschieden
, so siehet man leicht ein, daß die Zahl R beyläufig
omal ϱ betragen wird. Macht man demnach
R = 17 : 168, und r = 1,15, welches der Fall
r 2 Fässer ist, so bekommt man

$$\frac{17}{168} = \frac{\sqrt{1,15}}{1,41 D}$$

Dies giebt D = 7,513, oder = $7\frac{1}{2}$ Fuß; und sol-
ergestalt wird die Laterne L, 17 Stäbe, das Rad R
er 168 Zähne haben.

III.

Ueber den Mittelpunkt der Schwere im sphärischen Drenecke; von Christian Kramp, der Arzneykunde Doctor, und Physikus des Oberamts Homburg bey Zweybrükken.

Aufgabe I. AP



Fig. 1.

ist der Bogen eines größten Kreises auf der Kugelfläche. Die rechtwinklichten Koordinaten, durch den Mittelpunkt der Kugel gehend, sind a, b, c für den Punkt A; und x, y, z für den Punkt P. Der Halbmesser der Kugel ist R. Man verlangt den Kosinus des Winkels AP.

Auflösung. $\text{Cos}\, AP = \frac{ax + by + cz}{RR}$.

Aufgabe II. Außer den Punkten A und P, befindet sich noch ein dritter Punkt auf der Kugelfläche, dessen Koordinaten X, Y, Z sind. Unter welcher allgemeinen Bedingung kann dieser dritte Punkt irgendwo auf dem Bogen AP, z. B. in X zu liegen kommen?

Auflösung. Alsdann, wann $(bz - cy)X + (cx - az)Y + (ay - bx)Z = 0$.

Erklärung. Wir werden die Kosinus der Bögen AX, AY, mit N, O; ihre Sinus mit N′ O′ bezeichnen. Es ist demnach

$$ax + by + cz = RN$$
$$aX + bY + cZ = RO.$$

Auf-

Aufgabe III. Man kennt die Koordinaten der inkte A, P; folglich auch den Winkel AP, und noch ßerdem den Winkel AX; man sucht die Koordinaten s Punktes X.

Auflösung.
$$N'RX = aN'O + (Rx - aN)O'$$
$$N'RY = bN'O + (Ry - bN)O'$$
$$N'RZ = cN'O + (Rz - cN)O'.$$

Aufgabe IV. Neben dem Bogen AP befindet sich n anderer, ihm gleicher Bogen AQ, der mit ihm den endlich kleinern Winkel dW macht. Welches ist die äche des Differentials UVXY, ingleichen die des gan z Elements AXV?

Auflösung. Es ist
$$UVXY = -R\,dO.dW$$
$$AXV = R(R-O).dW.$$

Aufgabe V. Man verlangt die drey Momente s Differentials UVXY, für die drey Axen.

Auflösung. Sie sind
$$-RX\,dO.dW = -\frac{aN'OdO + (Rx - Na)O'dO}{N'}dW$$
$$-RY\,dO.dW = -\frac{bN'OdO + (Ry - Nb)O'dO}{N'}dW$$
$$-RZ\,dO.dW = -\frac{cN'OdO + (Rz - Nc)O'dO}{N'}dW.$$

Aufgabe VI. Man verlangt die Integrale der vo gen Differentialformeln; oder die drey Momente des anzen Elements AXV.

Auflösung.
$$\frac{aRR}{2}\,\mathrm{Sin}^2 AX.dW + \frac{Rx - Na}{2N'} \times$$
$$(\mathrm{Ang}\,AX - \mathrm{Sin}\,AX.\mathrm{Cof}\,AX)\,RR\,dW$$

 bRR

$$\frac{bRR}{2}\operatorname{Sin}^2 AX . dW + \frac{Ry - Nb}{2N'} \times$$
$$(\operatorname{Ang} AX - \operatorname{Sin} AX . \operatorname{Cos} AX) RR . dW$$

$$\frac{cRR}{2}\operatorname{Sin}^2 AX . dW + \frac{Rz - Nc}{2N'} \times$$
$$(\operatorname{Ang} AX - \operatorname{Sin} AX . \operatorname{Cos} AX) RR . dW$$

Aufgabe VII. Man verlangt die Momente des ganzen Elements APQ, von A bis P.

Auflösung.

$$\frac{a(\operatorname{Sin} AP - \operatorname{Ang} AP . \operatorname{Cos} AP) + x(\operatorname{Ang} AP - \operatorname{Sin} AP . \operatorname{Cos} AP)}{\operatorname{Sin} AP}$$

$$\frac{b(\operatorname{Sin} AP - \operatorname{Ang} AP . \operatorname{Cos} AP) + y(\operatorname{Ang} AP - \operatorname{Sin} AP . \operatorname{Cos} AP)}{\operatorname{Sin} AP}$$

$$\frac{c(\operatorname{Sin} AP - \operatorname{Ang} AP . \operatorname{Cos} AP) + z(\operatorname{Ang} AP - \operatorname{Sin} AP . \operatorname{Cos} AP)}{\operatorname{Sin} AP}$$

Aufgabe VIII. Welches sind die drey Koordinaten des Schwerpunkts des Elements APQ, die wir mit X, Y, Z bezeichnen werden?

Auflösung.

$$X = \frac{a(\operatorname{Sin} AP - \operatorname{Ang} AP . \operatorname{Cos} AP) + x(\operatorname{Ang} AP - \operatorname{Sin} AP . \operatorname{Cos} AP)}{2 \operatorname{Sin} AP (1 - \operatorname{Cos} AP)}$$

$$Y = \frac{b(\operatorname{Sin} AP - \operatorname{Ang} AP . \operatorname{Cos} AP) + y(\operatorname{Ang} AP - \operatorname{Sin} AP . \operatorname{Cos} AP)}{2 \operatorname{Sin} AP (1 - \operatorname{Cos} AP)}$$

$$Z = \frac{c(\operatorname{Sin} AP - \operatorname{Ang} AP . \operatorname{Cos} AP) + z(\operatorname{Ang} AP - \operatorname{Sin} AP . \operatorname{Cos} AP)}{2 \operatorname{Sin} AP (1 - \operatorname{Cos} AP)}$$

Aufgabe IX. Die Entfernung des Schwerpunkts vom Mittelpunkt der Kugel?

Auflösung.

$$\frac{R \sqrt{(\operatorname{Sin}^2 AP - 2 \operatorname{Ang} AP . \operatorname{Sin} AP . \operatorname{Cos} AP + \operatorname{Ang}^2 AP)}}{2(1 - \operatorname{Cos} AP)}$$

Aufgabe X. Die Lage der Schweraxe (so nenne ich die Linie, die durch den Mittelpunkt und den Schwerpunkt geht, und verlängert der Oberfläche auf

den

den unendlich kleinen Bogen GH begegnet) oder den Winkel AG zu bestimmen.

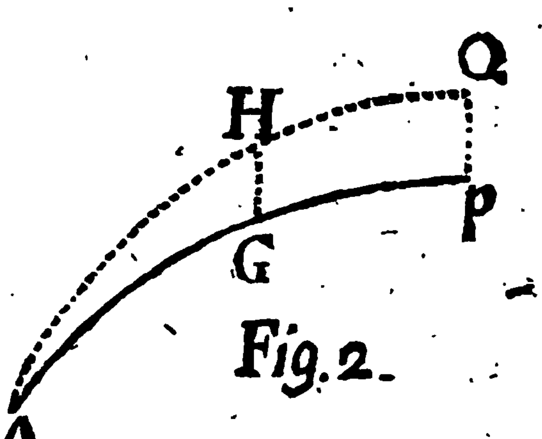


Fig. 2.

Auflösung.

$$\text{tang } AG = \frac{\text{Ang } AP - \text{Sin } AP . \text{Cos } AP}{\text{Sin}^2 AP}.$$

Anwendung. In der folgenden Tabelle sind von 30° zu 30° berechnet: I. die Bögen AG. II. die Entfernung des Schwerpunkts vom Mittelpunkte der Kugel für das Element APQ. III. Die nämlichen Entfernungen für den einzelnen Bogen AP. Die erstern sind mit R′ die andern mit R″ bezeichnet.

AP)	30°	60°	90°	120°	150°	180°
AG)	19°55′	39°19′	57°31′	73°28′	85°19′	90°0′
R′)	0,9924	0,9694	0,9319	0,8785	0,8204	0,7854
R″)	0,9886	0,9549	0,9003	0,8270	0,7379	0,6366

Folge I. Der Bogen AG beträgt bis gegen 60° hin, ohne einen merklichen Fehler, zwey Drittheile des ganzen Bogens AP; ganz wie beym geradlinichten Dreyecke: indem für AP = 30° der Unterschied erst 5′ auf 20°; für AP = 60° eben derselbe nur 41′ auf 40° beträgt.

Folge II. Der Schwerpunkt des sphärischen Elements APQ liegt, wie natürlich, der Oberfläche näher, als der Schwerpunkt des Bogens AP; indessen ist bey 30° der Unterschied zwischen beyden nur dem 263sten, und bey 60° nur dem 69sten Theil des Halbmessers gleich. Für AP = 180° ist eben dieser Unterschied etwa der siebente Theil des Halbmessers.

Erklä-

Erklärung. Ich gehe von dem sphärischen Elemente APQ zum sphärischen Dreyecke ABP selbst über; und erkläre, daß ich in demselben, die Seite AB und den Winkel B für beständig, alles andere für veränderlich; insbesondere aber den Winkel A und die Seite AP, den erstern mit W, die letztere mit U bezeichnet, für die beyden veränderlichen Größen ansehe, wodurch die Lage des dritten Punktes P bestimmt wird. Die Gleichung zwischen beyden ist, wenn Cot AB $=$ r, und $\frac{\text{Cot. B}}{\text{Sin AB}} = \Delta$ gesetzt wird, nach den ersten Grundsätzen der Trigonometrie,

Fig. 3.

$$\text{Cot U} = r \text{ Cos W} + \Delta \text{ Sin W}.$$

Die Koordinaten der beyden festen Punkte A und B, werden für den erstern a, b, c; für den letztern p, q, r heißen: für den dritten Punkt P sind eben dieselben, wie bisher, x, y, z. Die Kosinus der drey Seiten AB, AP, BP sollen mit O, N, M; ihre Sinus mit O′, N′, M′ bezeichnet seyn; so daß

$$ap + bq + cr = RO$$
$$ax + by + cz = RN$$
$$px + qy + rz = RM.$$

Aufgabe XI. Die drey Seiten des Dreyecks, und die Koordinaten der beyden Punkte A, B sind gegeben; man sucht die Koordinaten des dritten Punktes P.

Auflösung. Die drey Gleichungen dazu sind

$$ax + by + cz = RN$$
$$px + qy + rz = RM$$
$$xx + yy + zz = RR.$$

Ihre Auflösung führt uns auf die Funktion $R^3 - RM^2 - RN^2 - RO^2 + 2MNO$ hin, die wir mit $R\pi\pi$ bezeichnen wollen. Zerlegt man sie nach den gewöhnlichen Regeln der Analysis in ihre Faktoren, so zeigt es sich, daß sie gleich ist dem Würfel des Halbmessers, mit dem vierfachen Producte folgender vier Sinusse multiplicirt; $\text{Sin}\,\frac{AB + AP + PB}{2}$, $\text{Sin}\,\frac{-AB + AP + PB}{2}$, $\text{Sin}\,\frac{AB - AP + BP}{2}$, $\text{Sin}\,\frac{AB + AP - BP}{2}$. Man weiß, daß die Quadratwurzel dieses Products, durch das Produkt der Sinus zweyer Seiten dividirt, den Sinus des dazwischen liegenden Winkels giebt; und daß eben dieselbe, durch den Sinus einer Seite dividirt, den Sinus des Bogens giebt, der von dem entgegengesetzten Winkel senkrecht auf sie herabfällt. Vermittelst der so berechneten Größe π erhalten wir

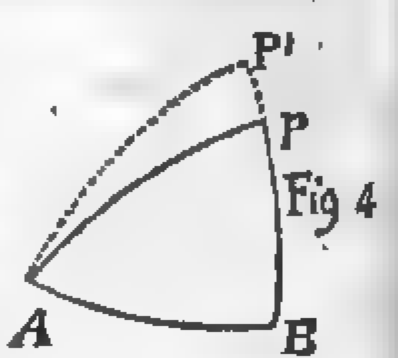
$$O'O'x = (aN + pM)R - (aM + pN)O + (br - cq)\pi$$
$$O'O'y = (bN + qM)R - (bM + qN)O + (cp - ar)\pi$$
$$O'O'z = (cN + rM)R - (cM + rN)O + (aq - bp)\pi$$

Aufgabe XII. Da die Seite AP und der Winkel A die veränderlichen Größen der Aufgabe seyn sollen, so verlangt man, aus den drey vorigen Gleichungen, alles was die Seite BP angeht, nämlich M und M′ wegzuschaffen, und dagegen vermittelst der Gleichung $RM = ON + O'N' \,\text{Cos}\, W$, den Winkel W einzuführen.

Aufl.
$$O'x = aO' \,\text{Cos}\, U + (pR - aO) \,\text{Sin}\, U \,\text{Cos}\, W + (br - cq) \,\text{Sin}\, U \,\text{Sin}\, W$$
$$O'y = bO' \,\text{Cos}\, U + (pR - bO) \,\text{Sin}\, U \,\text{Cos}\, W + (cp - ar) \,\text{Sin}\, U \,\text{Sin}\, W$$
$$O'z = cO' \,\text{Cos}\, U + (rR - cO) \,\text{Sin}\, U \,\text{Cos}\, W + (aq - bp) \,\text{Sin}\, U \,\text{Sin}\, W$$

Auf-

Aufgabe XIII. Die Koordinaten am Schwerpunkte des Elements A P P′ nämlich X, Y, Z (Aufg. VIII.) sollen durch die jetzt eingeführten veränderlichen Größen ausgedrückt, und daher an die Stelle von x, y, z, ihre so eben gefundene Werthe gesetzt werden.



Auflösung. Es ist

$$O'X = \frac{\left\{\begin{array}{l} a O' \operatorname{Sin}^2 U + (p R - a O) \operatorname{Cos} W (U - \operatorname{Sin} U . \operatorname{Cos} U) \\ \quad + (b r - c q) \operatorname{Sin} W (U - \operatorname{Sin} U \operatorname{Cos} U) \end{array}\right\}}{2(1 - \operatorname{Cos} U)}$$

$$O'Y = \frac{\left\{\begin{array}{l} b O' \operatorname{Sin}^2 U + (q R - b O) \operatorname{Cos} W (U - \operatorname{Sin} U . \operatorname{Cos} U) \\ \quad + (c p - a r) \operatorname{Sin} W (U - \operatorname{Sin} U \operatorname{Cos} U) \end{array}\right\}}{2(1 - \operatorname{Cos} U)}$$

$$O'Z = \frac{\left\{\begin{array}{l} c O' \operatorname{Sin}^2 U + (r R - c O) \operatorname{Cos} W (U - \operatorname{Sin} U \operatorname{Cos} U) \\ \quad + (a q - b p) \operatorname{Sin} W (U - \operatorname{Sin} U . \operatorname{Cos} U) \end{array}\right\}}{2(1 - \operatorname{Cos} U)}$$

Aufgabe XIV. Die drey Momente des Elements A P P′, für die drey Axen?

Auflösung. Sie sind $\frac{R R\, d W}{2\, O'}$, multiplicirt mit

$$\text{I)}\; a O' \operatorname{Sin}^2 U + (p R - a O) \operatorname{Cos} W (U - \operatorname{Sin} U \operatorname{Cos} U) + (b r - c q) \operatorname{Sin} W (U - \operatorname{Sin} U . \operatorname{Cos} U)$$

$$\text{II)}\; b O' \operatorname{Sin}^2 U + (q R - b O) \operatorname{Cos} W (U - \operatorname{Sin} U . \operatorname{Cos} U) + (c p - a r) \operatorname{Sin} W (U - \operatorname{Sin} U . \operatorname{Cos} U)$$

$$\text{III)}\; c O' \operatorname{Sin}^2 U + (r R - c O) \operatorname{Cos} W (U - \operatorname{Sin} U . \operatorname{Cos} U) + (a q - b p) \operatorname{Sin} W (U - \operatorname{Sin} U . \operatorname{Cos} U)$$

Aufgabe XV. Die Momente des ganzen Dreyecks sind die Integrale der Momente des Elements. Man verlangt demnach, die Differentiale genau anzugeben, von deren Integration ihre Bestimmung, und demnach auch die Auflösung der Aufgabe abhängt.

Auflö-

Auflösung. Es sind ihrer in allem fünfe; und wir werden sie indessen mit den Buchstaben C, D, E, F, G bezeichnen. Nämlich

$$\int dW \,.\, \mathrm{Sin}^2 U = C$$
$$\int dU \,.\, \mathrm{Sin}\, W = D$$
$$\int dU \,.\, \mathrm{Cos}\, W = E$$
$$\int dW \,.\, \mathrm{Cos}\, W \,.\, \mathrm{Sin}\, U \,.\, \mathrm{Cos}\, U = F$$
$$\int dW \,.\, \mathrm{Sin}\, W \,.\, \mathrm{Sin}\, U \,.\, \mathrm{Cos}\, U = G$$

Die Momente sind alsdann $\frac{RR}{2O'}$ multiplicirt mit

1) $\mathrm{Const} + aO'C + (pR - aO)(U\,\mathrm{Sin}\,W - D - F) - (br - cq)(U\,\mathrm{Cos}\,W - E + G)$

2) $\mathrm{Const} + bO'C + (qR - bO)(U\,\mathrm{Sin}\,W - D - F) - (cp - ar)(U\,\mathrm{Cos}\,W - E + G)$

3) $\mathrm{Const} + cO'C + (rR - cO)(U\,\mathrm{Sin}\,W - D - F) - (aq - bp)(U\,\mathrm{Cos}\,W - E + G)$

Aufgabe XVI. Alle hier vorkommenden Integrale auf ein einziges zurück zu führen.

Auflösung. Die sehr vortheilhafte Gestalt der Gleichung zwischen U und W, nämlich $\mathrm{Cot}\,U = r\,\mathrm{Cos}\,W + \Delta\,\mathrm{Sin}\,W$, macht dies wirklich möglich. Denn man nehme $\mathrm{Cot}\,W = x$, so ist

$$C = -\int \frac{dx}{(rr+1)xx + 2r\Delta x + (\Delta\Delta + 1)}$$

$$-D - F = +\int \frac{r\,dx}{(rr+1)xx + 2r\Delta x + (\Delta\Delta + 1)}$$

$$-E + G = -\int \frac{\Delta\,dx}{(rr+1)xx + 2r\Delta x + (\Delta\Delta + 1)}$$

daß also, wenn das Integral von

$\frac{dx}{(rr+1)\,xx + 2r\Delta x + (\Delta\Delta + 1)}$ mit K bezeichnet wird,

wird, die drei Momente sein werden, $\frac{RR}{2O'}$, multiplicirt mit folgenden drei Faktoren:

$$\text{Const} + aO'K + (pR - aO)(U \sin W + rK)$$
$$- (br - cq)(U \cos W - \Delta K)$$
$$\text{Const} + bO'K + (qR - bO)(U \sin W + rK)$$
$$- (cp - ar)(U \cos W - \Delta K)$$
$$\text{Const} + cO'K + (rR - cO)(U \sin W + rK)$$
$$- (aq - bp)(U \cos W - \Delta K)$$

Aufgabe XVII. Man verlangt den wirklichen Werth des Integrals K, zugleich die hinzuzusezzende beständige Größe, und also den Ausdruck der drei Momente vollständig und vollkommen entwickelt.

Auflösung. Das Integral K ist — Sin AB. Sin B, mit einer Winkelgröße, deren Contangente $\frac{\text{Cot } W. \text{Sin } B}{\text{Sin } AB}$ + Cot AB. Cos B ist, daß heißt, mit der andern Seite des sphärischen Dreiecks, BP, multiplicirt. Die beständige Größe ist $br - cq$, multiplicirt mit dem was AP wird, wenn $W = 0$, das ist, mit der dritten Seite AB. So sind demnach die drei Momente, $\frac{1}{2}$RR multiplicirt mit

$$a\text{BP}. \text{Sin AB}. \text{Sin B} + \frac{pR - aO}{O'}(U \sin W - \text{BP} \cos \text{AB}. \sin B)$$
$$- \frac{(br - cq)}{O'}(U \cos W + \text{BP} \cos B - \text{AB})$$
$$b\text{BP}. \text{Sin AB}. \text{Sin B} + \frac{qR - bO}{O'}(U \sin W - \text{BP} \cos \text{AB}. \sin B)$$
$$- \frac{cp - ar}{O'}(U \cos W + \text{BP} \cos B - \text{AB})$$
$$c\text{BP}. \text{Sin AB}. \text{Sin B} + \frac{rR - cO}{O'}(U \sin W - \text{BP} \cos \text{AB} \sin B)$$
$$- \frac{aq - bp}{O'}(U \cos W + \text{BP} \cos B - \text{AB})$$

Aufgabe

Aufgabe XVIII. Die drey Koordinaten des
chwerpunkts X, Y, Z?

Auflösung. Sie sind gleich den drey Momenten;
rch die Oberfläche des Dreyecks, also den drey Fakto-
r der vorigen Aufgabe, durch das doppelte von
$A + B + P - 180°$) dividirt.

Aufgabe XIX. Die Entfernung des Schwer-
nkts vom Mittelpunkt der Kugel, oder R'?

Auflösung. Es ist $R' = \sqrt{(XX + YY + ZZ)}$
er

$$\frac{\left(\frac{2}{3}R\sqrt{\begin{matrix}(AB^2 + AP^2 + BP^2 - 2AB.AP.\mathrm{Cos}A \\ - 2AB.BP\mathrm{Cos}B - 2AP.BP.\mathrm{Cos}P)\end{matrix}}\right)}{A + B + P - 180}$$

Aufgabe XX. Man verlangt die Koordinaten
s Punktes G, wo die Schweraxe
rlängert, der Kugelfläche begeg-
t. Wir werden sie mit X', Y', Z'
eichnen.

Fig. 5.

Auflösung. Es ist $X : X' = Y : Y' = Z : Z' = R' : R$.
e Koordinaten sind also gleich den drey Faktoren der
fgabe XVII, dividirt durch

$$\sqrt{\begin{matrix}(AB^2 + BP^2 + AP^2 - 2AB.BP.\mathrm{Cos}B \\ - 2AB.AP.\mathrm{Cos}A - 2BP.AP.\mathrm{Cos}B)\end{matrix}}$$

Ich werde statt dieser Quadratwurzel, künftig T
en.

Aufgabe XXI. Und zur Bestimmung der
ge der Schweraxe, die Bögen AG, BG, PG?

Auflösung. Es ist $\mathrm{Cos}\,AG = \frac{aX' + bY' + cZ'}{RR}$;
$\mathrm{Cos}\,BG = \frac{pX' + qY' + rZ'}{RR}$; u. $\mathrm{Cos}\,PG = \frac{xX' + yY' + zZ'}{RR}$.

Die Entwickelung dieser drey Ausdrücke führt uns auf einen beständigen Koefficienten hin, den wir mit S bezeichnen werden, und der auf folgende Art bestimmt wird. Man bezeichne mit M das schon in der Aufgabe XI erwähnte vierfache Produkt der vier Faktoren,

$$\text{Sin}\frac{AB+AP+BP}{2},\quad \text{Sin}\frac{-AB+AP+BP}{2},$$

$$\text{Sin}\frac{AB-AP+BP}{2},\quad \text{Sin}\frac{AB+AP-BP}{2}.$$ So ist

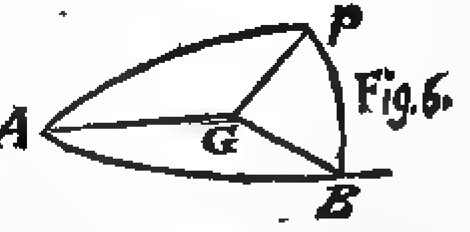
$$S=\frac{\text{Sin}\,AB.\,\text{Sin}\,AP.\,\text{Sin}\,BP\sqrt{\text{Si}A.\,\text{Si}B.\,\text{Sin}B}}{T\sqrt{M}};\ \text{oder}\ \frac{M}{T}\text{*)}$$

und sodann $\text{Cof}\,AG=\frac{BP}{\text{Sin}\,BP}S$; $\text{Cof}\,BG=\frac{AP}{\text{Sin}\,AP}S$;

$$\text{Cof}\,PG=\frac{AB}{\text{Sin}\,AB}S.$$

Es verhält sich demnach jeder dieser drey Kosinus, gerade wie die entgegengesetzte Seite des Dreyecks, und umgekehrt wie der Sinus dieser Seite. Das Problem vom Schwerpunkte des sphärischen Dreyecks ist also nunmehr ganz aufgelöst. Ich füge noch folgende Aufgabe hinzu.

Aufgabe XXII. G ist ein beliebiger Punkt in der Fläche des sphärischen Dreyecks ABP, oder auch außer ihr. Wann von den sechs Bogen AB, BP, AP, PG. AG, BG, fünfe gegeben sind, so ist durch sie auch der sechste bestimmt. Es muß demnach eine allgemeine Gleichung zwischen ihnen statt haben, und diese verlangt man zu wissen.



Auf

*) Beyde Ausdrücke sind gleich; allein der letztere weit kürzer.

Auflösung. Es sey Cos AB = a; Cos BP = b; [C]os AP = c; Cos PG = x; Cos AG = y; [Co]s BG = z. So ist $aaxx + bbyy + cczz$ [—] $2abxy — 2acxz — 2bcyz + 2cxy + 2ayz$ [+] $2bxz + 2abc — aa — bb — cc — xx — yy$ [—] $zz + 1 = 0$.

Folge. Wenn G der Punkt ist, wo die Schwer[linie] verlängert, die Kugelfläche schneidet, so werden die [Wi]nkel A, B, P, durch die Bögen AG, BG, PG nicht [in] zwey gleiche Theile getheilt, wie beym geradlinichten [Dr]eyecke. Es ist auch die Summe der Quadrate der Si[nu]s von AG, BG, PG kein Kleinstes, noch die Sum[me] der Quadrate der Cosinus dieser Bögen ein Größ[tes], wie sich dies aus dem Beyspiel des geradlinichten [Dr]eyecks vermuthen ließe. Diese Aufgaben, die sich [dur]ch die erst gegebene allgemeine Gleichung für das sphä[risc]he Dreyeck leicht auflösen ließen, führten uns auf [hö]her algebraische Funktionen hin; und die Aufgabe vom [Sc]hwerpunkte enthält in allen ihren Formeln transcen[den]te Größen. Rechnungen, die ich in Zahlen angestellt [ha]be, führen mich darauf, daß, im Falle des Schwer[pu]nktes, die Summe der Quadrate der Bögen AG, [B]G, PG ein Kleinstes seyn müsse. Ich sehe diese Ver[mu]thung für sehr wahrscheinlich an, und behalte mir den [Be]weis dieses Satzes auf ein andermal vor.

IV.

Formeln zur leichten Berechnung des Umfanges eines Kreises, von G. S. Klügel, Prof. zu Halle *).

---

§. 1. Euler hat zuerst eine bequeme Formel zur Berechnung des Umfanges eines Kreises angegeben, da man vorher sich der Tangente des Bogens von 30 Gr. bedient hatte, die aber durch ihre Irrationalität die Rechnung ungemein beschwerlich macht. Der Kunstgriff, den Euler gebraucht, besteht darin, daß er den Bogen von 45° in zwey Theile zerfällt, deren Tangenten rational sind, und aus diesen Tangenten die beyden Bogen berechnet, deren Summe der halbe Quadrant ist. Die beyden Tangenten können auf unzählig viele Arten angenommen werden. Am bequemsten sind sie $= \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, indem Arc. 45° $=$ Arc. tg $\frac{1}{2} +$ Arc. tg $\frac{1}{3}$ Man sehe die Introd. in Anal. Infin. T. I. §. 142, oder meine analytische Trigonometrie, wo ich den Anfang zur Berechnung des Umfanges gemacht habe.

§. 2. Die Rechnung wird noch mehr abgekürzt, wenn man den Bogen von 45 Gr. in mehr als zwey Theile zerfällt, so aber, daß hieraus zwey Haupttheile entstehen, die jeder gleiche Theile mit rationalen Tangenten enthalten. Es ist

Arc.

*) Man vergleiche hiermit die Abhandlung verwandten Inhalts desselben Verfassers. Verschiedene arithmetische Zusammensetzungen des Umfangs eines Kreises aus denselben Elementen. Archiv der Mathem. Vtes Heft, S. 60—66.

Hindenburg.

$$\text{Arc. } 45^\circ = \text{Arc. tg } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{3}$$
$$\text{Arc. } 45^\circ = 3 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{2}{11}$$
$$\text{Arc. } 45^\circ = 5 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{3}{79}$$
$$\text{Arc. } 45^\circ = 7 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} - 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{29}{278}.$$
etc.

Nach der dritten Formel hat Herr **Vega** den Um-
ing des Kreises aufs neue berechnet, bis auf 143 De-
malstellen; 16 Stellen weiter als seine Vorgänger, wo-
ey er auch eine bisher in allen Anführungen der Zahl für
en Umfang des Kreises fehlerhafte Ziffer entdeckt hat.
ie numerische Entwickelung der Formel ist in dem von
errn Vega herausgegebenen Thésauro Logarithmo-
um completo, pag. 633 zu finden. Die analytische
ormel ist nicht beygefügt. Zur Prüfung der Rechnung
at Herr Vega die erste Formel gebraucht, und hiebey
n Umfang bis auf 126 Decimalstellen berechnet. Da
e angeführten Formeln sonst noch nicht vorkommen, so
ird es nützlich seyn, ihre Entwickelung hier mitzutheilen.

§. 3. Es seyen α, β, γ, δ, etc. die Binomialcoeffi-
enten der Potenz $(1+z)^m$, nämlich $\alpha = m$;
$= \frac{m(m-1)}{1.2}$; etc, und tang $\varphi = t$, so ist *)

$$\text{tang. } m\varphi = \frac{\alpha t - \gamma t^3 + \varepsilon t^5 - \eta t^7 + \text{etc.}}{1 - \beta t^2 + \delta t^4 - \zeta t^6 + \text{etc.}}$$

§. 4. Man zerfälle den halben Quadranten in drey
heile, so daß Arc. $45^\circ = A + 2B$. Demnach ist

$$1 - \text{tg A. tg 2B} = \text{tg A} + \text{tg 2B}$$
$$\text{d } 1 - \text{tg A} = (1 + \text{tg A}). \text{tg 2B}.$$

*) Analyt. Trigonometrie, S. 108.

Es sey tg A = t; tg B = u, so ist

$$\mathrm{tg}\,2B = \frac{2u}{1-uu}, \text{ und}$$

$$\frac{1-t}{1+t} = \frac{2u}{1-uu};$$

also $(1-t)u^2 + 2(1+t)u = 1-t$.

Damit u rational werde, wenn t rational ist, muß $1 + \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2$ ein Quadrat seyn, oder $2 + 2t^2 = ff$. Es fällt gleich in die Augen, daß diese Forderung durch die Werthe $t = 7$, und $t = \frac{1}{7}$ erfüllt wird. Die Formel $2 + 2t^2$ läßt sich noch auf unzählig viele Arten zu einem Quadrate machen, wie in Eulers Algebra, in dem Abschnitte von der unbestimmten Analytik, §. 56. gezeigt wird. Hier gebrauchen wir nur den Werth $t = \frac{1}{7}$, wodurch $u = \frac{1}{3}$ wird, so daß

$$\mathrm{Arc.}\,45^\circ = \mathrm{Arc.\,tg}\,\tfrac{1}{7} + 2\,\mathrm{Arc.\,tg}\,\tfrac{1}{3}.$$

§. 5. Nach der bekannten Gleichung für $\varphi = \mathrm{Arc.\,tg}\,t$, nämlich

$$\varphi = t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{1}{7}t^7 + \text{etc.}$$

giebt die gefundene Zusammensetzung des halben Quadranten den Werth des halben Kreisumfanges für den Halbmesser Eins,

$$\pi = \tfrac{4}{7}\left(1 - \frac{1}{3\cdot7^2} + \frac{1}{5\cdot7^4} - \frac{1}{7\cdot7^6} + \frac{1}{9\cdot7^8} - \frac{1}{11\cdot7^{10}} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \tfrac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot9} + \frac{1}{5\cdot9^2} - \frac{1}{7\cdot9^3} + \frac{1}{9\cdot9^4} - \frac{1}{11\cdot9^5} + \text{etc.}\right).$$

Oder, durch die Zusammenziehung je zweyer Brüche mit entgegengesetzten Vorzeichen,

$$\pi = \frac{8}{343}\left(\frac{73}{1.3} + \frac{169}{5.7.7^4} + \frac{265}{9.11.7^8} + \frac{361}{13.15.7^{12}} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{16}{27}\left(\frac{13}{1.3} + \frac{29}{5.7.9^2} + \frac{45}{9.11.9^4} + \frac{61}{13.15.9^6} + \text{etc.}\right).$$

In der ersten Reihe machen die Zähler der Brüche eine arithmetische Progression aus, in welcher der Unterschied der Glieder $= 96$ ist; in der zweyten eine Progression mit dem Unterschiede $= 16$. Hieraus ergiebt sich eine für die numerische Berechnung von π vortheilhafte Zerlegung der beyden Reihen. Es ist nämlich

$$\pi = \frac{584}{343}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.7^4} + \frac{1}{9.11.7^8} + \frac{1}{13.15.7^{12}} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{768}{343}\left(\frac{1}{5.7.7^4} + \frac{2}{9.11.7^8} + \frac{3}{13.15.7^{12}} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{208}{27}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.9^2} + \frac{1}{9.11.9^4} + \frac{1}{13.15.9^6} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{256}{27}\left(\frac{1}{5.7.9^2} + \frac{2}{9.11.9^4} + \frac{3}{13.15.9^6} + \text{etc.}\right)$$

Diese Form von π ist zu der numerischen Berechnung sehr bequem, da die Potenzen von $\frac{1}{7^4}$ und $\frac{1}{9^2}$ durch die successive Division leicht gefunden werden, und schnell abnehmen. Die folgenden Formeln für π können auf eine ähnliche Art behandelt werden. Sie erfordern in dem zweyten Haupttheile von π zwar weniger Glieder; diese sind aber nicht so leicht zu berechnen, als in der hier entwickelten einfachsten Form für π. Herrn Vega's

Behandlung dieser Formeln ist von der meinigen etwas verschieden.

§. 6. Ferner zerlege man den halben Quadranten in fünf Theile, so daß Arc. $45° = 3A + 2B$. Es ist daher $1 - \text{tg } 3A = (1 + \text{tg } 3A) \text{ tg } 2B$. Man setze $\text{tg } A = t$; $\text{tg } B = u$, so ist

$$\text{tg } 3A = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}; \quad \text{tg } 2B = \frac{2u}{1 - u^2},$$

und

$$\frac{1 - 3t - 3t^2 + t^3}{1 + 3t - 3t^2 - t^3} = \frac{2u}{1 - u^2}.$$

Die Funktion von t heiße z, so ist

$$u^2 z + 2u - z = 0.$$

Damit u rational werde, wenn z rational genommen wird, muß $z^2 + 1$ ein Quadrat seyn, oder es muß t so genommen werden, daß

$$(1 - 3t - 3t^2 + t^3)^2 + (1 + 3t - 3t^2 - t^3)^2 = ff,$$

folglich daß

$$2(1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6) = ff,$$

oder daß $\quad 2(1 + t^2)^3 = ff$.

Demnach muß $2(1 + t^2)$ ein Quadrat seyn. Daher ist $t = \frac{1}{7}$, folglich $z = \frac{44}{117}$, und $u = \frac{2}{11}$, also

$$\text{Arc. } 45° = 3 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{2}{11}.$$

§. 7. Weiter zerlege man den halben Quadranten in sieben Theile, so daß Arc. $45° = 5A + 2B$.

Nun ist $1 - \text{tg } 5A = (1 + \text{tg } 5A) \text{ tg } 2B$, und

$$\text{tg } 5A = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10t^2 + 5t^4}, \text{ folglich}$$

$$\frac{1 - 5t - 10t^2 + 10t^3 + 5t^4 - t^5}{1 + 5t - 10t^2 - 10t^3 + 5t^4 + t^5} = \frac{2u}{1 - u^2}.$$

Die

Die Funktion von t heiße z, so ist

$$u^2 z + 2u - z = 0.$$

Damit u rational sey, wenn z rational ist, muß $z^2 + 1$ ein Quadrat seyn. Demnach muß

$$2(1 + 5t^2 + 10t^4 + 10t^6 + 5t^8 + t^{10}) = ff$$

oder $2(1 + t^2)^5 = ff$ seyn.

Wiederum muß also $2(1 + t^2)$ ein Quadrat seyn, und es ist, wie vorher, $t = \frac{1}{7}$ zu nehmen. Alsdann ist $z = \frac{237}{3116}$, und $u = \frac{3}{79}$, so daß

$$\text{Arc. } 45^\circ = 5 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{3}{79}.$$

§. 8. Es ist

$$\text{Arc. tg} \frac{3}{79} = \frac{56142}{79^3}\left(\frac{1.1}{1.3} + \frac{1.1}{5.7}\left(\frac{3}{79}\right)^4 + \frac{1.1}{9.11}\left(\frac{3}{79}\right)^8 + \frac{1.1}{13.15}\left(\frac{3}{79}\right)^{12} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{74784}{79^3}\left(\frac{1.1}{5.7}\left(\frac{3}{79}\right)^4 + \frac{1.2}{9.11}\left(\frac{3}{79}\right)^8 + \frac{1.3}{13.15}\left(\frac{3}{79}\right)^{12} + \text{etc.}\right)$$

Das Vierfache des Arc. tg $\frac{1}{7}$ ist in den beyden ersten Theilen des Werthes von π (§. 5.) enthalten. Multiplicirt man dasselbe mit 5, und Arc. tg $\frac{3}{79}$ mit 8, so erhält man in der Summe der Producte einen Werth von π, in welchem die beyden Reihen des zweyten Haupttheils sehr schnell convergiren.

§. 9. Setzt man die Zerfällung noch weiter fort, und nimmt Arc. $45^\circ = 7A + 2B$, so findet sich, daß $2(1 + t^2)^7$ ein Quadrat seyn muß, so daß auch hier $t = \frac{1}{7}$ zu nehmen ist. Es ist nun $-\frac{16124}{76443} = \frac{2u}{1 - u^2}$ und $u = -\frac{29}{278}$.

Daher ist

$$\text{Arc. } 45^\circ = 7 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} - 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{29}{278}.$$

§. 10. Leichter findet man die Reihe der Werthe von u, und zugleich das Gesetz ihrer Fortschreitung auf folgende Art.

Es sey $m \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tg } u = 45^\circ$,
und $(m + 2) \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tg } x = 45^\circ$,
so ist

$$\text{Arc. tg } \tfrac{1}{7} + \text{Arc. tg } x = \text{Arc. tg } u,$$

und $$\text{Arc. tg } x = \text{Arc. tg } u - \text{Arc. tg } \tfrac{1}{7}.$$

Daher $$x = \frac{7u - 1}{7 + u}.$$

§. 11. Es ist

$$\begin{aligned}
\text{Arc. tg } \tfrac{1}{7} &= 8^\circ\ 7'\ 48'',37 \\
\text{Arc. tg } \tfrac{1}{3} &= 18.\ 26.\ 5,\ 82 \\
\text{Arc. tg } \tfrac{2}{11} &= 10.\ 18.\ 17,\ 45 \\
\text{Arc. tg } \tfrac{3}{79} &= 2.\ 10.\ 29,\ 08 \\
\text{Arc. tg } \tfrac{29}{278} &= 5.\ 57.\ 19,\ 29.
\end{aligned}$$

Die Decimaltheile der Secunden sind aus dem großen Canon in dem Opere Palatino berechnet.

§. 12. Die obigen Gleichungen zwischen t und u ändern sich nicht, wenn man für t setzt $\frac{1}{t}$, und $\frac{1}{u}$ für u, indem beyde Theile derselben das Entgegengesetzte der vorigen Functionen werden.

Also ist

$$\begin{aligned}
\text{Arc. tg. } 1 &= \text{Arc. tg. } 7 + 2 \text{ Arc. tg. } 3 \\
&= 3 \text{ Arc. tg. } 7 + 2 \text{ Arc. tg. } \tfrac{11}{2} \\
&= 5 \text{ Arc. tg. } 7 + 2 \text{ Arc. tg. } \tfrac{79}{3} \\
&= 7 \text{ Arc. tg. } 7 - 2 \text{ Arc. tg. } \tfrac{278}{29}. \\
&= \text{etc.}
\end{aligned}$$

Es

Es ist nämlich

Arc. tg. 7 = 81° 52′ +
Arc. tg. 3 = 71. 34. +
Arc. tg. $\frac{11}{2}$ = 79. 42. —
Arc. tg. $\frac{79}{3}$ = 87. 50. —
Arc. tg. $\frac{278}{29}$ = 84. 2. +

so daß die erste Summe den Bogen 225°, die zweyte 405°; die dritte 585°, die vierte 405° giebt, deren Tangenten = + 1 sind.

Es ist

$90° - A + 2(90° - B) = 3.90° - A - 2B;$
$3(90° - A) + 2(90° - B) = 5.90° - 3A - 2B;$
u. s. f.

Ist $A =$ Arc. tg $\frac{1}{7}$; $B =$ Arc. tg $\frac{1}{3}$, so ist $A + 2B = 45°$, und $90° - A =$ Arc. tg. 7; $90° - B =$ Arc. tg. 3, also
Arc. tg. 7 + 2 Arc. tg. 3 = 3.90° − 45° = 180° + 45°
u. s. f.

§. 13. In den Gleichungen §. 4. bis 9. hat u auch einen negativen Werth, welcher wegen des gegebenen Gliedes 1 (nach der Division durch z) der umgekehrte von dem positiven ist. Daher ist

Arc. tg. 1 = Arc. tg $\frac{1}{7}$ − 2 Arc. tg 3 = − 135°
= 3 Arc. tg $\frac{1}{7}$ − 2 Arc tg $\frac{11}{2}$ = − 135°
= 5 Arc. tg $\frac{1}{7}$ − 2 Arc. tg $\frac{79}{3}$ = − 135°
= 7 Arc. tg $\frac{1}{7}$ + 2 Arc. tg $\frac{278}{29}$ = + 225°

Die Tangenten der negativen Winkel zwischen 90° und 180° sind positiv, so daß tg (− 135°) = + 1.

§. 14. Bey der Berechnung der Werthe von $z^2 + 1$ wird man auf die Bemerkung geleitet, daß die doppelten Producte je zweyer Binomialcoefficienten irgend einer Potenz, die von einem unter ihnen gleich weit abstehen, wechselsweise von dem Quadrate dieses letztern subtrahirt,

und

und zu demselben addirt, diesen Coefficienten selbst geben. Z. B. für die 12te Potenz sind die Coefficienten mit Einschluß der 1 folgende:

1; 12; 66; 220; 495; 792; 924; 792; etc.

Hier ist

$$495 . 495 - 2.220.792 + 2.66.924$$
$$- 2.12.792 + 2.1.495 = 495$$

und

$$220.220 - 2.66.495 + 2.12.792 - 2.1.924$$
$$= 220.$$

§. 15. Ein strenger Beweis dieses Satzes kann anfangs schwierig scheinen; er läßt sich aber dennoch auf folgende Art ganz leicht und allgemein geben:

Es seyen die Binomialcoefficienten der mten Potenz, mit der Eins, nach der Hindenburgischen Zeichnung (Arch. d. Math. Heft V. S. 162. Anm.)

$$1, {}^m\mathfrak{A}, {}^m\mathfrak{B}, {}^m\mathfrak{C}, {}^m\mathfrak{D}, \ldots {}^m\overset{-r}{\mathfrak{N}} \ldots {}^m\mathfrak{N} \ldots {}^m\overset{+r}{\mathfrak{N}}$$

so ist

$$(1+x)^m = 1 + {}^m\mathfrak{A}x + {}^m\mathfrak{B}x^2 + {}^m\mathfrak{C}x^3 + {}^m\mathfrak{D}x^4 + \text{etc}$$

und

$$(1-x)^m = 1 - {}^m\mathfrak{A}x + {}^m\mathfrak{B}x^2 - {}^m\mathfrak{C}x^3 + {}^m\mathfrak{D}x^4 - \text{etc}$$

folglich beyder Product $(1+x)^m . (1-x)^m$

das ist

$$(1-x^2)^m = 1 - {}^m\mathfrak{A}x^2 + {}^m\mathfrak{B}x^4 - {}^m\mathfrak{C}x^6 + {}^m\mathfrak{D}x^8 - \text{etc}$$

Durch die wirkliche Multiplication der ersten beyden Reihen erhält man aber

$$\begin{array}{lllll}
1 - {}^m\mathfrak{A}^2 x^2 + & {}^m\mathfrak{B}^2 \; x^4 - & {}^m\mathfrak{C}^2 \; x^6 + & {}^m\mathfrak{D}^2 \; x^8 & \ldots \\
+2\,{}^m\mathfrak{B} \, . & -2\,{}^m\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{C} \, . & +2\,{}^m\mathfrak{B}\,{}^m\mathfrak{D} \, . & -2\,{}^m\mathfrak{C}\,{}^m\mathfrak{E} \, . & \ldots \\
 & +2\,{}^m\mathfrak{D} \, . & -2\,{}^m\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{E} \, . & +2\,{}^m\mathfrak{B}\,{}^m\mathfrak{F} \, . & \ldots \\
 & & +2\,{}^m\mathfrak{F} \, . & -2\,{}^m\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{G} \, . & \ldots \\
 & & & +2\,{}^m\mathfrak{H} \, . & \ldots \\
 & & & & \ldots
\end{array}$$

Folg-

Folglich

$$
\begin{aligned}
&{}^m\mathfrak{A}^2 - 2\,{}^m\mathfrak{B} = {}^m\mathfrak{A}\\
&{}^m\mathfrak{B}^2 - 2\,{}^m\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{C} + 2\,{}^m\mathfrak{D} = {}^m\mathfrak{B}\\
&{}^m\mathfrak{C}^2 - 2\,{}^m\mathfrak{B}\,{}^m\mathfrak{D} + 2\,{}^m\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{E} - 2\,{}^m\mathfrak{F} = {}^m\mathfrak{C}\\
&{}^m\mathfrak{D}^2 - 2\,{}^m\mathfrak{C}\,{}^m\mathfrak{E} + 2\,{}^m\mathfrak{B}\,{}^m\mathfrak{F} - 2\,{}^m\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{G} + 2\,{}^m\mathfrak{H} = {}^m\mathfrak{D}\\
&\text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc}
\end{aligned}
$$

Zusatz des Herausgebers.

Für ${}^m\mathfrak{N}$, den allgemeinen nten Binomialcoefficienten (${}^m\mathfrak{A}$ als den ersten gerechnet) wäre

$$({}^m\mathfrak{N})^2 - 2\,({}^m\overset{-1}{\mathfrak{N}}\,{}^m\overset{+1}{\mathfrak{N}} - {}^m\overset{-2}{\mathfrak{N}}\,{}^m\overset{+2}{\mathfrak{N}} + {}^m\overset{-3}{\mathfrak{N}}\,{}^m\overset{+3}{\mathfrak{N}} \dots \dots \mp {}^m\overset{-n}{\mathfrak{N}}\,{}^m\overset{+n}{\mathfrak{N}}) = {}^m\mathfrak{N}$$

Hier ist ${}^m\overset{+n}{\mathfrak{N}}$ der $n+n=2$nte, und ${}^m\overset{-n}{\mathfrak{N}}$ der $n-n=0$te, das ist der vor dem ersten ${}^m\mathfrak{A}$ vorhergehende, Binomialcoefficient

$$\text{also } {}^m\overset{+n}{\mathfrak{N}} = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \dots (m-2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots\dots 2n}$$

$$\text{und } {}^m\overset{-n}{\mathfrak{N}} = 1 = {}^m\overset{-1}{\mathfrak{A}} = {}^m\overset{-2}{\mathfrak{B}} = {}^m\overset{-3}{\mathfrak{C}} = \text{etc}$$

wie aus den correspondirenden Werthen für n und $\mathfrak{N}$ folgt; denn

für $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ successive,
ist ${}^m\mathfrak{N} = {}^m\mathfrak{A}, {}^m\mathfrak{B}, {}^m\mathfrak{C}, {}^m\mathfrak{D}, \dots$ respective.

Setzt man also nach und nach ${}^m\mathfrak{A}, {}^m\mathfrak{B}, {}^m\mathfrak{C}, {}^m\mathfrak{D} \dots$ statt ${}^m\mathfrak{N}$, in obige Gleichung für ${}^m\mathfrak{N}$, so findet man ihre Werthe nach der Reihe, wie sie am Ende der Abhandlung von Herrn Prof. Klügel stehen.

Für jeden Werth von m und n, ist

$$
\begin{aligned}
(1 \pm x)^m &= 1 \pm {}^m\mathfrak{A}x + {}^m\mathfrak{B}x^2 \pm {}^m\mathfrak{C}x^3 + {}^m\mathfrak{D}x^4 \pm \dots\\
(1 \pm x)^n &= 1 \pm {}^n\mathfrak{A}x + {}^n\mathfrak{B}x^2 \pm {}^n\mathfrak{C}x^3 + {}^n\mathfrak{D}x^4 \pm \dots\\
(1 \pm x)^{m+n} &= 1 \pm {}^{m+n}\mathfrak{A}x + {}^{m+n}\mathfrak{B}x^2 \pm {}^{m+n}\mathfrak{C}x^3 + \dots\\
(1 \pm x)^{m-n} &= 1 \pm {}^{m-n}\mathfrak{A}x + {}^{m-n}\mathfrak{B}x^2 \pm {}^{m-n}\mathfrak{C}x^3 + \dots
\end{aligned}
$$

Aus

Aus diesen und ähnlichen Gleichungen lassen sich mancherley Relationen der Binomialcoefficienten ableiten. Z. B. wenn man die Reihe für $(1+x)^{m+n}$ mit dem Producte aus der Multiplication der beyden Reihen $(1+x)^m$, $(1+x)^n$ vergleicht, so findet man

$${}^{m+n}\mathfrak{A} = 1.{}^{n}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{A}.1$$
$${}^{m+n}\mathfrak{B} = 1.{}^{n}\mathfrak{B} + {}^{m}\mathfrak{A}\,{}^{n}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B}.1$$
$${}^{m+n}\mathfrak{C} = 1.{}^{n}\mathfrak{C} + {}^{m}\mathfrak{A}\,{}^{n}\mathfrak{B} + {}^{m}\mathfrak{B}\,{}^{n}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{C}.1$$
$${}^{m+n}\mathfrak{D} = 1.{}^{n}\mathfrak{D} + {}^{m}\mathfrak{A}\,{}^{n}\mathfrak{C} + {}^{m}\mathfrak{B}\,{}^{n}\mathfrak{B} + {}^{m}\mathfrak{C}\,{}^{n}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{D}.1$$

. . . . . .

. . . . . .

$${}^{m+n}\mathfrak{X} = 1.{}^{n}\mathfrak{X} + {}^{m}\mathfrak{A}\,{}^{n}\overset{-1}{\mathfrak{X}} + {}^{m}\mathfrak{B}\,{}^{n}\overset{-2}{\mathfrak{X}} + {}^{m}\mathfrak{C}\,{}^{n}\overset{-3}{\mathfrak{X}} + {}^{m}\mathfrak{D}\,{}^{n}\overset{-4}{\mathfrak{X}} \ldots$$
$$+ {}^{m}\overset{-2}{\mathfrak{X}}\,{}^{n}\mathfrak{B} + {}^{m}\overset{-1}{\mathfrak{X}}\,{}^{n}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{X}.1$$

Hier wird $\mathfrak{X}$, mit dem beygeschriebenen Exponenten, eben so für den allgemeinen xten, wie vorher $\mathfrak{N}$ für den nten Binomialcoefficienten gebraucht.

Daraus findet man ferner, für $n = m$,

$${}^{2m}\mathfrak{A} = 2\,{}^{m}\mathfrak{A}.1$$
$${}^{2m}\mathfrak{B} = 2\,{}^{m}\mathfrak{B}.1 + {}^{m}\mathfrak{A}^2$$
$${}^{2m}\mathfrak{C} = 2\,{}^{m}\mathfrak{C}.1 + 2\,{}^{m}\mathfrak{B}\,{}^{m}\mathfrak{A}$$
$${}^{2m}\mathfrak{D} = 2\,{}^{m}\mathfrak{D}.1 + 2\,{}^{m}\mathfrak{C}\,{}^{m}\mathfrak{A} + {}^{m}\mathfrak{B}^2$$
$${}^{2m}\mathfrak{E} = 2\,{}^{m}\mathfrak{E}.1 + 2\,{}^{m}\mathfrak{D}\,{}^{m}\mathfrak{A} + 2\,{}^{m}\mathfrak{C}\,{}^{m}\mathfrak{B}$$

u. s. w. f.

So lassen sich Binomialcoefficienten vom Exponenten m, und ihre Verbindung, durch Binomialcoefficienten vom Exponenten 2 m, und umgekehrt diese durch jene, ausdrücken. Lieset man diese Reihen **rückwärts**, so wechseln in den **Anfangsgliedern**, **Quadrate** der einzelnen Coefficienten von Exponenten m, mit **Producten** jeder zween **nächsten** Coefficienten regelmäßig ab. Das giebt zween verschiedene Sätze folgenden Inhalts:

„Für

„Für die Binomialcoefficienten nach der Reihe

$$1,\ {}^{m}\mathfrak{A},\ {}^{m}\mathfrak{B},\ {}^{m}\mathfrak{C},\ {}^{m}\mathfrak{D},\ {}^{m}\mathfrak{E},\ {}^{m}\mathfrak{F} \ldots$$

„ist:

„1) Das Quadrat des nten (jedes willkührlich ge-„wählten) Binomialcoefficientens vom Exponenten m, nebst „der doppelten Summe aller Producte aus jedem Paare, „vom nten zu beyden Seiten gleichweit abstehenden Coef-„ficienten — gleich dem 2 nten Coefficienten vom Exponen-„ten 2 m.“

„2) Die doppelte Summe aller Producte, des „(n — 1)ten und nten (jeder zween nächsten, willkührlich „gewählten) Binomialcoefficienten vom Exponenten m, „nebst aller übrigen, vom (n — 1)ten und nten zu bey-„den Seiten gleichweit abstehenden, Paare von Coefficien-„ten — gleich dem (2 n — 1)ten Coefficienten vom Expo-„nenten 2 m.“

Beyde Sätze lassen sich gleichwohl durch nachstehenden combinatorischen Ausdruck kurz zusammenfassen

$$ {}^{2m}\mathfrak{N} = 2\,{}^{m}\mathfrak{N}.\,1 + b\,{}^{n}B \begin{pmatrix} 1, & {}^{m}\mathfrak{A}, & {}^{m}\mathfrak{B}, & {}^{m}\mathfrak{C}, & {}^{m}\mathfrak{D}, & {}^{m}\mathfrak{E} \ldots \\ \cdot & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots \end{pmatrix} {}^{*)} $$

Dar-

*) Es ließe sich zwar die Gleichung für ${}^{2m}\mathfrak{N}$ noch kürzer durch

$$ {}^{2m}\mathfrak{N} = b^{n+1}B \begin{pmatrix} 1, & {}^{m}\mathfrak{A}, & {}^{m}\mathfrak{B}, & {}^{m}\mathfrak{C}, & {}^{m}\mathfrak{D} \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots \end{pmatrix} $$

ausdrücken; aber da würden, nach dem hier beygefügten Zeiger, die Binomialcoefficienten anders gezählt, als ich sie im combinatorischen Calcul bisher immer gezählt habe und nothwendig habe zählen müssen, wenn diese Coefficienten mit den Variations- und Combinations-Classen, mit denen sie am häufigsten zusammengesetzt werden, vollkommen harmoniren sollten. Ich nenne (nicht 1 sondern) ${}^{m}\mathfrak{A}$ den ersten Binomialcoefficienten, weil seine Zahl die erste ist, die sich auf m bezieht (die erste durch m ausgedrückte) so wie die folgenden, nach einem allen gemeinschaftlichen Gesetze, gleichfalls durch m gegeben sind. Daher ist 1 (der gemeinschaftliche Anfang dieser Coefficienten für alle Exponenten) bey mir der 0te (der vor dem ersten vorhergehende) Coefficient. Wollte man die Binomialcoefficienten so zählen, wie hier im Zeiger, so würde das auch Einfluß auf den Ausdruck der obigen beyden Sätze haben; u. s. w.

Daraus folgt, $n = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ nach und nach gesetzt:

$$
\begin{aligned}
{}^{2m}\mathfrak{A} &= 2^{m}\mathfrak{A}.\, 1 + 0 \\
{}^{2m}\mathfrak{B} &= 2^{m}\mathfrak{B}.\, 1 + b^{2}B \\
{}^{2m}\mathfrak{C} &= 2^{m}\mathfrak{C}.\, 1 + b^{3}B \\
{}^{2m}\mathfrak{D} &= 2^{m}\mathfrak{D}.\, 1 + b^{4}B \\
{}^{2m}\mathfrak{E} &= 2^{m}\mathfrak{E}.\, 1 + b^{5}B \\
\text{u.} & \quad \text{s.} \quad \text{w.}
\end{aligned}
$$

deren combinatorische Auflösung die obigen Formeln, wie sie (S. 318) stehen (also **vorwärts** gelesen) giebt.

Man kann auch einen von den beyden Exponenten, m oder n, in Zahlen bestimmen, den andern unbestimmt lassen (Töpf. comb. Anal. S. 166—169.); auch polynomische Wurzeln, wie hier binomische, zum Grunde legen; nicht minder mehrerer Reihen (als zwey) Verbindung dabey in Betrachtung ziehen u. s. w. Will man die Gesetze, nach welchen sich diese Coefficienten zusammensetzen, kurz darstellen, so drückt man sie (bey großen Verwickelungen ist das um so nöthiger) durch **Variations- oder Combinationsclassen** aus. Die Absicht ist hierbey durchgängig, zusammengesetzte Größen dieser Art durch einfache auszudrücken; wodurch die combinatorisch-analytischen Formeln, und das von ihnen abhängige Verfahren für die Endresultate, nicht selten äußerst simplificirt werden. Ein sehr eminentes Beyspiel dafür giebt die combinatorische Reversionsformel für Reihen.

Hindenburg.

V.

V.

Ueber verschiedene merkwürdige Bewegungen, welche ein doppelter Kegel vermöge der Schwere darstellt, wenn er auf die Ränder zweyer in einem Winkel zusammenlaufender Wände eines Kanals gelegt wird. Von C. L. Brünings, zu Utrecht.

Die Geometrie wird wegen der vorzüglichen Deutlichkeit und Gewißheit ihrer Lehren gepriesen. Der Grund hievon ist einleuchtend. Der Geometer betrachtet nur die Werke seiner eigenen Schöpfung; er hat nicht nöthig, die Möglichkeit ihres Daseyns außerhalb dem Verstande zu erproben. In seinem Verstande aber sind sie nebst allen ihren Eigenschaften (welche leztere nur eine Entwickelung der Vorstellung ihres Daseyns sind) möglich, weil er sie als möglich denkt. — Ganz anders verhält es sich mit der angewandten Größenlehre; ihren Lehren ist bey weitem der Grad von Deutlichkeit und Gewißheit nicht eigen. Auch hievon läßt sich die Ursache leicht angeben. Zwar braucht der Physikomathematiker auch nicht das Daseyn seiner Gegenstände darzuthun; die Natur liefert sie ihm. Aber er muß sich zuvor eine richtige Kenntniß derselben erwerben; das heißt: er muß in seinem Verstande ein Wesen bilden, das dem, außerhalb des Verstands vorhandenen, ähnlich ist. In so fern er nun die Größenlehre auf das Bild des Gegenstandes im Verstande anwendet, sind alle seine Untersuchungen eben so deutlich, eben so gewiß als jene des Geometers. Sobald er aber das Bild mit dem Gegenstande verwechseln will; von diesem behaupten, was von jenem erwiesen ist,

muß er überzeugen: daß seinem Bilde der außerhalb des Verstands existirende Gegenstand in der That ähnlich ist, und da wird ihm der Trug der äußeren Sinne allenthalben im Wege stehn. — So nachtheilig diese Bemerkungen auch überhaupt der angewandten Mathematik, als Wissenschaft, sind; so vortheilhaft sprechen sie für meine dermalige Absicht, weil sie, mit andern Worten, den Satz enthalten: „daß physikomathematische Untersuchungen desto deutlicher, desto gewisser sind, sich der geometrischen Strenge desto mehr nähern werden, je minder der Trug der äußeren Sinne irre führen kann" — und dieser Aufsatz gerade verschiedenen merkwürdigen Bewegungen eines Körpers gewidmet ist, die auf eine äußerst einfache Weise veranstaltet werden können. —

Der berüchtigte Versuch mit dem scheinbar freywillig steigenden doppelten Kegel hat mich veranlaßt, dieser Materie nachzudenken. Derselbe kömmt unter diesen allgemeinen Betrachtungen vor als Art des Geschlechts. — So wie die Naturlehre sich in den meisten Fällen begnügt, die allgemeinen Ursachen einer Erscheinung anzugeben, und es der angewandten Mathematik überläßt, die Größe jener Ursachen zu erforschen, kann sie doch für diesen Fall hiemit nicht auskommen. Denn die gewöhnliche Erklärung jenes Versuchs, aus dem Sinken des Schwerpunkts während der Bewegung des Doppel-Kegels, scheint mir eine sehr unvollständige Deduction zu seyn: weil man sich durch den Augenschein jedesmal nur für eine bestimmte Lage des Kegels nach vollendeter Bewegung vergewissern kann, daß sein Schwerpunkt, in Absicht auf dessen Lage beym Anfange der Bewegung, gesunken ist; hieraus aber folgt keineswegs, daß er nimmer während der Bewegung gestiegen seyn kann; — und diesem Einwurfe mit dem Satze vorzubeugen: „daß der Schwerpunkt eines Körpers nicht steigen könne" das wäre eine petitio principii

cipii für einen Fall, da man gerade erst untersuchen soll: ob das paradoxe Steigen des doppelten Kegels auch etwa jenem Satze widerspricht. — Es ist fürwahr nicht zu verwundern, daß die reine Naturlehre in allen den Fällen unzureichend ist, wo die Richtigkeit der Grundsätze, deren sie sich zur Erklärung einer Erscheinung bedient, bezweifelt wird, so, wie für diesen Fall statt findet. — Die Mathematiker (Kraft in Comment. Nov. Petrop. T. VI. und A. Kononow in Act. Nov. Petrop. 1789. T. VII. welcher letztere auch den Widerstand der Reibung betrachtet hat) in ihren Untersuchungen über diesen Gegenstand haben erstlich erwiesen: daß für jede Lage des Kegels eine drehende Kraft vorhanden ist, die denselben um die beyden Unterlagen wälzt, und zweytens, wie groß besagte Kraft ist. Nun ist die drehende Kraft nichts anders als die Schwere, modifizirt durch die Lage des Kegels. Sie ist derohalben eine Function gedachter Schwere und Lage; weil aber die Schwere eine beständige Größe ist, so bleibt die drehende Kraft eine Function der Lage, und die Lage eine Function der drehenden Kraft; — daher Bestimmungen der drehenden Kraft aus der gegebenen Lage, und umgekehrt, Bestimmungen der Lage aus dem willkührlich angenommenen Werthe der drehenden Kraft. — So weit geht die bisherige Theorie des mehrerwähnten Versuchs, meines Wissens, die fürwahr völlig zureicht, die Nothwendigkeit der erfolgenden Bewegungen aus den allgemeinsten Grundsätzen der Mechanik zu erkennen, und einzusehn, wie für eine gegebene Lage die Größe der drehenden Kraft berechnet werden könne. Auch ist es klar, daß, wenn die drehende Kraft = 0 gefunden wird, alsdann keine Bewegung erfolgen könne. — Der Grundsatz, daß der Schwerpunkt eines Körpers jederzeit, wenn er nicht gehindert wird, den niedrigsten Ort einnehmen wird, ist so allgemein anerkannt, als er fruchtbar ist. Derselbe ist das κριτηριον, nach welchem alle

Bewegungen beurtheilt werden müssen, welche allein aus der Schwerkraft, ohne Zuthun einer andern Kraft, entspringen. Wenn man nämlich Bewegungen fingirt, welche unter gewissen Bedingungen durch die Schwere bewürkt werden sollen, und deren Möglichkeit und Nothwendigkeit darthun will, muß man erweisen: daß der Schwerpunkt des zu bewegenden Körpers, während der Bewegung sinken wird. Uebrigens versteht es sich von selbst, daß die Reibung und der Widerstand der Luft hier nicht betrachtet werden. — Mit Hülfe dieses Grundsatzes werd' ich von dergleichen Bewegungen, die einfachste aus einem sehr merkwürdigen Geschlechte abhandlen. — Durch zwey in einem Winkel zusammenlaufende Seitenwände wird ein Kanal gebildet. Legt man nun auf dergleichen Kanäle im Scheitel einen doppelten Kegel, der also in einem Punkte des Umkreises von erwähnten Kegels Grundfläche, durch den Scheitel des besagten Kanals gestützt wird, — so ist die Frage: wird die Schwere dem doppelten Kegel eine fortrollende Bewegung über die Ränder der Seitenwände des Kanals mittheilen? — Der besagte Kanal wird verschieden seyn, je nachdem seine Wände

A Ebenen, oder } und deren Ränder *A* wagerecht
B krumme Flächen } oder *B* geneigt sind.

1. Für A und *A* sind die Ränder wagerechte gerade Linien.

2. Für B und *A* sind dieselben wagerechte krumme Linien.

3. Für A und *B* sind es geneigte Linien.

4. Für B und *B* sind es doppelt gekrümmte Linien.

I. Aus 2 werd' ich 1 ableiten, indem ich anstatt der Gleichung für eine Curve, jene für die gerade Linie substituire.

II. Wenn

II. Wenn für 3 und 4 die Ränder, vom Scheitel des Kanals anzurechnen, unter den Horizont geneigt sind, kann die zu erfolgende Bewegung des doppelten Kegels zu deutlich aus dem bereits angeführten Grundsatze abgeleitet werden, als daß er mir einer nähern Untersuchung werth schien.

III. Wenn für 3 die Ränder, vom Scheitel an aufwärts, geneigt sind, werd' ich, um der mühsamen Rechnung willen, die Aufgabe nur für den Fall auflösen, da die Neigung des Rands beständig ist, das heißt: wenn er eine gerade Linie ist.

IV, 4. Die doppelt gekrümmten Linien erfodern einen zu weitschweifigen Calcul, als daß ich diesen Fall hier abhandeln könnte.

I.

(Fig. 1.) Wenn a p, p c, die wagerechten Ränder der lothrechten Wände des Kanals a p c sind; wenn e l f der vertikale Schnitt der Hälfte eines gedoppelten Kegels ist, so daß g der Schwerpunkt des doppelten Kegels, e f = 2 e g = 2 R desselben Höhe, g l = r der Halbmesser seiner Grundfläche; h m k die wagerechte Durchschnittslinie des Kegels mit der Fläche a p c; h, k, die Punkte, in welchen besagter Kegel von den Rändern des Kanals p a, p c gestützt wird; e h m k f g der über die Ränder hervorragende Theil des Kegels; dagegen der Theil h m k l h unterhalb denselben; — so bestimme man die Bahn des Schwerpunkts g (oder jene des untersten Punkts l, die gleichlaufend und gleich an die Bahn des Schwerpunkts ist) mittlerweile der doppelte Kegel sich von p nach a c fortwälzt. — Eine merkwürdige Eigenschaft dieser Bewegung ist die: 1°. die krumme Linie a h p und die Seite des Kegels a h l haben einerley Ordinate h m = y. 2°. Die Linie a h p und die Bahn des Punkts l (wel-

l (welche letztere durch die Coordinaten ml $= x$ und mp $= x$ bestimmt wird) haben einerley Abscisse pm $= x$.
3°. Die Seite des Kegels ehl hat ml $= x$ zur Abscisse, und dieselbe x ist Ordinate für die Bahn des Punkts l. — Ferner ist für die Seitenlinie des Kegels ehl

$$\left.\begin{array}{l} lm : mk = lg : ge \\ x : y = r : R \end{array}\right\} x = \frac{r}{R} \cdot y.$$

Aber x als Ordinate der Bahn des Punkts l ist eine Funktion der Abscisse x, daher $x = F.x$, folglich $x = \frac{r}{R} y = F.x$. Hieraus erhellt, wie aus der Gleichung zwischen y und x für die Linie pha, $\frac{r}{R} y = Fx$ durch x bestimmt werden kann, woraus $x = F.x$ oder die Gleichung für die Bahn des Punkts l entspringt: und umgekehrt, wenn $x = Fx$, oder die Gestalt der Bahn des Punkts l als bekannt vorausgesetzt wird, erhält man $y = \frac{R}{r}.F.x$ oder die Gleichung für ahp.

Beyspiele: a) wenn ahp eine gerade Linie ist, und derohalben $y = \alpha x$, so wird $\frac{r}{R} y = \frac{r}{R} \alpha x = x$, und die Bahn des Punkts l ist also eine unter den Horizont geneigte gerade Linie. Die Tangente ihres Neigungswinkels ist $\frac{r.\alpha}{R}$.

b) wenn ahp eine Parabel ist, und derohalben $y = \beta x^2$, $\frac{r}{R} y = \frac{r}{R}.\beta x^2 = x$, so ist die Bahn des Punkts l ebenfalls eine Parabel, deren Parameter $\frac{r\beta}{R}$; und ihre Aussenseite gegen die Abscissenlinie pm gekehrt.

c) (Fig.

c) (Fig. 2.) Wenn die Bahn des Punkts l die Linie des geschwindesten Falls ist; p der Anfangspunkt der Radlinie, f′ ihr Scheitel, $cf' = 2a$ der Durchmesser des sie erzeugenden Kreises; π das Verhältniß des Umkreises zum Durchmesser, so ist, gemäß der Natur der Radlinie, $pc = a\pi$ = der Hälfte des Umkreises von dem sie erzeugenden Kreise; es sey übrigens $f'g = u$, so wird $gl = \sqrt{2au - u^2} + \text{Arc. Sin. Vers } u$, also $lm = pc - lg = a\pi - (\sqrt{2au - u^2} + A. \int V. u)$, und weil $pm = x = cf' - f'g = 2a - u$, wird $u = 2a - x$, und $lm = x = a\pi - (\sqrt{2ax - x^2} + A. \int V(2a - x)) = \frac{r}{R} y$, $y = \frac{R}{r}. lm$. Zufolge dieser Gleichung läßt sich die Linie pha auf eine sehr einfache Weise construiren. Zu dem Ende drehe man die vertikale 2te Figur (ich nenne sie vertikal, weil die Bahn des Punkts l, plf′ in derselben gelegen ist) um die Achse pm oder pm (Fig. 1.) so, daß sie in der Horizontalfläche apc (Fig. 1.) liege. In der Lage wird die Linie ml mit der Richtung der Ordinate mh übereinkommen: diese ml nun vergrößere man $\frac{R}{r}$ mal, mache $mh = \frac{R}{r}. ml$, und verzeichne durch die dergestalt bestimmten Punkte h die Linie pha. — Zu diesen Beyspielen gehören noch einige Bemerkungen:

1°. Die allgemeine Formel $x = \frac{r}{R}. y = Fx$ zeigt, daß in allen möglichen Fällen Bewegung erfolgen wird für die wagerechten Ränder eines Kanals.

2°. Man würde irren, wenn man daraus, daß x die Ordinate der Bahn des Punkts l zu jener der Linie ph y, für gleiche Abscissen x, eine beständige Verhältniß $\frac{r}{R}$ hat, — ableiten wollte, daß beyde Linien ähnlich seyn müssen.

müssen. Obwohl die zwey ersten der angeführten Beyspiele diese Behauptung zu bestätigen scheinen, so erhellt doch aus dem dritten Beyspiele zur Genüge, daß jene Vermuthung allerdings ungegründet ist.

3°. In der Voraussetzung, daß die Höhe des Kegels dem Halbmesser seiner Grundfläche gleich ist, wird r = R und $x = y = Fx$. Nun ist die Bahn des Punkts l der Linie pha ähnlich und gleich.

III.

(Fig. 3.) ap, pc, sind die geraden Ränder lothrechter Seitenwände eines Kanals apc, sie sind gegen die wagerechte Fläche npq dieses Papiers geneigt. Der doppelte Kegel liegt mit den Punkten h, k auf besagten Rändern; hk ist die Durchschnittslinie desselben mit der schiefen Fläche apc; ehkfg oberhalb der schiefen Fläche apc, und hmkl unterhalb derselben befindlich. Zieht man in der Fläche apc die Abscissenlinie pm, die den Winkel apc halbire, so ist, wie zuvor, $y = \frac{R}{r} x$ die Ordinate für die Seitenlinie des Kegels ehl und den schiefen Rand ahp. Ueberdas ist für die gerade Linie ahp, $y = cx$, wenn pm, wie zuvor, = x ist. Also wird $\frac{R}{r} x = cx$, $x = \frac{cr}{R} x$. Weil nun für diesen Fall die Fläche apc geneigt ist; obwohl ml = x vertikal bleibt, so ist x nunmehr nicht mehr lothrecht auf pm, sondern schief gegen diese Abscissenlinie, und $x = \frac{rc}{R} . x$ ist die Gleichung zwischen den schiefen Coordinaten x und x für die Bahn des Punkts l. Diese Bahn ist in allen Fällen eine gerade Linie. Jedoch, wenn dieselbe vom Scheitel an aufwärts geneigt wäre, könnte keine Bewegung erfolgen:

man

man muß derohalben die Bedingungen bestimmen, für welche sie vom Scheitel an unter den Horizont geneigt ist, damit Bewegung erfolge: Zu dem Ende lege man durch $pp'ml$ eine Vertikalfläche bps (Fig. 4.); ferner durch den Punkt p eine wagerechte Linie ps, so ist rl die Tiefe des Punkts l unter dem Horizont $= x - x.\text{Sin}\,\alpha = \frac{rc}{R}.x - x\ \text{Sin}\,\alpha = x\left(\frac{rc}{R} - \text{Sin}\,\alpha\right) = z$, wenn $rl = z$; weil $pr = u = x\cos\alpha$, so wird $x = \frac{u}{\cos\alpha}$, und

$$z = \frac{u\left(\frac{rc}{R} - \text{Sin}\,\alpha\right)}{\cos\,\alpha}.$$

Dieß ist die Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten, z, u, für die Bahn des Punkts l, und so lange $\text{Sin}\,\alpha < \frac{rc}{R}$ ist, muß allerdings Bewegung statt finden, weil die Tiefe, zu welcher der Schwerpunkt des Kegels während der Bewegung herabsinkt, einen bejahenden Werth erhält. Es sey der Winkel $apm = \beta$, so ist $c = \text{tang}.\,\beta$ (weil $y = cx$), also muß $\text{Sin}\,\alpha < \frac{r}{R}\text{tang}\,\beta$ seyn. Wenn $r = R$, muß $\text{Sin}\,\alpha < \text{tang}\,\beta < \frac{\text{Sin}\,\beta}{\cos.\,\beta}$, folglich $\text{Sin}\,\alpha < \frac{\sqrt{1 - \cos.\,apc}}{\sqrt{1 + \cos.\,apc}}$ seyn.

Foderungssätze. 1. So wie ein jeder nach einer bestimmten Linie ausgebildete geneigte Kanal dazu dient, einem schweren Körperchen den Weg vorzuschreiben, längst welchem es sich dem Mittelpunkte der Erde nähern muß, — eben so kann man die Ränder der Kanäle, über welche sich der doppelte Kegel fortwälzt, als Hülfsmittel betrachten,

die dem Schwerpunkte des Kegels eine bestimmte Laufbahn vorzeichnen, längst welcher sich derselbe dem Mittelpunkte der Erde nähere. 2. So wie die Gefährden der fortschreitenden Bewegung, Geschwindigkeit und Zeit, im ersten Falle jedesmal von der Gestalt des Kanals abhängen, und gänzlich unabhängig sind von der drehenden Bewegung des schweren Körperchens: — eben so kann man auch für den letzten Fall die fortschreitende Bewegung des doppelten Kegels, in dessen Schwerpunkt concentrirt, mit Hülfe der Bahn des Schwerpunkts ausmessen, ohne daß die drehende Bewegung des Kegels den mindesten Einfluß auf jene Ausmessungen hat. — Man kann demnach nach der bereits angewiesenen Verfahrungsart (I, III) anzeigen:

1) wann und warum Bewegung statt finden muß;

und durch die gewöhnlichen phoronomischen Lehren bestimmen:

2) wie groß die Geschwindigkeit und Zeit bey dergleichen Bewegungen ist.

Folglich wird der Punkt l (Fig. 2.) gleichzeitig den Scheitel f′ der Tavtochrone p l f′ erreichen, ob die Bewegung des Kegels von l aus, von p aus oder von jedem andern Punkte derselben beginne. Von p aus wird der Punkt l in f′ eine Geschwindigkeit erlangt haben, die der Tiefe $pc = a\pi$ entspricht, mit welcher er längst der andern Hälfte der Radlinie, f′ l′ p′, steigen wird; das heißt: mittelst welcher der doppelte Kegel sich über die Ränder des Kanals von a c nach dem entgegengesetzten Scheitel p′ fortwälzen wird; wo er sich wiederum gerade in denselben Umständen befindet als in p, und dergestalt seine rollende Bewegung unablässig fortsetzt, so daß alle seine wechselseitigen Gänge von gleicher Dauer sind. — Vielleicht dürften die Bewegungen eines doppelten Kegels, aus diesem

Gesichtspunkte betrachtet, für die Anwendung nicht
unnütze seyn; denn obwohl der Umstand, daß bey
gewöhnlichen Versuchen mit schweren längst krummen
älen gleitenden kleinen Kugeln, diese Körperchen nicht
schwere Punkte seyn können, keine Veränderung in
cht auf die fortschreitende Bewegung bewürken kann,
sich der Schwerpunkt der kleinen Kugel allerdings
iner mit dem Kanale gleichlaufenden Bahn bewegt,
also die nämlichen Gesetze befolgt, als wenn er un-
elbar längst dem Kanale glitte; — so wird doch die
elmäßigkeit jener Bewegungen dadurch gestört, daß
kleine Kugel, jedesmal nur in einem Punkte vom Ka-
gestützt, außer der drehenden Bewegung um eine
erechte Axe (die lothrecht auf der Vertikalfläche des
als steht) von welcher die fortschreitende Bewegung
gens ganz unabhängig ist, — daß die kleine Kugel,
ich, außer jener drehenden Bewegung, noch gerin-
Abweichungen seitwärts unterworfen ist (gleichwie
r Körper, dessen Schwerpunkt nur in einem Punkte
erstützt ist) die natürlicher Weise für die fortschrei-
de Bewegung nicht gleichgültig sind; obwohl diesel-
an beyden Seiten durch die Ränder des Kanals ein-
hränkt werden. — Diese Abweichungen nun wer-
mittelst des doppelten Kegels völlig vermieden, des-
Schwerpunkt nicht in einem Punkte nur gestützt
sondern jedesmal in zween Punkten, in gleicher
tfernung vom Schwerpunkte, auf den Rändern des
nals aufliegt.

VI.

VI.

Jungenickels Vorschlag, den Kreis vermittelst des senkrechten Cylinders zu rectificiren; dargestellt von A. G. Kästner.

---

1) Auf der krummen Fläche eines solchen Cylinders, beschreibe man eine krumme Linie, die mit jeder Seite des Cylinders Winkel von 45 Graden macht.

2) Zwischen den zween Punkten, wo diese krumme Linie in eine und dieselbe Seite einschneidet, ist das Stück der Seite, so lang als der Umfang der Grundfläche des Cylinders.

3) Von einem rechtwinklichten gleichschenklichten Dreyecke, dessen Grundlinie sich um den Umfang der Grundfläche des Cylinders legen ließe, gäbe die Hypotenuse, erwähnte krumme Linie als Schraubengang. Die Höhe des Schraubenganges wäre der Grundlinie des Dreyeckes, oder dem Umfange der Grundfläche des Cylinders gleich, und diese Höhe ist das genannte Stück der Seite.

4) Das lehret Jungenickel, Schlüssel zur Mechanica; (Nürnb. 1661;) 193. §. 289. S., und meynt, man könne das beym Krummgerademachen ja so wohl brauchen, als die zusammengeflickte Quadraticem, mit welcher doch Schwenter weidlich pranget. Und wenn man des Winkels von 45 Graden, Hälfte, Viertheile u. s. w. braucht, bekömmt man Hälfte, Viertheile u. s. w. des Umfanges.

5. Nur hat Jungenickel nicht gezeigt: wie man um einen Cylinder eine krumme Linie zieht, die mit jeder

Seite

Seite des Cylinders einen und denselben gegebenen Winkel macht?

Es wäre eine Loxodromie auf einer cylindrischen Erde.

6) Gleichwohl thut Jungenickel, als wenn die Mechaniker das sehr in der Uebung hätten: „Wir reissen auf der Spindel der Länge nach eine Lineam, die mit dem Schraubenfuß zweene rechte Winkel macht, solcher einen Winkel theilen wir in zweene gleiche Theile mit einer Linea, die da um die Spindel herum laufe, das ist, die sich gleich einer Schrauben-Linea hinauf windet.“

7) Jungenickels Buch, ist ein Gespräch zwischen einem Ingenieur, der in Strasburg und Altdorf studirt hat, und einem Mechaniker, nämlich Jungenickel selbst. Der Ingenieur zeigt gar nichts von der Fähigkeit der Seele, von der er den Titel hat, und, so unvollkommen auch in angewandter Mathematik und Naturlehre, der damalige Universitätsunterricht gewesen seyn mag, scheint es mir doch, er hätte mehr lernen können, und gegen den Mechaniker eine bessere Figur machen. Er lernt vom Mechaniker, die ersten Lehren vom Hebel und den einfachen Rüstzeugen. In so vielen alten Fortifications-büchern wird doch schon von Maschinen gehandelt, daß ein Ingenieur das wohl hätte wissen sollen. Weil aber ein Mechaniker das Buch geschrieben hat, so ist die Schilderung des Studirten vielleicht so gerathen, wie nach dem Gedanken jenes Löwen, Kämpfe zwischen Löwen und Menschen vorgestellt würden, wenn Löwen Mahler wären. Hie wäre doch natürlich zu fragen: Wie reisset ihr denn diese Lineam? Des rechtwinklichten Dreyecks Grundlinie muß sich um des Kreises Umfang

fang legen lassen, also kann man sie nicht eher zeichnen, bis man schon die Länge des Umfangs weiß.

8) Unter den unzähligen verunglückten Vorschlägen, den Kreis zu rectificiren, verdient dieser wohl immer noch mit aufbewahrt zu werden, weil er weiter keine Fehler hat, als die, daß er das Verlangte gäbe, wenn man ihn ausführen könnte, ohne das Verlangte schon zu haben. Auch sieht die Analyse, durch die J. darauf kömmt, spitzfündig genug aus: „Weil rund und gerade zwey widerwärtige Dinge sind, ... und doch mit einander verbunden sind, so bleibt ein jedes in seiner eignen Art. Darum, wenn man eine cirkelrunde Lineam, oder eine cirkelrunde Fläche in eine gerade verwandeln will, so muß man es nicht auf dem flachen Papier verrichten, oder auf einer andern geraden Fläche, sondern es gehört eine solche Fläche dazu, die zugleich beydes hat, als, die da rund und auch lang ist, allerdings wie ein Cylinder oder Schraubenspindel."

VII.

Die Kettenregel; vor Graumann.

In der kaufmännischen Rechenkunst, wird Graumann gewöhnlich für den Erfinder der Kettenregel angegeben. Der Mathematiker kann das nicht anders verstehn, als daß Gr. sie etwa zuerst auf erwähnte Rechnungen angewandt habe. (Meine Fortsetzung der Rechenkunst, 1. Kap. 3. Abschn. 27 u. f. S.) Im 1. Th. der neuen auserlesenen arithmetischen Geldtabellen ... von J. P. Graumann, 2. Ausg. Hamb. 1734. sagt Gr.: Er habe die

Ket-

Kettenregel oder Conjointe zu Hamburg zuerst bekannt gemacht.

Die Hamburger Rechenmeister, denen diese Regel allerdings neu war, hätten sie gleichwohl seit dem Anfange des Jahrhunderts aus einem holländischen Rechenbuche lernen können: De vernieuwde Cyfferinge van Mr. *Willem Bartjens* ... vermeerdert ende verbetert door Mr. *Jan van Dam*. En nu in desen laatsten Druk ... door *Willem Koolenkamp*. Utrecht 1705. 8. 192 Seiten.

Da steht 176. S.: Den Regel conjoinct, of t'Samengevoegden Regel, anders Regel van Vergelijkinge

Ist die Kettenregel, auch mit einem der Namen, die Gr. ihr giebt, auf Vergleichungen von Maaßen, Gelde u. s. w. durch Zwischenverhältnisse angewandt, wobey auch gezeigt ist, wie die Rechnung durch Regeln Detri geführt würde.

Sie wird auch da nicht für neu ausgegeben, und muß also schon seyn in der Kaufmannsrechnung gelehrt worden.

Ihrem Namen nach sollte man vermuthen, daß sie aus Frankreich abstamme. Graumann veranlaßte bey mir diesen Gedanken nicht, weil die Deutschen gern alles französisch nennen, wenn gleich Frankreich manchmal so wenig davon weiß, als von vielen französisch benahmten Moden. Der Holländer aber ist gewohnt, selbst Kunstwörter in seine Sprache zu übersetzen, denen der Deutsche die Spuren ihres Ursprungs läßt. Es ist also zu vermuthen, daß er vom Franzosen gelernt hat, was er französisch benennt. Die Benennung von der Kette könnte allenfalls Graumanns seyn.

A. G. Kästner.

VIII.

VIII.

Was ist Schünzeug?

Ein mathematisches, in allen großen Bergwerken bräuchliches und also genanntes Instrument, womit man die Bergwerke abschünet, d. i. abmißt.

Frh. Valvasor, Ehre des Herzogthums Crain. (Laybach 1689. Fol.) 1. Th. 4. B. 12. C. 554. S.

Der Freyherr erzählt: „er habe 1685, mit solchem Schünzeuge die beyden Seen, den bey Kumpel und den bey Podpetschio, welche eine Meilwegs von einander liegen, mit großer Mühe abgeschünet, und befunden, daß beyde Seen just unter einem Horizont liegen."

Es muß also eine Art von Wasserwaage seyn. Mir ist der Name in dem, was ich auch von großen Bergwerken gelesen habe, nicht vorgekommen, auch finde ich ihn in Frischens und Adelungs Wörterbüchern nicht. Es muß also ein Provinzialname seyn, wie selbst das Zeitwort abschünen.

A. G. Kästner.

IX.

Auszüge und Recensionen neuer Bücher.

1. Disquisitiones analyticae, maxime ad Calculum Integralem et Doctrinam Serierum pertinentes. Auctore *Io Frider. Pfaff*, Prof. Math. P. O. in Vniv. litt. Helmstad. Acad. Sc. Imp. Petrop. et Soc. Reg. Sc. Gotting. Correspondente. Vol. I. Helmst. ap. C. G. Fleckeisen 1797, 132 Qts.

Herrn Prof. Pfaff's Verdienste um die Analysis überhaupt, und die Summirung der Reihen insbesondere, sind bekannt; auch ist der von ihm (1788 Berlin, bey Himburg) herausgegebene Versuch einer neuen Summationsmethode, nebst andern damit zusammenhängenden analytischen Bemerkungen, mit allgemeinem verdientem Beyfalle aufgenommen worden. In diesem Versuche, der größtentheils Ausdrücke für Summen von Reihen der Sinusse und Cosinusse vielfacher Bögen, auch mit geometrischen, algebraischen und recurrirenden Reihen verbunden, enthält, sah Herr Pr. Pf. seine Methode keinesweges für erschöpft, noch die Untersuchungen alle für gänzlich vollendet an; er erklärte ihn vielmehr für ein Fragment von ausführlichern Untersuchungen über die Lehre von den Reihen und ihren Summen, und gab so zu fernerer Ausbildung und Erweiterung dieser so wichtigen Theorie die angenehme Hofnung.

Dieser Erwartung entspricht das, was voritzt von dem **ersten** Bande analytischer Untersuchungen nur allein erschienen ist — die **erste** Abhandlung: de Progressionibus arcuum circularium, quorum tangentes secundum datam legem procedunt, vollkommen. Zu den merkwürdigsten Reihen von Kreisbögen, deren Tangenten nach einem gegebenen oder willkührlich angenommenen Gesetze fortgehen, sind diejenigen vornehmlich zu rechnen, von denen Euler bereits (Comm. Vett. Ac. Sc. Petrop. T. IX. p. 234) ein Paar Beyspiele anführt, und späterhin (Nov. Comm. T. IX. p. 40—52) die Summirung solcher Reihen, aber nach einem indirecten Verfahren,

vorträgt. Sie schienen diesem großen Geometer um so mehr alle Aufmerksamkeit zu verdienen, weil noch keine Methode bekannt sey, ihre Summe a priori zu finden, und die Bogen selbst unter sich alle incommensurabel sind. Er hielt sogar die Auffindung einer allgemeinen directen Methode zu Summirung solcher Reihen, für jedes willkührlich angenommene Gesetz der Tangenten, wo nicht für unmöglich doch für sehr schwierig, begnügte sich daher mit der Anwendung seines an sich zwar simpeln, aber nur a posteriori gefundenen, Verfahrens auf leichtere Fälle, und mit der Empfehlung, diesen Gegenstand, der es allerdings verdiene, gelegentlich weiter zu verfolgen.

Das ist die Veranlassung zu der gegenwärtigen Abhandlung. Herr Prof. Pfaff hat zwar in jener ersten Schrift (Abschn. XIX. S. 99), auch von solchen Reihen gehandelt, und sein Summationsverfahren, nebst noch einem andern, darauf angewendet; aber nur sehr kurz und unvollständig; indem er sich begnügt, die Gründe a. a. O. nur überhaupt anzuzeigen, ohne sich ins Detail der Rechnung näher einzulassen (das. S. 103.). In der gegenwärtigen Schrift hingegen wird dieser Gegenstand ausführlich behandelt, und zugleich eine directe, sehr viel umfassende Methode, die Summe von dergleichen Reihen zu finden, vorgelegt; eine Methode, die von jener ersten (nach welcher die Summen unendlicher Reihen dadurch gefunden werden, daß man die einzelnen Glieder derselben selbst in unendliche Reihen auflöst) ganz verschieden ist, indem hier die Summirungen sämtlich auf Producte aus einer unbestimmten Menge Factoren (Producta indefinita) und ihre Werthe zurückgeführt werden.

Das Ganze enthält drey Abschnitte. Der erste (S. 5 — 10) giebt (Probl. und Theor. I. nebst Coroll. 1, 2, 3) allgemeine Formeln, aus gemeinen trigonometrischen und algebraischen Lehren abgeleitet, die sich auf jedes willkührliche Fortgangsgesetz der Tangenten, so wie auf endliche und unendliche Summen der Kreisbogen erstrecken. Von den nur erwähnten Productis indefinitis und ihren verschiedenen Ausdrücken und Werthen handeln insbesondere §§. VI — IX. S. 7 — 9. In der Folge werden, bey der Anwendung dieser Grundformeln, zwey Gattungen von Reihen unterschieden, und ihre Behandlung in den beyden folgenden Abschnitten ausführlich nachgewiesen. Der zweyte, in zwey Capitel abgetheilte, Abschnitt (S. 10 — 65)

10 — 65) beschäftiget sich mit Summirung der ersten jener beyden Gattungen von Reihen, dahin alle diejenigen gehören, deren Summe aus den allgemeinen Formeln des ersten Abschnitts sich zwar nicht, ohne Beyhülfe anderer Sätze der Analysis des Unendlichen, ableiten, aber doch durch einen Bogen ausdrücken läßt, dessen Tangente man algebraisch angeben kann. Solche Reihen nennt hier Hr. Pf. in dieser doppelten Hinsicht algebraisch summabel. Daher die Ueberschrift dieses Abschnitts: Investigatio serierum algebraice summabilium, und der Inhalt der Aufgabe (Probl. II. p. 10) womit er anfängt: Investigare formam generalem serierum, $A.\tan t' + A.\tan t'' + A.\tan t''' \ldots\ldots + A.\tan t^{x}$, algebraice summabilium. Alle Reihen, die Euler in der oben angeführten Abhandlung summirt hat, gehören zu der ersten Gattung, die hier wieder in zwey verschiedene Arten abgetheilt, und jede in einem eignen Capitel behandelt wird. Zu der ersten Art gehören die meisten Eulerischen Exempel, die hier (p. 16, XVIII, p. 17, 5) nur nachgewiesen, desto genauer aber die Analysis derselben, und ihre, so viel sich's thun läßt, einfachen allgemeinen Formeln (dergleichen Euler nicht gegeben hat) dargestellt werden, insofern sie sämtlich der summabeln allgemeinen Form: $A.\tan \frac{1}{L+M+N}$

$$+ A.\tan \frac{1}{4L+2M+N} + A.\tan \frac{1}{9L+3M+N} \ldots$$

$$\ldots + A.\tan \frac{1}{Lx^2+Mx+N} = A.\tan \frac{2}{L+M},$$ mit der Bedingungsgleichung $4LN = M^2 - L + 4$ unterworfen sind. Von der zweyten Art hat Euler nur vier Beyspiele gegeben (hier p. 35, XLIII, 2; p. 41, LIV; p. 43, LVI, 2; p. 50, LXXII, 2) von denen das erste der Form: $A.\tan \frac{1}{A} - A.\tan \frac{1}{A(A^2+2)}$

$$+ A.\tan \frac{1}{A(A^2+2)^2 - A} - \text{etc} \pm A.\tan \frac{1}{z} \mp \text{etc}$$

$= \frac{1}{2} A \tan \frac{2}{A}$ (wo die Nenner in einer recurrirenden Reihe von der Scale $A^2+2, -1$, fortgehen) das zweyte der Form:

$$A.\tan \frac{1}{A} + A.\tan \frac{1}{B} + \text{etc} + A.\tan \frac{1}{z} + \text{etc} = \frac{1}{2} A.\sin \frac{2}{A}$$

(die Nenner sind hier Quadrate, deren Wurzeln eine recurri-

rende Reihe der Scale A, — 1, bilden; B = A² gesetzt) zugehört: welche Formen gleichwohl in anderer Rücksicht nur spezielle Fälle anderer viel allgemeinerer Summationen darstellen. Von den beyden übrigen Beyspielen hat Euler nicht einmal das Fortgangsgesetz der Nenner in den Ausdrücken für die gegebenen Tangenten der Bogen angegeben, das hier nachgewiesen wird, und im letzten Falle eine recurrirende Reihe mit Anhänge (seriem recurrentem cum *appendice*; vergl. S. 27. Anm.) bildet. Die Aufsuchung der allgemeinen Form der Reihen: A. tang. t′ + A. tang. t″ + A. tang. t‴ + etc. die sich algebraisch summiren lassen, (wie hier im zweyten Abschnitte nur allein betrachtet werden) läßt sich auf den Ausdruck eines unbestimmten Products (§. VI) zurückführen; und so ist denn für die Summe solcher Reihen unstreitig der einfachste, und daher auch zuerst (§. XII, XV) in Erwägung gezogene Fall, wenn die unbestimmte Menge der Factoren des Products, welches die gesuchte Summe darstellt, Brüche sind, deren Zähler und Nenner so auf einander folgen, daß sie sich immer wechselseitig aufheben, und nur der erste Zähler und letzte Nenner übrig bleiben, wie in $\frac{\varphi 1}{\varphi 2} \cdot \frac{\varphi 2}{\varphi 3} \cdot \frac{\varphi 3}{\varphi 4} \cdots \frac{\varphi (x-1)}{\varphi x} \cdot \frac{\varphi x}{\varphi (x+1)} = \frac{\varphi 1}{\varphi (x+1)}$. Ein anderer Fall, wo ein unbestimmtes Product auf ein bestimmtes zurückgeführt wird, ist (§. XII, 5, p. 12.)

$$\frac{\varphi 1}{\varphi (1+r)} \cdot \frac{\varphi 2}{\varphi (2+r)} \cdots \frac{\varphi r}{\varphi 2r} \cdot \frac{\varphi (1+r)}{\varphi (1+2r)} \cdots \frac{\varphi x}{\varphi (x+r)}$$

$$= \frac{\varphi 1 \cdot \varphi 2 \cdots \varphi r}{\varphi (x+1) \cdot \varphi (x+2) \cdots \varphi (x+r)};$$ davon auch späterhin eine Anwendung auf Probl. VII. §. LXXXVII. gemacht worden ist. Die Summe der Bogenreihe: A. cot A + A. cot B ... + A cot Z ... deren Cotangenten in einer recurrirenden Reihe fortgehen und gegeben sind, mit den Bedingungen, wenn sich selbige algebraisch angeben läßt, wird §. XXXIV. in Betrachtung gezogen, auch (§. XXXVI) gezeigt, wie man aus der Summe der Reihen von unendlich viel Gliedern (wie hier gewöhnlich vorkommen) die, für eine bestimmte Anzahl Glieder, leicht herleiten könne. Der Hauptsatz für dergleichen durch Cotangenten gegebene Bogenreihen, ist in dem allgemeinen (§. XXXVI, 2, p. 31 aufgestellten) Theorem enthalten. Zu bequemer Uebersicht des weitläuftigen Inhalts desselben, sind besondere Fälle davon in 7 speciellern Lehrsätzen (§§. XXXIX, bis XLVII;

XLVII; LI; LVIII; LXIV; LXVIII; LXXXV) aufgestellt, wo mehrere Bestimmungsgleichungen auch Aufsuchung rationaler Werthe für gewisse Größen gegebener Functionen oder Gleichungen vorkommen (§. LXIII und der Lehnsatz §. LXXVII mit seinen Anwendungen) und überall Erläuterungen der aufgeführten Sätze an Buchstaben- und Zahlen-Exempeln nachgewiesen werden. Aus dem hier Beygebrachten kann man schon, ohne die Lehrsätze selbst vor Augen zu haben, die große Verwickelung abnehmen, die hier vorkommt, wo gleichwohl der Herr Verfasser alles mit größter Deutlichkeit und hinreichender Ausführlichkeit auseinander gesetzt hat. Wollte man, wie §. XXX ein Beyspiel vorkommt, aus der unzähligen Menge von Reihen, die sich nach den Sätzen des zweyten Abschnitts summiren lassen, zwey oder mehrere zusammen addiren, so würden dadurch neue Bogenreihen entstehen, die sich summiren ließen, deren Cotangenten aber nicht mehr das bisher betrachtete recurrirende, sondern ein anderes, mehr zusammengesetztes, Gesetz befolgen würden. Da die Betrachtung solcher Reihen auf sehr verwickelte, wenig allgemeine und vielfach beschränkte Sätze führen würde: so hat Herr Prof. Pfaff, um allzugroße Weitläuftigkeit zu vermeiden, es bloß bey der Anzeige (§. XC, 2), wie man hier weiter gehen könne, bewenden lassen. Der dritte Abschnitt (p. 65—132) hat die Ueberschrift: Investigatio serierum transcendenter summabilium, betrift also Reihen, wo die Summen sich trascendentisch angeben lassen; deren Erforschung schon schwieriger, als die im vorhergehenden Abschnitte ist, und Kenntnisse der höhern Trigonometrie und Analysis voraussetzt. Im ersten Capitel (§. XCII—CXXXIII) voran einige Lehnsätze, wo der Werth von Producten aus unzählig viel Factoren, durch logarithmische- Kreis- und trigonometrische Functionen, also transcendentisch, ausgedrückt wird; von Sätzen abgeleitet, die Joh. Bernoulli erfunden, Euler, Kästner, L'Huilier erwiesen und zum Theil weiter angewendet haben. Dann folgen (Probl. VIII—XV. mit ihren Zusätzen und Anmerkungen) verschiedene den verwickelten Untersuchungen zum Grunde liegende einfachere Aufgaben. Bey diesen wird, aus der Reihe allgemeinem Gliede das Product aus unzähligen Factoren (Productum indefinitum) nach den Lehrsätzen hierüber im ersten Abschnitte, abgeleitet, und der Werth dieses Products (die Summe der gegebenen Reihe) nach einem der vorangeschickten Lehnsätze ausgedrückt. Weitere, zum Theil sehr verwickelte Anwendungen dieser Aufgaben kommen im folgenden zweyten Capitel

pitel (§. CXXXIV — CLXIII) vor, welches Summationes generaliores enthält, und mit der wichtigen Untersuchung (Probl. XVI. §. CXXXIV — CXL) anhebt: Einen Bogen, dessen Tangente irgend eine gebrochene Function von z ist, z. B. A. tang $\frac{P}{Q}$, in so viel Bogen zu zerlegen, deren Tangenten einfache Brüche sind, wie A. tang $\frac{a'}{z+b'}$ + A. tang $\frac{a''}{z+b''}$ + etc + A. tang $\frac{a^N}{z+b^N}$, auf wie viel Grade der Nenner Q steigt; und diese Zerlegung ist immer real, welches bey ähnlichen Zerlegungen der Funktionen nicht der Fall ist. Dieses, und was der Herr Verfasser hierbey über die Kennzeichen summabler Reihen beybringt, nachdem $\frac{P}{Q}$ irgend eine functio fracta par oder impar der veränderlichen Größe, mit durchgängig positiven oder abwechselnden Zeichen ist, zeigt den großen Nutzen bey solchen Reihen, deren Summe durch einen Bogen ausgedrückt wird, dessen Tangente selbst transcendentische Größen enthält. Beyspiele solcher Summen von Reihen, die man in doppelter Hinsicht transcendent-summabel nennen kann, hat vor Herrn Prof. Pf. niemand gegeben. Die Schwierigkeit des in dieser Schrift so meisterhaft behandelten Gegenstandes hat nicht selten zu lehrreichen analytischen Bemerkungen und Untersuchungen Anlaß gegeben, z. B. über die Factoren der unmöglichen Größe $Q+P\sqrt{-1}=x^{2n}+b+a\sqrt{-1}$. Diese können zwar aus den Factoren von z^m+B, vermittelst des Cotesischen Lehrsatzes, abgeleitet werden, wenn man dort $B=b+a\sqrt{-1}$ setzt; aber in dem Beweise dieses Lehrsatzes wird B gewöhnlich als eine mögliche Größe vorausgesetzt (§. CXLVI). Dieses, und der Umstand, daß man bey Behandlung der imaginären Größen sich leicht versehen und in Fehler verfallen kann, hat Herrn Pf. bewogen, die Auffindung der einfachen Factoren der unmöglichen Größe $u^n+b+a\sqrt{-1}$ in einem Lehnsatze (§. CXLVII) aus bekannten trigonometrischen Gründen ausführlich nachzuweisen. Deutlichkeit, Ordnung und strenge Bündigkeit in den Auflösungen und Beweisen der Sätze, machen diese Schrift, durch welche die Analysis der Reihen so sehr ist erweitert worden, besonders lehrreich; auch sind darinn verschiedne neue, den Druck erleichternde und Raum ersparende,

leicht

leicht faßliche Zeichen eingeführt worden; welches um so verdienstlicher ist, jemehr durch selbige bey so großen Verwickelungen, als hier nicht selten vorkommen, die allgemeine Uebersicht befördert wird.

Es ist bekannt, wie schwierig es ist, aus der Tangente t des einfachen Bogens die Tangente τ des nfachen (aus Arc. tang t den Arc. tang τ) für jeden Werth von n allgemein zu bestimmen (Kästn. Anal. des Unendl. §. 331. S. 255). Herr M. Eschenbach hat über diesen Abschnitt der Kästn. Anal. commentirt: Ad Fratrem, *Christ. Gottl.* epistola: inest *in locum Kaestnerianum de multipli angulorum tangentibus commentatio* (Lips. 1785. 20 pagg. IVto.). Der gewöhnliche Ausdruck durch die Sinus und Cosinus des nfachen Bogens führt auf die rationale gebrochene Function

$$\tau = \frac{{}^{n}\mathfrak{A}\,t - {}^{n}\mathfrak{C}\,t^{3} + {}^{n}\mathfrak{E}\,t^{5} - {}^{n}\mathfrak{G}\,t^{7} + \text{etc}}{1 - {}^{n}\mathfrak{B}\,t^{2} + {}^{n}\mathfrak{D}\,t^{4} - {}^{n}\mathfrak{F}\,t^{6} + \text{etc}}$$

die sich sehr schwer auf eine brauchbare rationale ganze bringen läßt, wie erfordert wird, wenn man τ, für alle Werthe von n (nicht bloß für ganze positive) zur Berechnung hinreichend bequem ausgedruckt verlangt. Herr E. hat sich hierbey, das Gesetz des Fortgangs in den Coefficienten der entwickelten Reihe für τ deutlich darzustellen, der Combinationsclassen: $a\,{}^{n}A$, $b\,{}^{n}B$, $c\,{}^{n}C$, etc bedient; da aber, auf dem von ihm gewählten Wege, diese Coefficienten nicht nach Potenzen von n geordnet (wie man sie der Bequemlichkeit der Rechnung wegen braucht) sich ergeben, auch nicht ohne viele Mühe zusammenrechnen lassen: so hat Recens. (Leipz. Magaz. der Mathem. 1786. S. 270) gezeigt, wie sich, durch eine verbesserte Analysis, der gesuchten Reihe τ allgemeines mte Glied $\tau \urcorner m$, vermittelst der Bernoullischen Zahlen, in einer combinatorischen, nach Potenzen von n geordneten, Formel *) darstellen lasse. Aus den

 Schwie-

*) Ich bediene mich dieser Gelegenheit, das a. a. O. aufgeführte allgemeine mte Glied der Reihe τ in einer verbesserten Zeichnung hier vorzulegen, und zugleich ein paar Druckfehler, in den beyden letzten Zeilen des Zeigers, aufzuheben. Es ist nämlich:

$$\tau \urcorner m = \left[\frac{2^{2}(2^{2}-1)\mathfrak{A}}{1.\ 2} \cdot a^{m} A n^{1} + \frac{2^{4}(2^{4}-1)\mathfrak{B}}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \cdot c^{m+1} C n^{3} \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)\overset{m-1\ \ 2m-2}{\mathfrak{A}}}{1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots 2m} \cdot a^{2m-1}\overset{2m-2}{A}\, n^{2m-1} \right] t^{2m-1}$$

wo

Schwierigkeiten, die schon hier vorkommen, wo doch alle einfache Bogen, und eben so auch ihre Tangenten, einander gleich sind, kann man schon auf die große und schwierige Verwickelung rechnen, welche die Auflösung der in gegenwärtiger Abhandlung vorgetragenen weit allgemeinern Aufgabe, haben müsse, wo die Bogen unter sich, und eben so ihre Tangenten t', t'', t''', etc sämtlich verschieden sind. Daß die Summe solcher Bogen auf dem Gesetze beruhe, welches ihre Tangenten befolgen, fällt in die Augen; dahin gehören die von Herrn Pf. angegebenen Bedingungen, unter welchen die Tangente des Bogens der Summe algebraisch oder transcendentisch sich angeben läßt.

Einzelne Proben dieser musterhaften Ausführung aufzustellen, würde selbst für dieses Journal zu weitläuftig seyn. Statt aller andern mag jedoch hier die erste Aufgabe (§. IV.), die Grundlage aller übrigen, dienen, deren Auflösung Herr Pr. Pf. in einer combinatorischen Formel gegeben hat: „Die Summe einer unbestimmten Menge von Kreisbögen, deren Tangenten einzeln gegeben sind, in einem Bogen auszudrücken, „dessen Tangente aus den Tangenten jener Bögen zusammengesetzt, also auch bestimmt gegeben ist.“

Für

wo,

für $m = 1, 2, 3, 4,$ etc

kommt $\overset{m-1}{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D},$ etc

und $\overset{2m-2}{a} = a, c, e, g,$ etc

und $\overset{2m-2}{A} = A, C, E, G,$ etc

und hieraus folgen der gesuchten Reihe Glieder, nach der Ordnung. Nämlich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\ldots$ bedeuten hier die Bernoullischen Zahlen; $\overset{m-1}{\mathfrak{A}}$, den um $m-1$ Stellen von $\mathfrak{A}$ vorwärts entfernt liegenden Buchstaben; $\overset{2m-2}{A}$, die $(2m-1)$te Combinationsclasse, und zwar hier zur (nebenstehenden) Summe $2m-1$; $\overset{2m-2}{a}$, den dazu gehörigen $(2m-1)$ten Polynomialcoefficienten. Die Bernoullischen Zahlen sind hier nach Euler durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}\ldots$ ausgedrückt; die übrigen, combinatorischen Zeichen befolgen die einmal von mir eingeführte und festgesetzte Bedeutung.

Für zusammengehörige
Kreisbogen α, β, γ, δ, ε ...
und Tangenten t', t'', t''', t^{IV}, t^{V} ...

wo also

$$\text{tang.}\ \alpha = t';\quad \alpha = \text{Arc. tang.}\ t'$$
$$\text{tang.}\ \beta = t'';\quad \beta = \text{Arc. tang.}\ t''$$
$$\text{tang.}\ \gamma = t''';\quad \gamma = \text{Arc. tang.}\ t'''$$

u. s. w. ist bekanntermaßen:

$$\text{tang}\ (\alpha+\beta) = \frac{t'+t''}{1-t'\,t''};$$

$$\alpha+\beta \text{ oder A. tg. } t' + \text{A. tg. } t'' = \text{A. tg.} \frac{t'+t''}{1-t'\,t''}.$$

Daraus wird (die Summe von zween Bogen als den ersten, und dazu einen dritten als den zweyten, genommen) der Werth der Summe von drey Bogen, und so weiter von vier, fünf und mehrern Bogen, gefolgert und erwiesen. Die combinatorische Formel dafür (statt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ... die obigen Werthe gesetzt) ist folgende:

$$\text{Arc. tang. } t' + \text{Arc. tang. } t'' + \text{Arc. tang. } t''' + \text{etc}$$
$$=$$
$$\text{Arc. tang.} \frac{A' - C' + E' - G' + I' - L' + \text{etc}}{1 - B' + D' - F' + H' - K' + \text{etc}} \text{*)}$$
$$(t',\quad t'',\quad t''',\quad t^{IV},\ t^{V},\quad t^{VI}\ldots)$$

Demnach ist, für die Summe von zwey, drey, vier, fünf... Bogen nach der Ordnung, oder

$$\text{Arc. tang. } t' + \text{Arc. tang. } t'' = \text{Arc. tang} \frac{A'}{1 - B'}$$
$$(t',\ t'')$$

$$\text{A. tg. } t' + \text{A tg. } t'' + \text{A. tg. } t''' = \text{A. tg.} \frac{A' - C'}{1 - B'}$$
$$(t',\ t'',\ t''')$$

*) Hier bedeuten A', B', C', D', etc die erste, zweyte, dritte, vierte u. s. w. Combinationsclasse, in deren Complexionen die Elemente t', t'', t''' ... des Zeigers, *simpliciter* und ohne Wiederholung, vorkommen. Das sehr leichte combinatorische Verfahren dafür zeigt Inf. Dign. p. 161.

$$\text{A. tg. } t' \ldots + \text{A. tg. } t^{IV} = \text{A. tg.} \frac{A' - C'}{1 - B' + D'}$$
$$(t', t'', t''', t^{IV})$$

$$\text{A. tg. } t' \ldots \text{ A. tg. } t^{V} = \text{A. tg.} \frac{A' - C' + E'}{1 - B' + D'}$$
$$(t', t'', t''', t^{IV}, t^{V})$$

u. s. w. so, daß immer die Anzahl der aufzuführenden Combinationsclassen A', B', ... und der Tangenten t', t'', ... im Zeiger, mit der Menge der zu summirenden Bogen A. tg. t', A. tg. t'' .... übereinkommt. Werden z. B. hier in der vorletzten Formel, die einzelnen Complexionen für ihre Classen gesetzt, so verwandelt sich, für die Summe von vier Bogen,

$$\text{A. tg} \frac{A' - C'}{1 - B' + D'} \text{ in}$$

$$\text{A. tg} \frac{t' + t'' + t''' + t^{IV} - t't''t''' - t't''t^{IV} - t't'''t^{IV} - t''t'''t^{IV}}{1 - t't'' - t't''' - t't^{IV} - t''t''' - t''t^{IV} - t'''t^{IV} + t't''t'''t^{IV}}$$

Statt der hier mit + und — verbundenen Glieder, (deren Anzahl in der Folge beträchtlich anwächst und größer wird) lassen sich bequemer Factoren schaffen; und so wird (§. VI) gezeigt, wie man aus dem ersten und einfachsten Satze der Gleichungen (vom Verhalten der Coefficienten derselben zu ihren Wurzeln) die Ausdrücke $A' - C' + E' - G' + \text{etc}$ und $1 - B' + D' - F' + \text{etc}$ [auf $\left(1 \mp \frac{t'}{z}\right)\left(1 \mp \frac{t''}{z}\right) \ldots$ bezogen, und nachher $z^2 = 1$ oder $z = \sqrt{-1}$ gesetzt] in Factoren von der Form $(1 \mp t^N \sqrt{-1})$ verwandeln, und dadurch vermittelst bequemer Zeichen (§. V. hypoth.) das Productum indefinitum darstellen könne, um selbiges an die Stelle der obigen combinatorischen Functionen zu setzen.

Der erste Band enthält voritzt nur diese einzige Abhandlung, die sich mit S. 132 schließt. Der unten auf dieser Seite stehende Custos Noua verspricht zwar eine Fortsetzung; es ist aber bis itzt noch nichts weiter, als dieser erste Aufsatz, erschienen und in den Buchhandel gekommen; obgleich schon damals, als er ausgegeben ward, mehrere Bogen, als hier geliefert sind, bereits fertig abgedruckt waren. Was hierbey Aufenthalt verursacht, und was man sich bey einer weitern Fortsetzung des

Werks

Werks zu versprechen hat, wird man aus folgenden, für die Kenner hier mitgetheilten interessanten, Nachrichten am besten ersehen und beurtheilen können.

2. Auszug eines Briefes von Herrn Professor Pfaff an den Herausgeber.

Helmstädt, den 16 April 1797.

Was die von Ihnen verlangte Nachricht wegen der Herausgabe meiner Disquis. analyt. anbetrift, so melde ich Ihnen, daß ich sehr wünschte (da es mit dem Drucke derselben, mancher Schwierigkeiten wegen, etwas langsam gieng) doch den ersten Theil zur bevorstehenden Ostermesse fertig zu sehen. Es zeigte sich aber dabey, nach einem ungefähren Ueberschlage, daß das Manuscript dazu zu groß war. Ich entschloß mich daher, eine weitläuftige Abhandlung von Reihen-Summirung, um derentwillen ich eigentlich die Ihnen schon bekannte Untersuchung über die Integration einer Differenzialgleichung angestellt hatte, für den zweyten Theil aufzuheben, und dagegen eine kleinere Abhandlung über die Reversion der Reihen zu entwerfen, worinn ich die beyden Aufsätze im ersten Hefte Ihres Archivs weiter ausführen und ergänzen wollte. Diese Abhandlung dachte ich nun, zu Füllung des ersten Bandes, und, wegen des Zusammenhangs, auch die beyden nurerwähnten Aufsätze, beyzufügen. Die Abhandlung über die Reversion der Reihen habe ich auch fast ganz ins Reine gearbeitet; sie ist aber ungleich ausführlicher ausgefallen, als ich es anfangs gedacht hatte. Weil nämlich bey der Reversion der Reihen doch am Ende das Wichtigste auf den polynomischen Lehrsatz ankommt, von diesem aber die combinatorische Behandlung manchem Leser, besonders auswärts, noch nicht recht geläufig seyn möchte, so hielt ich es für zweckmäßig, auch von diesem Theorem zu handeln. Dabey mußte ich nun zugleich mich auf das eigentlich combinatorische einlassen, und vornehmlich die neuen wichtigen Aufschlüsse benutzen, die Sie in der neuesten Schrift (der polynomische Lehrsatz ꝛc. Leipzig, bey Fleischer 1796. H.) hauptsächlich über die combinatorischen Involutionen gegeben haben. Nützliche literarische Notizen habe ich überall mit beygebracht, auch das Nöthige von Herrn Etatsrath Tetens Verfahren, worüber ich Ihnen meine Gedanken in einem meiner vorigen Briefe

se *) geschrieben habe. Herr Tetens wird wenigstens völlige Unpartheylichkeit in meinen Aeußerungen wahrnehmen. Vermuthlich

*) Vom 28. Septbr. 1796. Dieser Brief enthält ein ausführliches Urtheil, meine neueste Schrift, die Combinationslehre und ihren höchstwichtigen Einfluß auf die Analysis, betreffend (polyn. Lehrs. S. 153 — 304). Die hieher gehörige Stelle wegen Herrn Etatsrath Tetens Substitutionsverfahren (a. a. O. S. 1 — 47.) das er überall statt meiner Combinationsmethode glaubte brauchen zu können (Ebend. S. 3, 4.) ist folgende: — „Aus Herrn Tetens Aufsatze habe ich das Wesentliche abstrahirt, „und, glaube, daß sich das kürzer hätte können sagen lassen. Diese „meine Vermuthung haben Sie auch bestätiget, indem das, was „Sie darüber (S. 250. u f.) sagen, eine deutliche anschauliche „Uebersicht in der Kürze gewährt. Daß sich jedes Glied der Potenz eines Polynoms, auch ohne Combinationen unmittelbar „zu Hülfe zu nehmen, darstellen lasse, kann Herrn Tetens nicht „abgesprochen werden. Indessen scheinen mir doch seine Operationen etwas zu involviren, was den beym Combiniren erforderlichen Operationen sehr ähnlich ist. Es ist daher allemal „methodischer, dieses nicht involvirt zu lassen, sondern als ein „eigenes Problem zu entwickeln, das sich noch weiter erstreckt, und von dem auf das Potenzen-Theorem nur eine specielle Anwendung gemacht wird. So wird denn das ganze Verfahren sicherer, leichter zu übersehen, und (auch schon wegen der anfangs nicht nöthigen Rücksicht auf die Polynomialcoefficienten oder Versetzungszahlen) einfacher. Ein Vorzug „der combinatorischen Darstellung, der vielleicht allein schon den „Ausschlag geben kann, besteht auch darinn, daß sie nicht eine „blos in Worten weitläuftig auszudrückende Regel, sondern zugleich eine deutlich gezeichnete allgemeine Formel giebt. — „Herr Tetens sieht die combinatorischen Operationen in der Analysis fremde an, da sie doch seit langer Zeit von mehrern Mathematikern (Leibnitz, de Moivre, Jac. Bernoulli, Cramer, Boscovich, Castillon; H.) vielfältig, namentlich bey „dem Potenzen-Theorem und bey der Reversion der Reihen, sind „gebraucht worden. Auch ist der Grund, worauf sein Verfahren gebaut ist, indem nämlich $p = a + bz + cz^2 + \text{etc} = a + y$ „gesetzt, und so $p^m = a^m + m a^{m-1} y + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} y^2$ u. s. „w. gefunden wird; diese Reduction ist auch von andern, z. B. „Simson, Euler, auch bereits von W. Jones (Synopsis etc. 1706) gebraucht und zu Entwickelung der Potenzen von unbeten Exponenten angewendet worden.“ —

Eine ausführliche detaillirte Vergleichung meiner Combinationsmethode mit Herrn Tetens Substitutionsverfahren, findet man in meiner oben erwähnten Schrift (S. 241 — 283); auch hat der Recensent derselben in der allgemeinen Litteratur-Zeitung (vom 7. Dec. 1796. No. 380, 381) sich umständlich (S. 578 — 581) darauf eingelassen. H.

lich wird er bereits für sich den Vorzug der combinatorischen Methode vor seinem Substitutionsverfahren anerkannt haben. Mein Urtheil stimmt in der Hauptsache vollkommen mit dem überein, das Sie mir einmal aus einem Briefe von Herrn P. K. mitgetheilt haben, und das ich auch überaus passend ausgedruckt fand *). Ich freue mich der angenehmen Hofnung, daß meine Abhandlung über ein Hauptproblem der Analysis Ihren Beyfall nicht verfehlen wird. Zugleich glaube ich einen Wunsch einigermaßen erfüllt zu haben, den Sie einmal schriftlich gegen mich geäußert haben, daß ich mich nämlich auf das Eigenthümliche der combinatorischen Operationen und Involutionen genauer einlassen sollte **). Das habe ich nun wirk-

*) Aus Briefen, vom 29. Aug. und 30. Nov. 1796. — „Ich „halte es für etwas nicht zu bezweifelndes, daß der polynomische Lehrsatz ganz auf combinatorische Ausdrücke gegründet „werden müsse. Denn was geschieht bey der Erhebung einer „vieltheiligen Größe auf eine Potenz anders, als daß man alle „mögliche Combinationen der Theile vornimmt? Substitutionen machen hier die Sache dunkel und weitläuftig. — Herrn „Tetens Formel und Beweis des polynomischen Lehrsatzes sind „nicht bequem, und erschweren wegen der Substitutionen die „Uebersicht. Das einzige genuine Verfahren ist dasjenige, „was auf den Combinationen beruht. Dabey sieht man die ganze „Genesis deutlich ein. Die combinatorischen Ausdrücke sind „Formen von bekannter sehr einfacher Structur: diese kann „man also mit der größten Klarheit anwenden; bey Substitutionen hingegen, die bald auf diese, bald auf jene Art, gemacht „werden, entsteht unvermeidlich ein Nebel, der das Vergnügen „an der Untersuchung stört, so wie der physische eine Lustfarth." —

K.

**) Gewöhnlich geräth man nicht gleich anfangs, so wie man das Hauptmoment einer Sache entdeckt hat, auf den kürzesten und natürlichsten Weg es darzustellen und zu benutzen; noch weniger kann man darauf rechnen, was in der Sache liegt, sogleich und auf einmal zu erschöpfen. Bey den combinatorischen Operationen habe ich verschiedentlich gezeigt, wie sich — Complexionen aus Complexionen, Classen aus Classen, Ordnungen aus Ordnungen, Werthe aus Werthen — folgende aus vorhergehenden, nach Zahlen- und lexikographischer Ordnung, in horizontaler und vertikaler Lage (durch Schreiben der Elemente neben und unter einander) von einander ableiten lassen. Wie verschieden sind aber nicht die Vorschriften und Anordnungen darüber in meinen ersten Schriften und in der letzten! in welcher ich alles aufs möglichste zu vereinfachen, alles auf rein combinatorische Begriffe als selbstständige Wissenschaft aufzubauen, alles unter sich mit den folgenden Hülfs- und Hauptsätzen in strengen wissen-

wirklich gethan, und mich deshalb in die neuere, in der Schrift „Der polynomische Lehrsatz" von Ihnen gegebene Darstellung, mit aller Aufmerksamkeit hinein studiet. — Von den vorerwähnten Aufsätzen wird wenigstens der eine als Anhang zu der Reversion der Reihen kommen. Zu dem andern habe ich die Fragmente noch nicht ganz geordnet: vermuthlich werde ich ihn demnächst für das Archiv übersenden. Jener handelt von einigen verwickelten Coefficientengleichungen *). Es sind besonders folgende:

1) Die Gleichung $p*n = q*n + \frac{1}{1.2} q^2*(n-1)$ $+ \frac{1}{1.2.3} q^3*(n-2) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} q^n*1$, nach q aufgelöst, giebt

q*n

wissenschaftlichen Zusammenhang zu bringen gesucht habe. Wie verschieden sind nicht die anfangs von mir aufgestellten combinatorischen Involutionen von den letzten! Die in jener Schrift (S. 202 und 204, nebst der Anwendung S. 280, 281) vorkommenden, können hier unter mehreren als Beyspiele dienen, und, in Absicht auf Simplicität und Allgemeinheit, Kürze und Bequemlichkeit, als ganz vollendete Involutionen empfohlen werden. Eben das gilt auch von der allgemeinen combinatorischen Charakteristik (Nov. Syst. Comb. p. XXXIII—XLIX) deren nothwendige Einführung in die Analysis ich (S. 283—288 jener Schrift) dargethan habe; gilt auch von den in diesen Zeichen ausgedrückten so vielfachen und wichtigen Relationen (S. 212—223, 235, 265—267) und Hauptsätzen (S. 227—240; 289 u. f. und anderwärts) als Grundlagen der mannichfaltigsten Anwendung. — Ursachen genug, die mich antreiben konnten, an Herrn Prof. Pfaff, der schon so manche wichtige Anwendung der combinatorischen Analysis gemacht hat (Arch. H. III. S. 337—347; V. S. 67—73. und S. 125—152 der obigen Schrift) die Anforderung zu thun, seinen tiefeindringenden Scharfsinn mit den Gründen der Sache selbst zu beschäftigen. Wie sehr würde nicht z. B. die Wissenschaft auf einmal erweitert und der Vollkommenheit näher gebracht werden, wenn Jemand etwas, den combinatorischen Involutionen an Werth und Brauchbarkeit Gleichgültiges, auffinden und ihnen beyfügen würde! H.

*) Von der besondern Art von Gleichungen, die Herr Prof. Pfaff Coefficienten-Gleichungen nennt, von der Ursache ihrer Benennung, nebst Beyspielen ihrer Auflösung, sehe man dessen (in der Schrift, polyn. Lehrs. No. V. S. 144—152 eingerückte) Abhandlung. Exempel der einfachsten Art solcher Gleichungen mit ihren Auflösungen stehen daselbst §. 7—11; verwickeltere, wie hier erwähnt werden, kommen schon dort §. 13, 16 vor. Die Benennung insbesondere rechtfertigen §. 1, 2, 14. H.

$$q \varkappa n = p \varkappa n - \tfrac{1}{2} p^2 \varkappa (n-1) + \tfrac{1}{3} p^3 \varkappa (n-2) - \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{1}{n} p^n \varkappa 1.$$

2) Die Gleichung $p \varkappa n = q \varkappa n - \frac{1}{1.2.3} q^3 \varkappa (n-1)$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots5} q^5 \varkappa (n-2) - \ldots \pm \frac{1}{1.2\ldots 2n-1} q^{2n-1} \varkappa 1,$$
nach q aufgelößt, giebt
$$q \varkappa n = p \varkappa n + \frac{1}{2.3} p^3 \varkappa (n-1) + \frac{1.3}{2.4.5} p^5 \varkappa (n-2)$$
$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6.7} p^7 \varkappa (n-3) + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)(2n-1)} p^{2n-1} \varkappa 1.$$

3) Folgende Coefficientengleichung zwischen drey Reihen p, q, Q; $p \varkappa n = Q \varkappa 1.\, q^a \varkappa n + Q \varkappa 2.\, q^{a+d} \varkappa (n-1) + Q \varkappa 3\; q^{a+2d} \varkappa (n-2) + \ldots + Q \varkappa n.\, q^{a+(n-1)d} \varkappa 1,$ giebt

a) nach q aufgelößt,
$$q^s \varkappa n = \frac{s}{s} Q^{-\frac{s}{a}} \varkappa 1.\, p^{\frac{s}{a}} \varkappa n + \frac{s}{s+d} Q^{\frac{-s-d}{a}} \varkappa 2.\, p^{\frac{s+d}{a}} \varkappa (n-1)$$
$$+ \frac{s}{s+2d} Q^{\frac{-s-2d}{a}} \varkappa 3.\, p^{\frac{s+2d}{a}} \varkappa (n-2) + \ldots$$
$$+ \frac{s}{s+(n-1)d} Q^{\frac{-s-(n-1)d}{a}} \varkappa n.\, p^{\frac{s+(n-1)d}{a}} \varkappa 1;$$

b) nach Q aufgelößt,
$$Q^s \varkappa n = \frac{1}{sa+(n-1)d} \text{ multiplicirt in}$$
$$\left(\begin{array}{l} sap^s \varkappa 1.\, q^{-sa-(n-1)d} \varkappa n + [sa+d] p^s \varkappa 2.\, q^{-sa-(n-1)d} \varkappa (n-1) \\ + \ldots + [sa+(n-1)d]\, p^s \varkappa n.\, q^{-sa-(n-1)d} \varkappa 1 \end{array} \right)$$

Diese Aufgaben scheinen mir sehr geschickt, den Nutzen der combinatorischen Analysis darzuthun, da schon, um sie vorzulegen, noch mehr um sie aufzulösen, unsere Bekanntschaft mit ihr und ihren Zeichen vorausgesetzt wird *). —

Von

*) Eben so, nur ausführlicher, hat Herr Prof. Pfaff in seiner Abhandlung No. IV. (Man sehe die vorhergehende Note) S. 124

Von dem bereits Abgedruckten (21 Bogen) übersende ich Ihnen hierbey die ersten 17 Bogen, welche die erste, für sich schon als ein Ganzes, bestehende, Abhandlung ausmachen. Ich wünsche sehr, bald Ihr Urtheil zu vernehmen, wie Sie mit dem Inhalte und der Methode zufrieden sind. Als ich Herrn P. L. vor geraumer Zeit einige der einfachsten Summationen mittheilte, bezeigte er mir darüber seine Verwunderung; auch ist es wirklich auffallend, daß diese eigne Art von Reihen, deren Betrachtung doch auf interessante Resultate führt, bisher fast ganz ist übersehen worden *). — Sie äußerten vor einiger Zeit den Wunsch,

124—126 über die Wichtigkeit meiner Lokal-Zeichen und Formeln geurtheilt. Die dort (S. 125—151) vorkommenden zahlreichen Beyspiele sind eben soviel Belege zu Bestätigung dieses Urtheils. H.

*) Das Wesentliche von Herrn Prof. Pfaffs Verfahren ist, daß er seine Resultate auf Producte einer unbestimmten Menge von Factoren reducirt, deren Werthe sich angeben lassen. Die Vortheile solcher Reductionen fallen in die Augen; um so mehr wird folgende Nachricht den Kennern wichtig und erfreulich seyn. Es ist nämlich Herr D. Kramp, durch weitere Anwendung der von ihm sogenannten Facultäten der Zahlen (Arch. H. V. S. 109—112) veranlaßt worden, an ausführlichen Beyträgen zur Summationslehre der Reihen zu arbeiten, wo alles in dergleichen Producten ausgedrückt wird, deren Werthe auf eine sehr leichte und allgemeine Art sind gefunden worden. Den Werth z. B. des Products oder der Facultät: $y(y+r)(y+2r)\ldots(y+mr-r)$ auszudrücken, hat Euler, Instit. Calcul. Differ. Vol. II. §. 401 (die dortigen a, b, ω sind hier y, r, m) eine sehr zusammengesetzte Formel angegeben, welche, für m oder ω einen Bruch gesetzt, in den meisten, außer den dort angezeigten, Fällen gar nicht zu übersehen ist. Herr Kramp hingegen hat Producte von dergleichen ins unendliche nach einem beständigen Gesetze fortschreitenden Factoren, durch sehr einfache, so weit als man will, convergirende Formeln summirt, auch gefunden, daß, ins unendliche fortgehende Factorengruppen, wie $\frac{A.B.C.D.E.\ \text{etc. etc.}\ldots}{P.Q.R.S.T.\ \text{etc. etc.}\ldots}$ sich durchgängig als Facultäten mit gebrochenen Exponenten (m oder ω) darstellen lassen; wo alsdenn, nach Herrn Kramps Lehrsätzen, die Rechnung sehr leicht ist. Von der Wichtigkeit des Inhalts der hier vorkommenden Sätze, und der Vortrefflichkeit der hierbey angewendeten Methoden, hat mich der scharfsinnige Erfinder derselben, durch Uebersendung des Anfangs und eines großen Theils der Fortsetzung seines Werks, vollkommen überzeugt. Eine ausführlichere Anzeige dieser Untersuchungen soll in diesem Archive gegeben werden. Vielleicht daß, als Probe derselben, eben itzt, da ich dieses schreibe, schon der Druck von Herrn Kramps Abhandlung: Fractionum Wallisianarum Analysis, vollendet ist. H.

Wunsch, daß ich eine vorläufige Anzeige des Inhalts meiner Disquisitionum für das Archiv überschicken möchte. Ich vermied es bisher, weil ich nicht versprechen konnte, wenn der so sehr verzögerte Druck zu Stande kommen würde, ich auch wegen der Auswahl für den ersten Theil noch nicht ganz entschieden war, und den Schein vermeiden wollte, als ob ich das Publikum auf meine Arbeit, als hielt ich sie für wichtig, aufmerksam zu machen suchte. — Sollten Sie indeß von der nun vollendeten ersten Abhandlung, oder von dem, was ich hier geschrieben habe, vorläufig etwas im Archiv zu referiren willens seyn, so würde ich itzt nichts dawider haben *). Mein Herr Verleger wird, was inzwischen fertig wird, auf die Messe nehmen. Das übrige wird dann, da der Druck itzt unausgesetzt fortgeht, bald nach der Ostermesse (1797) nachgeliefert werden **). Wann der zweyte Theil erscheinen wird, wird wohl zum Theil von der Aufnahme des ersten abhängen.

Nachschrift des Herausgebers vom 5ten Jänner 1798.

So eben erhalte ich von Herrn Prof. Pfaff vierzehn gedruckte, zum ersten Bande seiner Disquisitionum, als Fortsetzung derselben, gehörige Bogen. Darinn stehen folgende Abhandlungen: Noua disquisitio de Integratione aequationis differentio-differentialis:

x^2

*) Die Bescheidenheit, mit welcher hier Herr Prof. Pfaff alle vorläufige Bekanntmachung seines Werks ablehnt, so lange davon noch nichts dem Publico vorgelegt ist, macht seinem Charakter Ehre, und contrastirt gar sehr mit den gewagten Versprechungen Anderer, die oft eben so übereilt hingeworfen als unvollständig ausgeführt werden. — Itzt habe ich mich der gegebenen Erlaubniß bedient. Ich habe geliefert, was ich empfangen habe; nicht zwar als Referent, sondern als Epitomator, im Auszuge, und mit den eigenen Worten des Herrn Verfassers, welches hoffentlich den Lesern um so angenehmer seyn wird. H.

**) Die Ergänzung des ersten Bandes wird auf die Ostermesse 1798 nachgeliefert, wie ich aus einer eigenhändigen Nachricht des Herrn Verlegers zuverläßig versichern kann. Der zweyte Band — wenn seine Erscheinung größtentheils davon abhängt, wie das Publikum den ersten aufnehmen wird und zum Theil schon aufgenommen hat — kann und darf nicht lange außen bleiben. H.

$x^2(a+bx^n)d^2y+x(c+ex^n)dydx+(f+gx^n)ydx^2=Xdx^2$

auf 11 und ½ Bogen; dann: Tractatus de Reuersione serierum, siue de Resolutione aequationum per series; von dieser aber nur erst den Anfang, auf 2 und ½ Bogen. Man kann also der vollen Ergänzung des ersten Bandes auf künftige Ostermesse um so gewisser seyn. Der Herr Verfasser hat übrigens die zufällige Verspätigung der Ausgabe dieses Werks, sowohl durch die Wichtigkeit seines Inhalts, als durch die interessante Behandlung desselben, reichlich vergütet. Ein Mehreres davon künftig. H.

3. Mathematische Abhandlungen. I. Ueber das ballistische Problem. II Ueber die Aenderungen der Elemente der Planeten- und Cometenbahnen in einem widerstehenden Mittel. Von Rohde, königl. Preuß. Hauptmann von der Armee. Potsdam, bey Horvath. 1767. 5 Bog. 4.

Der Herr Verfasser hat sich schon durch seine Erläuterungen über Karstens mathematische Analysis und höhere Geometrie (Berlin 1789) vortheilhaft bekannt gemacht. Die beyden Aufgaben, mit welchen er sich hier beschäftigt, gehören zu den schwerern in der Mathematik. An dem ballistischen Problem haben die angesehensten Mathematiker ihre Kräfte versucht. Eine der vorzüglichsten Abhandlungen darüber ist die von dem Herrn Generalmajor von Tempelhoff, die er le Bombardier Prussien betitelt hat. Sie kam 1781 heraus. Nachher hat er in den Mem. de l'Acad. de Prusse, années 1788 et 1789 die Untersuchung aufs neue vorgenommen, die Auflösung einfacher gemacht, und die Formeln bequemer für die Praxis eingerichtet. Es ist in derselben die Gleichung für die Bahn eines geworfenen Körpers auf eine zweyfache Art gefunden. Die zweyte ist diejenige, welche Herr Hauptmann Rohde im Wesentlichen befolgt, mit einigen Abkürzungen. So ist wirklich die Bestimmung der Coefficienten in der Reihe, welche die Tangente des Winkels einer Berührungslinie mit der Abscissenlinie durch Potenzen der Abscisse ausdrückt, leichter als die vom Hrn. von Tempelhoff angewandte Methode. Die Bezeichnung in §. 5. aber ist unrichtig. Denn nach

ach derselben wäre dx ein unveränderliches Differential, wo- ir es doch in den Fundamentalgleichungen nicht angenommen t. Doch dieses läßt sich leicht verbessern. Allein das ganze Verfahren ist zu willkührlich und unzuverläßig. Die vorherge- achte Reihe ist eine angenommene, nicht eine aus den Grund- leichungen durch Rechnung hergeleitete. Die Abscisse heiße x, er Wurfswinkel ω, der Winkel der Berührungslinie in einem Punkte der Bahn mit der Abscissenlinie sey φ; so wird gerade i (auch von Hrn. von Tempelhoff) angenommen, es sey

$$\tan\varphi = \tan\omega + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc},$$

oraus denn für die Ordinate y folgt (§. 9)

$$y = \tan\omega . x + \tfrac{1}{2} A x^2 + \tfrac{1}{3} B x^3 + \tfrac{1}{4} C x^4 + \text{etc}.$$

Nun mag man zwar aus den Grundgleichungen den Ordina- n diese Form aufzwingen, wie man ein elastisches Blech durch Schrauben in eine vorgezeichnete Krümmung bringen kann; auch ann man zur Rechtfertigung x in dem vorliegenden Falle an- ühren, daß die Gleichung für y die für die Ordinaten an einer Pa- abel mit enthalten muß, welche die Gestalt $y = \tan\omega . x + \frac{1}{2} A x^2$ at; allein bey allem dem, wie kann man hier von der Convergenz er Reihe sich überzeugen? Es sind vielleicht gar viele Glieder öthig, um y durch x nur erträglich genau darzustellen. Da x ne Linie ist, so können die Potenzen dieser Größe nicht als ab- ehmende Größen betrachtet werden. Vielmehr sind, wenn x i Fußen ausgedrückt wird, die Potenzen von x sehr stark zu- ehmende Größen, so daß alles auf die Coefficienten ankommt. Wenn es richtig wäre, daß man jede Größe y durch eine nach n Potenzen einer ihr zugehörigen x ausdrücken könnte, so eße das ja, jede krumme Linie als eine von der parabolischen attung betrachten. Einen Bogen jeder krummen Linie mag an mit geringer Abweichung von der Genauigkeit für parabo- ch halten, aber man muß die Gränzen in jedem Falle bestim- en können. Beym Interpoliren giebt man der einzuschieben- n Größe die Form der Ordinate an einer parabolischen Linie; lein dieselbe darf nicht außerhalb der äußersten, die diese Form apirischer Weise haben, hinaus fallen, oder höchstens sich nicht eit davon entfernen. In dem gegenwärtigen Falle ist es desto denklicher, eine solche Gleichung, wie die angeführte, zu ge- auchen, da der herabsteigende Zweig der Wurfslinie eine von m aufsteigenden sehr abweichende Gestalt hat. Eine Form,

 die

die für die Ordinaten beider Zweige gelten soll, möchte bey einer kleinen Anzahl von Gliedern der Gleichung beiden nur sehr wenig anpassend seyn. Wenn in manchen krummen Linien ganz verschiedene Gestalten ihrer Theile einerley analytische Form haben, so berechtigt das doch nicht, ohne Rechnungsgründe verschiedene Gestalten durch einerley Gleichung darzustellen.

Es ist am besten, hier gar keine Gleichung zwischen x und y zu suchen, sondern jede der Coordinaten durch eine trigonometrische Function des Winkels φ oder $\frac{1}{2}\varphi$ auszudrücken. Für x giebt es eine solche, und für y zwey, worauf die Rechnung durch sich selbst führt. Dabey hat man den Vortheil, daß man die größte Ordinate leicht findet, nebst der ihr zugehörigen Abscisse, daher man die Coordinaten bequem verlegen kann.

Noch ein paar weniger wichtige Bemerkungen. — Im §. 6. soll der Krümmungshalbmesser in die Rechnung eingeführt werden, weil dieser als der vollkommenste Inbegriff aller bekannten und unbekannten Eigenschaften einer krummen Linie anzusehen sey. Wenn demnach, heißt es, die Coefficienten der obigen Reihe für tang φ unmittelbar durch ihn allein bestimmt werden, so sey diese Bestimmung keinesweges bloß eine gemeine Méthode des Indéterminées, sondern nehme dadurch die Natur der directesten und vollkommensten an, die je die Analysis darbieten könne. Was das erste von dem Krümmungshalbmesser behauptete betrifft, so wollen wir dieses nicht untersuchen, aber wir finden nicht, daß der Krümmungshalbmesser benutzt sey. Es wird eigentlich das Differential von $\frac{dy}{dx}$ in die Differentialgleichung für die krumme Linie eingeführt, und die Rechnung, so wie sie hier weiter angestellt wird, ist nichts mehr als eine gewöhnliche Bestimmung unbekannter aber unveränderlicher Coefficienten.

Die Methode §. 15, aus der Schußweite die anfängliche Geschwindigkeit zu suchen, scheint nicht sicher zu seyn, weil sie auf den Coefficienten der obigen Reihe für y beruht, von welchen man vielleicht viele zu nehmen hat, und dann ist hier eine Umkehrung nöthig, die vielleicht wiederum viele Glieder in der umgekehrten Reihe erforderlich macht. Herr Rohde bemerkt selbst, daß der vierte und fünfte Coefficient der umzukehrenden Reihe nicht vollständig sind, oder, wie er sich ausdrückt, daß man

man ihnen die Schwindsucht ansehe. Man müsse also aus der zum Grunde liegenden Reihe noch ein paar Glieder berechnen, aber nun das sechste und siebente Glied weglassen, weil dieses neue Ehepaar wiederum eben so traurig aussehen würde, als jenes vorige. Vermuthlich möchte es nicht allein sicherer, sondern auch leichter seyn, aus einigen angenommenen Wurfsgeschwindigkeiten die Schußweiten zu berechnen, und durch Interpolation die zu der gegebenen Schußweite gehörige Geschwindigkeit zu finden.

In der Vorrede wird ein kürzerer Weg zur Berechnung der horizontalen Schußweiten vorgeschlagen. Es sey, heißt es, nothwendig einmahl an eine nützliche Simplification des ballistischen Problems zu denken. Die in der Abhandlung selbst vorgelegte Bearbeitung sey in diesen nur zu weit gehenden Simplificationszeiten, da man öfters Arbeiten, ohne sie einmal gehörig zu kennen, in Spiele mit Sylphen und Gnomen (??) zu verwandeln suche *), als Creditiv zu jener Simplification erforderlich gewesen. Allein Rec. muß gestehen, daß er den Zusammenhang der abgekürzten Rechnung mit der genauen gar nicht einsieht. Es wird angenommen, daß die ganze Zeit in der krummlinichten Bahn, von der Wurfstelle an bis zu der Horizontalebne, durch diese eben so groß sey, als die Zeit des Steigens und Fallens in einer lothrechten Linie, wenn der Körper mit der verticalen Wurfsgeschwindigkeit in die Höhe geworfen würde, also gerade wie in der Parabel. Der Weg des Körpers nach horizontaler Richtung wird so bestimmt, als wenn er ohne Wirkung der Schwere fortgienge, und die anfängliche Geschwindigkeit die horizontale Wurfsgeschwindigkeit wäre. Die Zeit auf dem horizontalen Wege bey dieser Voraussetzung ist der Zeit bey jener gleich, und so ergiebt sich ein Werth für die Schußweite. Allein dieses ist ein viel zu willkührliches Verfahren. Herr R. vergleicht einige von d'Antoni gemachte Versuche mit seiner Hypothese, vermindert aber vorher die Geschwindigkeiten, welche d'Antoni angiebt, in dem Verhältnisse von 17 : 11, welches etwas stark ist, und findet so die berechnete Schußweite, einmal mit der wirklichen sehr nahe übereinstimmend, aber auch um 386 Fuß und um 214 F. kleiner, einmal um 203 F. größer. Dieses scheint anzuzeigen, daß die Formel nur zufälliger Weise zutreffen kann.

 In

*) Man sehe No. 4. beym Schlusse der Recension. S

In der zweyten Abhandlung über die Aenderungen der Elemente der Planeten- und Kometenbahnen in einem widerstehenden Mittel wird die Untersuchung ohne alle physische Rücksichten, bloß als mathematische Hypothese, vorgenommen. Eigentlich ist die Rechnung nur eine Uebung in dem Exponentialcalcul. Doch mag sie dienen, die Unstatthaftigkeit eines widerstehenden Mittels in dem Weltraume darzuthun, da die Ellipsen, welche die Planeten beschreiben, so wenig veränderlich sind, und diese Veränderungen von andern Ursachen, bey scharfen Rechnungen, hergeleitet werden können. Nur wäre es gut gewesen, zu erklären, wie man bey einer Bahn, die gar keine Ellipse ist, die Elemente einer elliptischen Bahn und deren Veränderungen, bestimmen wollen könne. Man sucht die Ellipse, in welcher bey derselben Centralkraft, der Radius Vector, die Richtung der Bewegung und die Geschwindigkeit, dieselben sind wie in einem gegebenen Puncte der in einem widerstehenden Mittel beschriebenen Bahn. Durch die deutliche Darstellung des Zwecks hätte wirklich die Rechnung an Faßlichkeit und Kürze gewinnen können. Gegen die Formen der hier gebrauchten Reihen möchte dasselbe einzuwenden seyn, was bey der ersten Abhandlung erinnert ist. In §. 15. wird eine Exponentialgröße, wo der Exponent (bey unveränderlicher Dichtigkeit des Mittels) ein beschriebener Bogen ist, durch eine nach den Potenzen des beschriebenen Winkels geordnete Reihe ausgedruckt. Das ist zu willkührlich. Sollten bey einer so transcendenten Bahn dieselben Coefficienten bleiben können, man mag den Bogen anfangen wo man will? Daß nicht bloß trigonometrische Functionen des Winkels angewandt werden können, ist freylich klar; aber darum nicht, daß bloß Potenzen des Winkels Genüge thun. Noch mehr wird dieser Zweifel bey der Reihe §. 17. eintreten. Bey der Reihe §. 18. No. 16. ist der Anstoß, daß sie nicht in die für die Ellipse übergeht, wenn der Widerstand verschwindet. Die Stelle §. 17. „man überlasse das Ganze „dem zarten Krümmungshalbmesser“ ist dem Rec. unverständlich. Auch scheint der Krümmungshalbmesser hier keinen Einfluß zu haben.

---

4. Ver-

4. Vergleichung der Lagrangischen und combinatorischen Reversionsformeln für Reihen; auf Veranlassung einer Stelle in der so eben recensirten Schrift. Von dem Herausgeber.

In der Vorrede (S. VIII.) zu vorher recensirten beyden Abhandlungen, äußert sich Herr Hauptmann Rohde über die itzt nur zu weit gehenden Simplifications-Zeiten, da man öfters Arbeiten, ohne sie einmal gehörig zu kennen, in Spiele mit Sylphen und Gnomen zu verwandeln suche. — Der Herr Verfasser vorstehender Recension hat dabey (S. 357) zwey Fragezeichen aufgestellt, und dadurch sein Befremden über diese Aeußerung zu erkennen gegeben. Auch ich muß gestehen, daß mir eine solche Simplificationsmethode, wie hier charakterisirt wird, nicht bekannt sey. Indessen ist die Misbilligung eines Verfahrens, das ganz oder doch größtentheils auf ein leeres Spiel, wie das mit Sylphen und Gnomen, hinausläuft, sehr gerecht, und der Tadel um so verdienter, wenn man sich noch damit an Arbeiten macht, die man nicht einmal gehörig kennt; vielleicht nur halb, oder auch wohl gar nicht versteht —

Ganz anders verhält es sich mit der combinatorischen Analysis. Diese lehrt zwar auch ihre Resultate gleichsam spielend finden; aber —

hi ludi in seria ducunt.

Dieses, und die häufigen Anwendungen, die bisher davon auf sehr wichtige zum Theil sehr verwickelte Aufgaben bereits gemacht worden sind, haben ihr auch das Vertrauen und die Achtung aller Kenner erworben, die sie einer genauen und strengen Prüfung unterworfen haben.

Hierbey habe ich nun weiter nichts zu erinnern; auch ist es nicht diese, sondern eine andere Stelle der Vorrede, welche gegenwärtigen Aufsatz veranlaßt hat. „Meine Abhandlung über „das ballistische Problem,“ sagt daselbst (S. VII) der Herr Verfasser, „ist so abgefaßt, daß des Lesers Auge vorzüglich auf „alle unsere Reversionsmethoden ununterbrochen fixiret wird. „Keine einzige derselben (weder die Newtonische, noch die von „Herrn de la Grange, noch andere ꝛc.) führt hier unmittel„bar zu convergirenden Reihen, und eben so wenig verhilft

 „dazu

„dazu die combinatorisch-analytische Methode." — Hier wird es für mehrere Leser nöthig seyn, das Verhalten der de la Grangischen und combinatorischen, Formeln und Verfahren bey Umkehrung der Reihen, in nähere Betrachtung zu ziehen; um so mehr, da Herr R. von erstern in der Folge mehrmals Gebrauch gemacht hat, und es also scheinen möchte, als könne dadurch bey dem ballistischen Problem etwas geschaft werden, was letztere zu leisten unvermögend seyen. Daß übrigens generelle Formeln in ihrer Anwendung auf specielle Untersuchungen nicht immer geradezu und unmittelbar auf convergirende Reihen führen, ist bekannt; auch bin ich überzeugt, der Herr Verfasser habe das nur überhaupt hier anmerken, keinesweges aber diesen Formeln zum Vorwurf anrechnen wollen. Die zum Grunde liegenden Data und Bedingungen eines Problems, und die damit verbundene Beschaffenheit der Coefficienten seines analytischen Ausdrucks, erschweren nicht selten die Anwendung und hindern die Convergenz; daher man in solchen Fällen vornehmlich zu Umformungen und Reductionen der Reihen auch wohl zu Einführung anderer (wenigstens Abänderung einiger der gegebenen) Elemente, seine Zuflucht zu nehmen pflegt. Was nun insbesondere die zu solcher Absicht am häufigsten in Ausübung gebrachten Transformationen und Reductionen der Reihen anbetrift: so hat neuerlich Herr D. Kramp eine besondere sehr ergiebige Quelle dafür eröfnet, aber noch nicht öffentlich bekannt gemacht. Sein auf Summirung der Reihen angewendeter Calcul der Facultäten der Zahlen (die Anm. hier S. 352) scheint zu Bewürkung der Convergenz der Reihen recht geeignet zu seyn. Davon überzeugen mich nicht nur die Hefte seiner Summationsmethode, die ich in Händen habe, sondern auch die ausdrückliche Versicherung des Erfinders in seinem Briefe vom 14 Jänner 1798 — „Sie werden sich wundern (ich „führe hier Herrn K's eigene Worte an) wie meine Lehre von „den Facultäten mit gebrochenen Exponenten bisher gewachsen „ist. In meinen Händen sind sie ein allgemeines Mittel, Rei„hen, die noch so sehr divergiren, nach Belieben convergent „zu machen."

I. Umkehrungsformeln des Herrn de la Grange.

Die hierher gehörigen, von Herrn R. in seiner Abhandlung über das ballistische Problem gebrauchten, Umkehrungsformeln

eln des Herrn de la Grange sind in einem Memoire *) ent-
lten, das unter die vorzüglichsten analytischen Arbeiten dieses
oßen Geometers zu rechnen ist. In demselben wird eine sehr
ıfache und sehr allgemeine Methode angegeben, die Wurzeln
r Buchstabengleichung $o = a - bx + cx^2 - dx^3 + etc$ in
ıendlichen Reihen darzustellen; auch werden die Vorzüge die-
r Methode vor andern bis dahin bekannten, unter 5 Numern
ısgeführt, und zugleich auf der ersten Seite (p. 251) von dem
egenstande selbst, und den Vorzügen seiner Behandlung, deut-
he Nachweisung gegeben. Das Ganze ist in vier Abschnitte
ıgetheilt. Der erste (§. I. p. 252 — 261) lehrt die Sum-
ıe der Potenzen jeden Grades aller Wurzeln einer gegebenen
leichung, wie die obige, finden, und dient zugleich als Vor-
reitung des Folgenden; der zweyte (§. II. p. 261 — 292)
igt, wie man den Werth einer von den Wurzeln der Glei-
ıung, oder einer beliebigen Function dieser Wurzel, in einer
eihe ausdrücken könne; der dritte (§. III. p. 292 — 313)
eiset das Verfahren nach, alle Wurzeln der gegebenen Glei-
ıung in unendlichen Reihen darzustellen; lehrt, wie man die
Burzeln gehörig von einander unterscheiden könne (art. 23.
. 293); welche Wurzel die erste, zweyte, dritte u. s. w. ge-
ennt werde (art. 24. p. 294); daß überhaupt, was immer für
ne Gleichung gegeben seyn mag, jedesmal so viel verschiedene
eihen für ihre Wurzeln sich angeben lassen, so oft man die
Glieder dieser Gleichung, zu zwey und zwey combiniren (art.
7 — 32. p. 300 — 305), und solche als die beyden ersten
Glieder der allgemeinen Gleichung $\alpha - x + \varphi x = o$ ansehen
ann (art. 31. p. 304); daß die in den verschiedenen Exempeln
es vorhergehenden zweyten Abschnitts gefundenen Reihen, keine
ndern als erste Wurzeln der zugehörigen Gleichungen sind

Z 5 (art.

*) Nouvelle Méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des Séries. Hist. de l'Acad. Roy. des Sciences etc. Tome XXIV. Année 1768. à Berlin 1770. Der Hauptsatz steht daselbst §. II. art. 15. p. 275. Die hier im Text erwähnten, von jenem Satze abgeleiteten und von Herrn R. in seiner ersten Abhandlung nur allein gebrauchten beyden Formeln (Ebend. art. 20. p. 287. 288 und art. 21. p. 290. 291). Noch muß ich erinnern, daß man hier und in der Folge durchgängig gedachtes Memoire für die daraus citirten Stellen und Formeln immer vor Augen haben müsse. Nur dadurch habe ich vieles in der Kürze sagen und darstellen können, was sonst sehr weitläuftig ausgelaufen seyn würde.

(art. 33. p. 306), d. i. solche, bey deren Aufsuchung man die beyden Anfangsglieder a und b x als combinirte erste Glieder betrachtet, und deren Werthe für a = o verschwinden; der vierte und letzte Abschnitt (§. IV. p. 314 — 326) handelt von der Convergenz und Divergenz der gefundenen Reihen, und den aus dem Gesetze selbst, das sie befolgen, abgeleiteten Kennzeichen dafür.

So viel schien mir nöthig zu seyn, im Allgemeinen von dem Inhalte dieses Memoires in gedrängter Kürze hier beyzubringen. Die Leser, die es noch nicht kennen sollten, werden daraus das Vielumfassende des Lagrangischen Verfahrens: aus der Gleichung $\alpha - x + \varphi x = 0$, wo φx jede Function von x bedeutet, ihre Wurzeln x, oder jede beliebige Function derselben, ψx, in Reihen auszudrücken, mit einem Blick übersehen. Der (art. 14, 15) angegebene Ausdruck für ψx (dort ψp, für eine bestimmte Wurzel p; der Werth dafür steht auch im Arch. H. I. S. 89) dient dabey als allgemeine Auflösungsreihe. Eben derselbe gilt aber auch (nach der Behandlung §. II, wo die Wurzel p zugleich als erste angesehen, und $\varphi x = \frac{c x^2 - d x^3 + etc}{b}$ angenommen wird) als allgemeine Umkehrungsformel für Reihen. Denn die Bedingung (die natürlichste von allen, auf die man auch vor allen übrigen zuerst verfällt) für die erste Wurzel der Gleichung $a - b x + c x^2 - d x^3 + etc$ die beyden ersten Glieder $a - b x$ als combinirte anzusehen, und solche mit den ersten Gliedern $\alpha - x$ der allgemeinen Gleichung $\alpha - x + \varphi x = 0$ zu vergleichen (art. 33, 14, 18) stimmt vollkommen mit den, übrigens gar sehr von einander verschiedenen, Verfahren überein, nach welchen man die bis itzt bekannten Umkehrungen für $y = b x + c x^2 + d x^3 + etc$ und ihre Formeln gefunden hat. Diese Formeln, zu denen man, nach den verschiedenen Ansichten auf ganz verschiedenen Wegen, nach und nach gekommen ist, können daher, nur nach ihrer äußern Gestalt, der mehrern oder mindern Allgemeinheit, der größern oder geringern Leichtigkeit in der Anwendung, nicht aber in Absicht auf ihre Resultate, verschieden seyn. Herr de la Grange findet seine Formel, indem er x als die Wurzel (aber als bestimmte, erste, p) der gegebenen Gleichung betrachtet (daher er auch α für y setzt), und generalisirt sie im Verfolg seiner Analyse dergestalt, daß sie allgemein den Werth für ψx, jeder Function von x, darstellt. Und in dieser

Allge-

llgemeinheit übertrift sie jede andere bis itzt bekannte Umkeh-
ngsformel, nicht aber in Absicht auf Leichtigkeit in der An-
endung, wo ihr und allen übrigen die combinatorische vorzu-
ehen ist *).

Die häufigste Anwendung der Formel geschieht für die
Werthe $\psi x = x^m$, oder $\psi x = \log. x$, wo man nehmlich irgend
ne Potenz oder den Logarithmen von x durch Umkehrung
uszudrücken sucht. Herr de la Grange hat daher diese beyden
Werthe von ψx besonders betrachtet, und in Formeln ausführ-
ch dargestellt. Ich werde hier nur die von x^m aufführen,
heils, weil das, was bey dieser erinnert wird, auch sogleich
uf jene sich anwenden läßt, theils aber auch, weil Herr R.
ur davon in seiner Abhandlung Gebrauch gemacht hat.

In oft gedachtem Memoire werden (art. 20 und 21) zwo
Gleichungen:

$$0 = \alpha - x + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \text{etc}$$

$$0 = \alpha - x^r + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \delta x^{p+2q} + \text{etc}$$

zum Grunde gelegt, und für beyde der Werth von x^m, für jene
(art. 20. p. 287, 288), für diese (art. 21. p. 290. 291) in
mehrern Gliedern nachgewiesen, bey denen nachstehende, nach
folgendem Gesetze von einander abhängige, Coefficienten
(p. 286)

$A = \beta$;
$B = \gamma$; $B' = \beta A$
$C = \delta$; $C' = \gamma A + \beta B$
$D = \varepsilon$; $D' = \delta A + \gamma B + \beta C$
$E = \zeta$; $E' = \varepsilon A + \delta B + \gamma C + \beta D$
: : : : : : : : :

C''

*) So habe ich schon in meinem Aufsatze über diese Formel (Arch.
H. I. S. 91, 92) geurtheilt. Ebendaselbst (S. 81—84) findet
man auch Herrn Prof. Pfaffs ganz strengen Beweis des Lagran-
gischen Hauptsatzes, aus einem noch allgemeinern Satze,
$y = x - z\phi x$, abgeleitet, und gezeigt, wie man daraus ψx,
jede Function von x, in y und z, durch eine nach Potenzen von
z geordnete Reihe ausdrücken könne. Bey Herrn de la Grange
ist $z = 1$ und $y = \alpha$. Ich betrachte übrigens in der Folge, mei-
nem Zwecke gemäß, den Ausdruck für ψx bloß als Umkehrungs-
formel (wie in Herrn de la Gr. Mem. §. II.) nicht als Auflö-
sungsreihe, um dadurch alle Wurzeln (wie dort §. III.) zu
finden. Ueber die Formel selbst, und ihre Anwendung zu Auf-
findung der Wurzeln der Gleichungen, ausführliche Belehrun-
gen in Herrn Prof. Fischers Theorie der Dimensionszeichen,
besonders im zweyten Theile und dem Zusatze am Ende desselben.

$C'' = \beta B'$

$D'' = \gamma B' + \beta C'$ $\qquad D''' = \beta C''$

$E'' = \delta B' + \gamma C' + \beta D'$ $\quad E''' = \gamma C'' + \beta D''$

. . . .

$E'''' = \beta D'''$ u. s. w. vorkommen, deren, auf so weit berechnete, in $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots$ ausgedrückte, Werthe (p. 292) stehen.

Und diese, auf recurrirende Substitution beruhende Ausdrücke der Coefficienten, welche, so leicht auch ihr Gesetz ist, bey ihrer Berechnung dennoch in Weitläuftigkeit führen, die man gern vermeidet, wenn sie sich vermeiden läßt — diese noch unreducirten Formen von Coefficienten sind es, welche hindern, daß sowohl die für x^m (art. 20, 21) als viele andere, ausser den eben angeführten, in obgedachtem Memoire vorkommenden Formeln, die Geschmeidigkeit und Leichtigkeit in der Anwendung nicht haben, die sie ausserdem haben könnten.

Dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, darf man nur überall in den Lagrangischen Formeln

statt A, B, ... B', C', ... C'', D'', ... etc
itzt a^1A, a^2A, ... b^2B, b^3B, ... c^3C, c^4C, ... etc

das heißt, statt der willkührlichen unreducirten, die zugehörigen combinatorischen reducirten Formen setzen. Ich will hier beyspielsweise von obigen beyden Ausdrücken für x^m den zweyten (art. 21) auf die Gleichung

$$0 = \alpha - x^r + \beta x^p + \gamma x^{p+q} + \text{etc}$$

sich beziehenden, wählen; aus welchem jener erste (art. 20) sogleich folgt, wenn man in letzterm $r = 1$ setzt. Zugleich will ich in vorstehender Gleichung, y statt α setzen, und ihre Glieder nach der Form $y = x - \varphi x$ (vorh. Anm.) so ordnen,

$$y = x^r - \beta x^p - \gamma x^{p+q} - \delta x^{p+2q} - \text{etc}$$

wie man die Glieder der umzukehrenden Reihe gewöhnlich ordnet.

Es ist also (art. 21. p. 290. 291) wenn man, statt des dortigen ϱ seinen Werth (p. 289) in α (d. i. hier, in y), also $\varrho = y^{\frac{1}{r}}$ setzt, alle y's auf die rechte Seite bringt, auf der linken bloß x^m beybehält, und die Coefficienten von y sämtlich durch obige Combinationsclassen und Binomialcoefficienten ausdrückt:

x^m

$$
\begin{aligned}
x^m = {} & y^{\frac{m}{r}} \\
& + \frac{m}{r} 1 . a^1 A y^{\frac{m+p-r}{r}} \\
& + \frac{m}{r} \left\{ \begin{aligned} & 1 . a^2 A y^{\frac{m+p+q-r}{r}} \\ & + \frac{1}{2} . \frac{m+2p-r}{r} \mathfrak{A} b^2 B y^{\frac{m+2p-2r}{r}} \end{aligned} \right\} \\
& + \frac{m}{r} \left\{ \begin{aligned} & 1 . a^3 A y^{\frac{m+p+2q-r}{r}} \\ & + \frac{1}{2} . \frac{m+2p+q-r}{r} \mathfrak{A} b^3 B y^{\frac{m+2p+q-2r}{r}} \\ & + \frac{1}{3} . \frac{m+3p-r}{r} \mathfrak{B} c^3 C y^{\frac{m+3p-3r}{r}} \end{aligned} \right\} \\
& + \frac{m}{r} \left\{ \begin{aligned} & 1 . a^4 A y^{\frac{m+p+3q-r}{r}} \\ & + \frac{1}{2} . \frac{m+2p+2q-r}{r} \mathfrak{A} b^4 B y^{\frac{m+2p+2q-2r}{r}} \\ & + \frac{1}{3} . \frac{m+3p+q-r}{r} \mathfrak{B} c^4 C y^{\frac{m+3p+q-3r}{r}} \\ & + \frac{1}{4} . \frac{m+4p-r}{r} \mathfrak{C} d^4 D y^{\frac{m+4p-4r}{r}} \end{aligned} \right\} \\
& + \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc} \qquad \text{etc} \\
& \qquad \begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Hier ist $y^{\frac{m}{r}}$ ein gemeinschaftlicher Factor in alle Glieder nd ihre Theile; daher Herr de la Grange dafür das jenem gleich-iltige ρ^m als Divisor unter x^m setzt. Dadurch, und wenn an, nach seinem Beyspiele, auch die übrigen Potenzen von y ρ ausdrückt, erscheinen solche in einer etwas einfachern Gestalt. Nir hat es, vornehmlich wegen der unmittelbaren Vergleichung it dem folgenden, besser geschienen, keinen fremden Buchstaben vie hier ρ) dabey einzuführen, und die zusammengehörigen Po-nzen von y nicht zu trennen. Setzt man hier $r = 1$, so ver-andelt sich die gegenwärtige Formel für x^m (art. 21) in die ein-

fachere

fachere für x^m (art. 20); deren besondere Darstellung also hier nicht nöthig ist. Der untergesetzte Zeiger bleibt in beyden Fällen derselbe; die Vorzeichen der Buchstaben β, γ, δ ... im Zeiger und in der umzukehrenden Gleichung $y = x^r - \beta x^p - \gamma x^{p+q} - \delta x^{p+2q}$ — etc sind einander entgegengesetzt.

Das Fortgangsgesetz der Formel fällt sehr deutlich in die Augen. Zugleich ist — und das ist bey weitem das Wichtigste — was jene Zeichen A, B ... B′, C′ ... C″, D″ ... D‴, E‴ ... u. s. w. noch involvirt und durcheinandergeworfen, enthalten, in ihren combinatorischen Surrogaten $a^n A$, $b^n B$, $c^n C$, $d^n D$ ... aufs vollkommenste evolvirt und auseinander gelesen. Die combinatorischen Zusammensetzungen und Involutionen, auf welche sich diese und ähnliche Zeichen beziehen, sind nehmlich, selbst nach dem Ausspruche jenes vortreflichen Analysten (hier S. 349 Anm.) Formen von bekannter sehr einfacher Structur, die man, ohne alle lästige Substitutionen und Reductionen, ohne alle weitere Vorbereitung anordnen, und, wenn man so sagen will, gleichsam spielend darstellen kann (polyn. Lehrs S. 187—189 u. f. mehrere Beyspiele). Durch ihre Beyhülfe kann man daher jedes Glied des Werthes von x^m, so wie jeden einzelnen Theil desselben, ausser der Ordnung, und ohne die vorhergehenden zu wissen, berechnen; welches bey dem Ausdrucke desselben, vermittelst der Zeichen A ...; B′ ...; C″ ...; D‴ ...; etc (art. 20, 21) der Fall nicht ist.

Exempel. Für $y = x^2 - \beta x^3 - \gamma x^4 -$ etc das 5te Glied der Reihe für x, d. i. x 7 5, durch Umkehrung zu suchen.

Aus Vergleichung der hier gegebenen, mit der obigen Grundreihe (S. 364) folgt $r = 2$; $p = 3$; $q = 1$. Diese Werthe in das 5te Glied der zugehörigen Formel für x^m gesetzt, und $m = 1$ genommen, giebt

$$x\,7\,5 = \tfrac{1}{2}\left[\begin{array}{r} 1.\,a^4 A + \tfrac{1}{2}.\ {}^{\frac{7}{2}}\mathfrak{A}\, b^4 B \\ + \tfrac{1}{3}.\ {}^{\frac{9}{2}}\mathfrak{B}\, c^4 C + \tfrac{1}{4}.\ {}^{\frac{11}{2}}\mathfrak{C}\, d^4 D \end{array}\right] y^{\frac{5}{2}}$$

Daraus folgt, statt der Combinationsklassen die einzelnen Complexionen mit ihren Versetzungszahlen nach obigem Zeiger gesetzt (polyn. Lehrs. a. a. O. oder auch Inf. Dign. Tab. V. p. 167)

$$x\,7\,5 = \tfrac{1}{2}\left[\varepsilon + \frac{1}{2}.\frac{7}{2^1}\,(2\beta\delta + \gamma^2) + \frac{1}{3}.\frac{9.7}{2.2^2}.3\beta^2\gamma + \frac{1}{4}.\frac{11.9.7}{2.3.2^3}.\beta^4\right] y^{\frac{5}{2}}$$

voll-

vollkommen wie in Herrn Hauptmann Rohde's Abhandlung über das ballistische Problem (S. 18. no. 5) wenn man α statt des hiesigen y's setzt. Ich habe hier mit Fleiß einige Zahlenfactoren, oben und unten, noch nicht gehoben, damit man den Betrag der einzelnen Classen $a^4A \ldots b^4D$ mit den Versetzungszahlen ihrer Complexionen deutlicher vor Augen habe.

Der unendlich mannichfaltige Gebrauch und Nutzen, den diese Coefficienten in der Analysis gewähren, hat Herrn de la Grange veranlaßt, eine weiter fortgesetzte Berechnung derselben, als von ihm (art. 22. p. 292. nur bis mit E^{IV}) gegeben ist, nachdrücklich zu empfehlen, weil sie für alle mögliche Functionen von x dienen könnten. Eine solche Berechnung würde genau die Glieder meiner, auf dem viel leichtern Wege der combinatorischen Involution construirten Tafel (Infin. Dign. Tab. V. p. 167 oder Nov. Syst. Perm. Tab. III. p. LIX) geben, wenn man darinn $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ statt $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ setzt. Und so würde denn dies zugleich die Functionen näher bestimmen, für welche dergleichen Coefficienten nützlich wären, solche nämlich, deren Entwickelung auf Größen führt, deren einfachste Darstellung auf Verbindungen gutgeordneter Complexionen zu bestimmten Summen, mit ihren Versetzungszahlen, beruhet. Dahin gehört unter mehrern, die bey der Umkehrung zum Grunde liegende Entwickelung gebrochener Functionen in Reihen, bey welcher auch Herr Magister Töpfer (Comb. Anal. S. 116—122) die Identität der osterwähnten beyderley Coefficienten wahrgenommen und (das. S. 123) sehr richtig geurtheilt hat; eine genauere Analyse dieser Coefficienten, auf die Herr de la Grange nothwendig hätte verfallen müssen, wenn es ihm eingefallen wäre, die Abhängigkeit der folgenden von allen vorhergehenden schlechterdings aufzuheben — eine solche Analyse wäre für ihn schon allein hinreichend gewesen, die ausgedehnte höchstwichtige Verbindung der Combinationslehre mit der Analysis deutlich wahrzunehmen und weiter darüber nachzudenken.

Eine noch nähere Veranlassung zu einer solchen Analyse stellte sich ihm in der Folge (Mem. de l'Ac. ... Berlin, année 1769. p. 312) dar, wo von Entwickelung der unbestimmten Potenz eines Polynoms die Rede ist. Daselbst werden die Werthe der Coefficienten P, Q, R ... ihrer Glieder nach der Ordnung, in den gewöhnlichen bekannten recurrirenden Ausdrücken angegeben, und über eine zu bewirken mögliche Aufhebung der Dependenz dieser

ser Coefficienten von einander, folgende Aeußerung gethan: Si on ne vouloit pas faire *dépendre* les coëfficiens P, Q, R etc, les uns des autres, on pourroit les déterminer *immédiatement* de la maniere suivante: Qu'on cherche, par exemple, le coëfficient de x^m dans la puissance n du polinome $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc, je dis. 1°. que ce coëfficient sera formé de tous les termes, qui peuvent être représentés par $A^p B^q C^r D^s \ldots$, p, q, r, s etc, étant des nombres entiers positifs, et tels, que $p + q + r + s +$ etc $= n$, et $1q + 2r + 3s +$ etc $= m$. 2°. que chacun de ses termes aura pour coëfficient numérique

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots p)(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots q)(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r) \ldots}$$

La démonstration de ce théoreme est aisée a tirer de la théorie des combinaisons, et nous ne croyons pas devoir nous y arrêter. Einen ähnlichen, das allgemeine Polynom $a + b + c + d +$ etc betreffenden Satz, hatte schon lange vorher Jacob Bernoulli (Opp. T. II. p. 994—996) gegeben, aber auch zugleich die vollständigste Auflösung desselben nachgewiesen. Herr de la Grange hingegen hat bey seinem, auf die (nach Potenzen einer veränderlichen Größe fortgehende) Reihe $A + Bx + Cx^2 +$ etc sich beziehenden, in der Anwendung viel häufiger vorkommenden Satze, sich begnügt, das Verfahren zu Auffindung der Potenzcoefficienten bloß im Allgemeinen angezeigt zu haben. Die Aeusserung, daß ein Beweis des Zahlencoefficientens, oder des Theorems (no. 2), hier nicht nöthig sey, ist sehr gegründet, um so mehr, da solches Jac. und Joh. Bernoulli, Leibnitz und de Moivre (man sehe die in Inf. Dign. §. XII. XIII. von mir citirten Stellen) vorlängst gebraucht und erwiesen haben. Anders verhält es sich mit der (no. 1) nur obenhin berührten Zusammensetzung des gesuchten Buchstabencoefficientens, nach den beygefügten beyden Bedingungsgleichungen, deren Ausführung hier nur gefordert *), aber weder da, noch sonst

*) Es ist nämlich in no. 1 nur angegeben, was geschehen soll; die Ausführung aber, oder das wie? wird immer etwas weitläuftig ausfallen, so lange man dabey nicht auf combinatorische Verfahren verfällt, die alles auf einmal, und über alle Erwartung hinaus, verkürzen und erleichtern. Herr de la Grange sagt, der Beweis des Theorems (no. 2.) lasse sich aus der Combinationstheorie ableiten; eben das hätte auch wegen eines Verfahrens für no. 1 gesagt werden können. Der Nutzen der Combinationslehre

onst irgendwo, gegeben, oder auch nur versucht worden ist; ie aber neuerlich Herr D. Kramp (polyh. Lehrs. S. 102) hne von jenem Satze etwas zu wissen, vollständig auseinander gesetzt, auch auf die allgemeinere Grundreihe $a x^{\alpha} + b x^{\beta} + c x^{\gamma} + etc$ ngewendet hat. Die Ausführung der bedingten Forderung no. 1) leitet, wie (a. a. O. S. 119) ist erinnert worden, auf ie Auflösung eines unbestimmten Problems, dessen Zusammenhang mit den combinatorischen Operationen, und wie solhe mit großem Vortheile dabey anzuwenden seyen, Herrn de la Grange wohl nicht leicht entgangen seyn dürfte, wenn es ihm efallen hätte, die Form für die Buchstabencomplexionen no. 1) eben so deutlich als den Ausdruck für die Versetzungszahlen derselben (no. 2) anzugeben — das, was nur obenhin nd im Allgemeinen gefordert worden, in einer besondern Anwendung auseinandergesetzt, sich und seinen Lesern vorzulegen. Auf welchem, von diesem ganz verschiedenem, Wege ich zu em independenten Ausdrucke dieser Coefficienten gekommen in, zeigt meine Analysis derselben (Infin. Dign. §. XXI.). Ich verfiel zuerst (das. p. 71, 3) auf eine Lokalformel, die den anzen Inhalt des $(n+1)$ten Gliedes der Potenz $(1+y)^m$, nd was darinn von den Potenzen $y^1, y^2, y^3 \ldots y^n$ vorkommt, deutlich angiebt, und diese Formel leitete mich geradezu auf das combinatorische von mir sogenannte Discerptionsproblem (§. XXII) und beyder Verbindung auf den combinatorisch-analytischen Ausdruck (§. XXIII, 1 - 3; XXV, 1, 2) des allgemeinen Gliedes der Potenz; und hier zeigte sich mir zuerst die so wichtige innige Verbindung zwischen Lokal- und combinatorisch-analytischen Formeln, von welcher jene immer in möglichster Kürze den Inhalt, diese die combinatorische Ausführung desselben angeben. Die unmittelbare Vergleichung beyderley

lehre in der Analysis ist nämlich nur einseitig und sehr beschränkt, wenn man bey ihr (was man bisher nur allein gethan hat) bloß auf die Anzahl und Menge der einzelnen Complexionen und Fälle, nicht aber (was doch mit der eigentlichen Analysis in weit engerer Verbindung steht) auch auf die wirkliche Darstellung derselben Rücksicht nimmt (polyn. Lehrs. S. 297. §. 207). Dabey zeigt sich gleichwohl eine große Mannichfaltigkeit gleich leicht anzuordnender Formen, davon ich, was den gegenwärtigen Satz anbetrift (Arch. d. Math. H. IV. S. 385—423) ausführlich gehandelt habe. Eine merkwürdige, mit der Forderung no. 1 im Texte zu vergleichende Stelle von de Moivre, habe ich (pol. Lehrs. S. 119. 4.) angeführt.

derley Formeln findet man an mehreren Orten (auch pol. Lehrs. S. 13. Anm. S. 247. §. 153). Wie günstig übrigens Herr de la Grange von meinen combinatorisch-analytischen Ausdrücken, Formeln, und den daraus fließenden Zahlen- und Buchstabentafeln, geurtheilt habe, erhellet aus der untenangeführten Stelle *) mit mehrerm.

Von dieser, mit der Hauptsache in der genauesten Verbindung stehenden Digression, gehe ich wieder zu den Umkehrungsformeln zurück. Der Umstand, daß, in Beziehung auf Wurzeln, für welche die Glieder verschiedentlich zu combiniren sind (mehrere Beyspiele im art. 39. p. 309 — 313 des oftererwähnten Mem.) in der umzukehrenden Grundreihe $y = x^r - \beta x^s - \gamma x^t - \text{etc}$ auch ein Glied x^r vorhanden ist, dessen Exponent

nent

*) Aus einem Briefe vom 10 Aug. 1779, als Antwort auf die von mir überschickte Schrift: *Infinit. Dign. Historia, Leges ac Formulae* — „J'ai lu votre ouvrage avec beaucoup de satisfaction et d'interet, et je le regarde comme très utile à l'histoire et aux progrès de l'Analise. La regle generale que vous y donnez pour former les puissances d'un polinome quelconque ne me paroit rien laisser à desirer sur cet objet. J'aurois seulement souhaité y trouver des tables *toutes construites* pour le developpement des differens termes de ces puissances, et auxquelles on pût toujours avoir recours dans le besoin. Ce seroit une entreprise d'une très grande utilité, d'enrichir les differentes branches de l'Analise de pareilles tables. — Dans l'etat où est aujourd'hui cette science un semblable ouvrage seroit certainement bien plus avantageux que tant de cours et d'elemens, qu'on ne cesse de publier depuis quelque tems, qui ne sont pour la plupart que des copies plus ou moins imparfaites les uns des autres." Die Infin. Dign. enthalten in einem Anhange 10 für die Analysis sehr brauchbare Tafeln, die sich leicht erweitern und vermehren ließen. Die Tafeln, die hier Herr de la Gr. vornehmlich weiter fortgesetzt wünscht, sind die dortigen Tab. V. und VI. Das hat, wenn man combinatorische Verfahren darauf anwendet, nicht die geringste Schwierigkeit, und kann (Infin. Dign. p. 89. 90 [wegen Tab. VI] und polyn. Lehrs. S. 187 oder 224 [wegen Tab. V] mit Beyhülfe der Versetzungszahlen) gleichsam spielend geschehen. Ein neuer Vortheil, den die Combinationslehre durch so große Erleichterung der Construction solcher Tafeln zeigt! So nützlich aber auch dergleichen Tafeln nur immer seyn mögen; so sind doch die combinatorisch-analytischen, und die in engster Verbindung mit ihnen stehenden, Local-Ausdrücke und Formeln noch ungleich wichtiger; auch können selbige, erforderlichen Falls, sogleich und von allen Tafeln unabhängig mit größter Leichtigkeit in ihre Elemente aufgelöst und ganz entwickelt dargestellt werden.

: r mit den Exponenten p, p + q u. s. w. der übrigen, nach
inden in einer arithmetischen Reihe seyn oder nicht seyn kann:
r Umstand macht den Ausdruck für x^m (S. 365) weit-
tiger, als er sich geben läßt, wenn die Exponenten der
undreihe sämtlich in arithmetischer Progression fortgehen.
nn aber die Werthe für r, p, p + q, p + 2q, u. s. w.
hmetisch steigen oder fallen, oder (was damit auf eins hin-
kommt) wenn die Exponenten der Reihe für y, wie gewöhn-
, gleich anfangs p, p + q, p + 2q, u. s. w. sind, so läßt sich
er Formel für x^m, außer der, durch Einführung der Combi-
ionsclassen a^nA, b^nB, c^nC ... schon beygebrachten Verbesse-
g, noch eine nicht weniger wichtige Reduction anbringen,
nittelst welcher die nach ihr bestimmten Werthe der einzelnen
eder dieser Formel nicht selten ansehnlich abgekürzt, und zum
brauch bequemer gefunden werden. Diese Reduction, auf
che Herr de la Grange nicht verfallen ist, soll sogleich gege-
werden.

I. Lokal- und combinatorisch-analytische Umkehrungs-
formeln.

Hier können (wie oben S. 365) nur die Formeln für x^m
geführt werden. Die Beweise derselben, und ihre Beziehung
einander, erhellen aus den (polyn. Lehrs. S. 297 — 299)
geführten Stellen.

A. Lokalformel für die Umkehrung der Reihen.

1. Für $y^1 = \alpha x^r + \beta x^{r+d} + \gamma x^{r+2d} + etc$ ist (polyn.
hrs. S. 297, 4; hier m für s, und statt der dortigen ^0m,
1 ... ihre Werthe aus (3) gesetzt)

$$
\begin{aligned}
x^m = & \frac{m}{m} q^{-\frac{m}{r}} \quad \varkappa 1 . y^{\frac{m1}{r}} \\
& + \frac{m}{m+d} q^{-\frac{m+d}{r}} \quad \varkappa 2 . y^{\frac{(m+d)1}{r}} \\
& + \frac{m}{m+2d} q^{-\frac{m+2d}{r}} \quad \varkappa 3 . y^{\frac{(m+2d)1}{r}} \\
& + \frac{m}{m+3d} q^{-\frac{m+3d}{r}} \quad \varkappa 4 . y^{\frac{(m+3d)1}{r}} \\
& + \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

$q [\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots]$ 2. Dar-

2. Daraus folgt das (n + 1)te Glied, oder

$$x^m 7(n+1) = \frac{m}{m+nd} q^{-\frac{m+nd}{r}} \alpha(n+1) . y^{\frac{(m+nd)l}{r}}$$

wo q die gegebene (1) oder überhaupt jede andere Reihe, wie $\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots$ bedeuten kann, die 1) mit der gegebenen dieselben Coefficienten hat, und 2) deren Exponenten der veränderlichen Größen in arithmetischer Progression steigen oder fallen; welches durch die Scale $q\,[\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots]$ angezeigt wird (vgl. Lehrs. S. 298, 4).

3. Diese Lokalformel zeigt, aus welchen Coefficienten welcher Potenzen der Reihe q die Coefficienten der Umkehrungsreihe (der Reihe für x^m) zusammengesetzt seyen. Durch die Reduction der letztern Coefficienten auf die erstern, wird die sonst so schwierige Umkehrung, auf eine für die combinatorische Analysis so leichte Aufgabe zurückgeführt: $q^{\mu} \alpha(n+1)$ für jeden Werth von μ (also auch für $\mu = -\frac{m+nd}{r}$) außer der Ordnung darzustellen (vgl. Lehrs. S. 232. 233).

4. Der Ausdruck für x^m bleibt immer derselbe, wie auch nun die Vorzeichen der Coefficienten der gegebenen Reihe (1), die hier sämtlich + sind, sich abändern mögen. Diese Änderung hat nämlich bloß auf die Potenz von q Einfluß, keinesweges aber auf den allgemeinen Ausdruck der Formel. Diese gilt also auch für die gleich folgende Reihe, die ich wegen der unmittelbaren Vergleichung mit der Lagrangischen (S. 364, 365) in B zum Grunde legen werde.

B. Combinatorisch-analytische Umkehrungsformel.

5. Für $y^l = \alpha x^r - \beta x^{r+d} - \gamma x^{r+2d} +$ etc, ist

$$x^m = \left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{\frac{m}{r}}$$

$$+ \frac{m}{r} \frac{a^1 A}{\alpha} \left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{\frac{m+d}{r}}$$

$$+ \frac{m}{r} \left[\frac{a^2 A}{\alpha} + \frac{m+2d+r}{r} \frac{b^2 B}{2\alpha^2}\right] \left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{\frac{m+2d}{r}}$$

+

$$+\frac{m}{r}\left[\frac{a^3A}{\alpha}+\frac{\frac{m+3d+r}{r}\mathfrak{A}b^3B}{2\alpha^2}+\frac{\frac{m+3d+2r}{r}\mathfrak{B}c^3C}{3\alpha^3}\right]\left(\frac{y^1}{\alpha}\right)^{\frac{m+3d}{r}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$+\frac{m}{r}\left\{\begin{matrix}\frac{a^nA}{\alpha}+\frac{\frac{m+nd+r}{r}\mathfrak{A}b^nB}{2\alpha^2}+\frac{\frac{m+nd+2r}{r}\mathfrak{B}c^nC}{3\alpha^3}\\ +\frac{\frac{m+nd+3r}{r}\mathfrak{C}b^nD}{4\alpha^4}\cdots+\frac{\frac{m+nd+(n-1)r}{r}{}_{-1}\mathfrak{N}n^n\mathcal{N}}{n\alpha^n}\end{matrix}\right\}\left(\frac{y^1}{\alpha}\right)^{\frac{m+nd}{r}}$$

$$\left(\begin{matrix}\beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon & \ldots\\ 1, & 2, & 3, & 4 & \ldots\end{matrix}\right)$$

Das hier zuletzt stehende Glied ist das allgemeine $(n+1)$te, oder der in combinatorischen Zeichen ausgedrückte Werth der Lokalformel für $x^m 7 (n+1)$ in (2) auf die obige Reihe $y^1 = \alpha x^r - \beta x^{r+d} - \gamma x^{r+2d} -$ etc bezogen (4).

6. Die Reihe für x^m in (5) folgt (aus polyn. Lehrs. S. 297, 3 und S. 298, 5), wenn man für die dortigen s, ^0m, ^1m, $^2m \ldots {}^nm$ hier m, $\frac{m}{r}$, $\frac{m+d}{r}$, $\frac{m+2d}{r} \ldots \frac{m+nd}{r}$ substituirt, und statt der dortigen abwechselnden Zeichen $-+$ lauter $+$ setzt. Diese Abwechslung der Zeichen nämlich bezieht sich auf der dortigen Reihe Coefficienten $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta +$etc, die hier $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, $-$ etc sind, und folglich für die ungeraden Classen ^nA, ^nC, $^nE \ldots$ lauter negative, für die geraden Classen ^nB, ^nD, $^nF \ldots$ lauter positive Complexionen geben. Da nun die Zeichen $-$ gerade da stehen, wo jene, die Zeichen $+$ da, wo diese Classen vorkommen: so sind alle Complexionen aller Classen positiv, und es ist am besten, in der Reihe für x^m durchgängig das Vorzeichen $+$, und im Zeiger $\beta, \gamma, \delta \ldots$ statt $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta \ldots$ zu setzen.

7. Man hätte den Werth für x^m auch aus der Formel (polyn. Lehrs. S. 298, 6) ableiten können. Das würde eine von der hier (in 5) ganz verschiedene Darstellung gegeben haben, wobey ich mich aber nicht aufhalten will.

8. Setzt man in die Reihe für x^m (S. 365) $r+d$ statt p, und d statt q, so kommt daraus die hiesige (5), für $1 = \alpha = 1$.

2. Daraus folgt das (n+1)te Glied, oder

$$x^m 7(n+1) = \frac{m}{m+nd}\, q^{-\frac{m+nd}{r}} * (n+n) \cdot y^{\frac{(m+nd)l}{r}}$$

wo q die gegebene (1) oder überhaupt jede andere Reihe, wie $\alpha + \beta x + \gamma x^2 \ldots$ bedeuten kann, die 1) mit der gegebenen dieselben Coefficienten hat, und 2) deren Exponenten der veränderlichen Größen in arithmetischer Progression steigen oder fallen; welches durch die Scale q [$\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$] angezeigt wird (vol. Lehrs. S. 298, 4).

3. Diese Lokalformel zeigt, aus welchen Coefficienten welcher Potenzen der Reihe q die Coefficienten der Umkehrungsreihe (der Reihe für x^m) zusammengesetzt seyen. Durch die Reduction der letztern Coefficienten auf die erstern, wird die sonst so schwierige Umkehrung, auf eine für die combinatorische Analysis so leichte Aufgabe zurückgeführt: $q^{\mu} * (n+1)$ für jeden Werth von μ (also auch für $\mu = -\frac{m+nd}{r}$) außer der Ordnung darzustellen (vol. Lehrs. S. 232. 233).

4. Der Ausdruck für x^m bleibt immer derselbe, wie auch nun die Vorzeichen der Coefficienten der gegebenen Reihe (1), die hier sämtlich + sind, sich abändern mögen. Diese Änderung hat nämlich bloß auf die Potenz von q Einfluß, keinesweges aber auf den allgemeinen Ausdruck der Formel. Diese gilt also auch für die gleich folgende Reihe, die ich wegen der unmittelbaren Vergleichung mit der Lagrangischen (S. 364, 365) in B zum Grunde legen werde.

B. Combinatorisch-analytische Umkehrungsformel.

5. Für $y^l = \alpha x^r - \beta x^{r+d} - \gamma x^{r+2d} + \text{etc}$, ist

$$x^m = \left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{\frac{m}{r}}$$

$$+ \frac{m}{r} \frac{a^1 A}{\alpha} \left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{\frac{m+d}{r}}$$

$$+ \frac{m}{r} \left[\frac{a^2 A}{\alpha} + \frac{\frac{m+2d+r}{r}\, \mathfrak{Y}\, b^2 B}{2\alpha^2}\right] \left(\frac{y^l}{\alpha}\right)^{\frac{m+2d}{r}}$$

+

$$\frac{m}{r}\left[\frac{a^3A}{\alpha}+\frac{\frac{m+3d+r}{r}\mathfrak{A}b^3B}{2\alpha^2}+\frac{\frac{m+3d+2r}{r}\mathfrak{B}c^3C}{3\alpha^3}\right]\left(\frac{y^1}{\alpha}\right)^{\frac{m+3d}{r}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{m}{r}\left[\begin{matrix}\frac{a^nA}{\alpha}+\frac{\frac{m+nd+r}{r}\mathfrak{A}b^nB}{2\alpha^2}+\frac{\frac{m+nd+2r}{r}\mathfrak{B}c^nC}{3\alpha^3}\\ +\frac{\frac{m+nd+3r}{r}\mathfrak{C}d^nD}{4\alpha^4}\ldots+\frac{\frac{m+nd+(n-1)r}{r}-1}{\ldots}\frac{\mathfrak{N}n^n\mathcal{N}}{n\alpha^n}\end{matrix}\right]\left(\frac{y^1}{\alpha}\right)^{\frac{m+nd}{r}}$$

$$\begin{pmatrix}\beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon & \ldots\ldots\\ 1, & 2, & 3, & 4 & \ldots\ldots\end{pmatrix}$$

Das hier zuletzt stehende Glied ist das allgemeine $(n+1)$te, er der in combinatorischen Zeichen ausgedrückte Werth der kalformel für $x^m 7 (n+1)$ in (2) auf die obige Reihe $= \alpha x^r - \beta x^{r+d} - \gamma x^{r+2d} -$ etc bezogen (4).

6. Die Reihe für x^m in (5) folgt (aus polyn. Lehrs. S. 7, 3 und S. 298, 5), wenn man für die dortigen s, $^o m$, 1, $^2m \ldots {}^n m$ hier m, $\frac{m}{r}$, $\frac{m+d}{r}$, $\frac{m+2d}{r} \ldots \frac{m+nd}{r}$ substirt, und statt der dortigen abwechselnden Zeichen $- +$ lauter setzt. Diese Abwechslung der Zeichen nämlich bezieht sich f der dortigen Reihe Coefficienten $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta +$ etc, die r $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, $-$ etc sind, und folglich für die ungera Classen ^nA, ^nC, $^nE \ldots$ lauter negative, für die gera Classen ^nB, ^nD, $^nF \ldots$ lauter positive Complexionen ge. Da nun die Zeichen $-$ gerade da stehen, wo jene, die chen $+$ da, wo diese Classen vorkommen: so sind alle Comrionen aller Classen positiv, und es ist am besten, in der eihe für x^m durchgängig das Vorzeichen $+$, und im Zeiger γ, $\delta \ldots$ statt $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta \ldots$ zu setzen.

7. Man hätte den Werth für x^m auch aus der Formel lyn. Lehrs. S. 298, 6) ableiten können. Das würde eine der hier (in 5) ganz verschiedene Darstellung gegeben haben, bey ich mich aber nicht aufhalten will.

8. Setzt man in die Reihe für x^m (S. 365) $r+d$ tt p, und d statt q, so kommt daraus die hiesige (5), für $= \alpha = 1$.

9. Exempel. Es sey die Gleichung $y = x^2 - \beta x^4 - \gamma x^6 - \text{etc}$ gegeben; man soll 1) die Glieder der Reihe für x, durch y, in Lokalausdrücken (1) nach der Ordnung; und 2) das 6te Glied derselben Reihe in combinatorischen Zeichen (5), und dadurch in gewöhnlichen, außer der Ordnung, darstellen.

Die dortigen l, m, e, r, d, n
sind hier 1, 1, 1, 2, 2, 5

(nämlich n = 5 nur für no. 2) das giebt (1, 5)

$$1)\ x = q^{-\frac{1}{2}}n1.y^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}q^{-\frac{2}{2}}n2.y^{\frac{2}{2}} + \tfrac{1}{3}q^{-\frac{3}{2}}n3.y^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4}q^{-\frac{4}{2}}n4.y^{\frac{4}{2}} + \tfrac{1}{5}q^{-\frac{5}{2}}n5.y^{\frac{5}{2}} + \text{etc}$$

$$q\,[1, -\beta, -\gamma, -\delta, -\text{etc}]$$

$$2)\ x76 = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{a^5 A}{1} + \frac{{}^{Y}\mathfrak{A}b^5 B}{2} + \frac{{}^{Y}\mathfrak{B}c^5 C}{3} + \frac{{}^{Y}\mathfrak{C}b^5 D}{4} + \frac{{}^{Y}\mathfrak{D}e^5 E}{5}\right\} y^{\frac{11}{2}}$$

$$\begin{pmatrix}\beta, & \gamma, & \delta, & \epsilon, & \zeta\\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5\end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big[\zeta + \frac{13}{2}\cdot\frac{2(\beta\epsilon+\gamma\delta)}{2^1} + \frac{15.13}{2.2^2}\cdot\frac{3(\beta^2\delta+\beta\gamma^2)}{3} + \frac{17.15.13}{2.3.2^3}\cdot\frac{4\beta^3\gamma}{4} + \frac{19.17.15.13}{2.3.4.2^4}\cdot\frac{\beta^5}{5}\Big] y^{\frac{11}{2}}$$

der letzte Ausdruck vollkommen, wie in Herrn Hauptmann Rohde's Abhandlung über das ballistische Problem (S. 12, 5), nur daß dort im Nenner des Bruches vor β^5 durch einen Druckfehler 2.8.16 statt 2.4.16 steht, wie aus der Reduction des hier befindlichen Bruches erhellet, die ich aber hier, aus ähnlichen Ursachen wie beym Exempel (S. 366), nicht vorgenommen habe.

10. Die Reductionsformel (1) giebt nicht selten große Verkürzungen bey der Umkehrung. Da, wo man die Potenzen der umzukehrenden Reihe schon hat; oder anderswoher kennt; oder (wie bey Binomien) für sich leicht bestimmen kann; oder auch (und das ist bey weitem das Wichtigste) wenn die Coefficienten der gegebenen Reihe so beschaffen sind, daß ihre Potenzen sich kürzer finden und ausdrücken lassen, als durch die allgemeine

meine Formel $p^m 7 (n+1)$ nach pol. Lehrs. S. 232 geschehen kann; wie das der Fall z. B. bey den Scalen $q[a, 2a, 3a \ldots]$; $q[\alpha, \alpha+\delta, \alpha+2\delta, \ldots]$; $q\left[1, \frac{a}{1}, \frac{a^2}{1.2}, \frac{a^3}{1.2.3} \ldots\right]$ und bey sehr vielen andern ist — in allen solchen Fällen würden die Formeln (S. 365. S. 372, 5) in unnöthige Weitläuftigkeit und Verwickelungen führen, deren Reduction auf die kürzere Form aus der Lokalformel (1) nicht selten äußerst schwierig fallen würde.

11. Exempel. Es ist $y^1 = x^r + 1 . x^{r+d} + \frac{x^{r+2d}}{1.2} + \frac{x^{r+3d}}{1.2.3} +$ etc gegeben, man soll die ersten Glieder von x^s darstellen.

Die gegebene Reihe gehört zu der obigen Scale $q\left[1, \frac{a}{1}, \frac{a^2}{1.2}, \frac{a^3}{1.2.3}, \ldots\right]$ für welche $q^{\mu}\varkappa (n+1) = \frac{\mu^n . a^n}{1.2.3 \ldots n} = \frac{\mu^n}{1.2.3 \ldots n}$, für $a = 1$ (Eul. Introd. in An. Inf. T. I. §. 116. 117).

Das giebt also, die Lokalformel (1) gebraucht,

$$x^s = y^{\frac{1s}{r}} - \frac{s}{r} y^{\frac{1(s+d)}{r}} + \frac{s(s+2d)^1}{1.2.r^2} y^{\frac{1(s+2d)}{r}}$$

$$- \frac{s(s+3d)^2}{1.2.3.r^3} y^{\frac{1(s+3d)}{r}} + \frac{s(s+4d)^3}{1.2.3.4.r^4} y^{\frac{1(s+4d)}{r}} - \text{etc};$$ um gleich viel kürzer, als durch die Formeln (S. 365, 372) geschehen seyn würde.

Die nähere Ausführung dieses und einiger andern Exempel haben Hr. Prof. Rothe (de Ser. Reverſ. — diff. p. 13 — 15) und Herr Mag. Toepfer (Combin. Anal. S. 176 — 180) gegeben.

12. So wie bisher x^m, eben so läßt sich auch log x aus der Gleichung für y oder y^1 (S. 364, 372) durch Umkehrung finden. Die Lokalformel für log x, aus welcher die combinatorische sogleich fließt (S. 369) kann man (polyn. Lehrs. S. 299, 8) nachsehen. Ich will mich hier dabey nicht aufhalten. Die Vergleichung derselben mit jener zeigt aber sogleich, daß der Aus-

druck für log. x noch einfacher ist, als der für x^m; vollkommen, wie bey Herrn de la Grange (art. 20, 21).

13. Zuweilen steht statt des einzelnen Gliedes y oder y^1 auch eine Reihe, wodurch die Umkehrung noch schwieriger wird. Weitläuftigkeiten in der allgemeinen Darstellung der zugehörigen Umkehrungsformel zu vermeiden, und zugleich die Deutlichkeit zu befördern, hat Herr Professor Rothe hiebey Lokalausdrücke nach der reducirten Form gebraucht. Ausführlich über die allgemeinste Form solcher Doppelreihen, so wie überhaupt von der Umkehrung, habe ich in meinen Paralipomenis ad Serierum Reversionem (Lips. 1797) gehandelt. Etwas davon, nebst einigen Beyspielen, kommt auch (polyn. Lehrs. S. 299—302) vor.

5. Zum ewigen Frieden unter den Streitern in öffentlichen Zeitungen, wegen einiger Rechenexempel. Ein arithmetischer Versuch, auch Layen genüßbar. Nebst Beylagen, welche die in den öffentlichen Blättern befindlichen, diesen Gegenstand betreffenden Aufsätze, nebst der Beurtheilung eines jeden enthalten. Leipzig, bey J. G. H. Richter 1798. 96 Seiten. 8.

Zweck und Inhalt dieser Schrift ist auf dem Titel deutlich angezeigt; die Veranlassung dazu hat das Steinbecksche Rechenexempel gegeben: was herauskomme, „wenn man 9 Thlr. 23 gr. 11 pf. mit sich selbst multiplicirt?" Voran, der Layen wegen, eine kurze Einleitung in die Arithmetik, worinn der Verfasser, (der sich am Ende der Vorrede Immanuel Friedrich unterschreibt) vorzüglich den Unterschied zwischen benannten und unbenannten Zahlen auseinandersetzt, und §. 12 richtig zeigt, daß Multiplication in benannten Zahlen, nichts anders heißen thune, als eine benannte Größe, sovielmal nehmen, als eine andere gegebene unbenannte Zahl anzeigt, woraus von selbst folgt, daß nur der Multiplicand eine benannte Zahl seyn kann, der Multiplicator aber schlechterdings unbenannt seyn muß. Hieraus ergiebt sich aber auch, daß derjenige, welcher zwey benannte Zahlen mit einander zu multipliciren aufgiebt, was Ungereimtes verlangt; wodurch die Steinbecksche Aufgabe in ihrer ganzen Blöße erscheint. In der That macht es von dem Zustande des Unterrichts in der Arithmetik keinen vortheilhaften Begriff, wenn

man

in sieht, daß von so vielen, die über diese Aufgabe ihre Mei-
ng öffentlich geäußert haben, nur wenige den Hauptumstand
) der Aufgabe, daß sie an sich ungereimt ist, erwähnen,
meisten aber, und unter denen sogar Lehrer der Arithmetik,
ses übersehen haben.

Nur unter einer einzigen willkührlichen Voraussetzung kön-
n, die Steinbeckische und andere ähnliche Aufgaben, einen
inn erhalten, wenn man eine gewisse Geldgröße als Einheit
nimmt, und den einen benannten Factor sovielmal nimmt,
s die für die Einheit angenommene Geldgröße in dem andern
ictor enthalten ist. Ist diese Geldeinheit ein Thaler, so heißt
e Aufgabe, man soll 9 Thlr. 23 gr 11 pf. so vielmal nehmen,
s ein Thaler in 9 Thlr. 23 gr. 11 pf. enthalten ist, das heißt,
$\frac{179}{88}$mal, und dann kommt 99 Thlr. 22 gr. $4\frac{1}{288}$ pf. heraus.
st aber die Geldeinheit ein Groschen, so muß, weil ein Gro-
en der vier und zwanzigste Theil des Thalers ist, die Zahl, wel-
e anzeigt, wievielmal ein Groschen in 9 Thlr. 23 gr. 11 pf.
thalten ist, 24mal so groß seyn, als die Zahl, welche an-
igt, wie vielmal ein Thaler in eben der Summe enthalten ist,
glich wird, bey ungeändertem Multiplicand, der Multiplica-
r, mithin auch das Product 24mal so groß, als vorher, und
nn kommt 2398 Thlr. 8 gr. $\frac{1}{12}$ pf. heraus. Ist aber die Geld-
heit ein Pfennig, so kommt aus eben dem Grunde das Zwölf-
che des jetzt angeführten, oder das 288fache des vorigen Re-
ltats, nämlich 28780 Thlr. 1 pf. Da nun in der Aufgabe
oß Thaler, Groschen und Pfennige vorkommen, so war es
eylich natürlich, eine von diesen drey Geldsorten zur Einheit
wählen, und am natürlichsten, den Thaler, als die höchste
eldsorte; welches die mehresten auch stillschweigend, und ohne
h dessen deutlich bewußt zu seyn, gethan haben, und daher das
ste Resultat fanden, welches auch wahrscheinlich Herr Stein-
ck selbst im Sinne hatte, nur daß er sich darüber nicht deut-
ch erklärte. Ja, nicht nur bey dieser Aufgabe, sondern auch
y andern, wo nur in dem einen Factor Thaler vorkommen,
s bey der Aufgabe 5 Thaler × 18 gr. oder bey dieser (7 Thlr.
– 7 gr.) × (7 gr. — 7 pf.) nahm man stillschweigend den
haler zur Einheit an. Obgleich dieses natürlich ist, so ist es
och nicht nothwendig, und jede andere Geldgröße hätte zur Ein-
eit angenommen werden können. Ist z. B. bey der Stein-
eckischen Aufgabe:

die Einheit	so ist das Resultat
1 Gulden	149 Thlr. 21 gr. $6\frac{1}{192}$ pf.
1 Species Thaler	34 „ 22 „ $9\frac{1}{384}$ „
1 Kais. Xer.	8993 „ 18 „ $\frac{5}{72}$ „
1 Xr. Rhein.	10792 „ 12 „ $\frac{3}{8}$ „
1 fl. Rh.	179 „ 21 „ $\frac{1}{160}$ „
1 Laubthaler, zu $1\frac{1}{2}$ Thlr.	66 „ 14 „ $10\frac{280}{432}$ „

Ja, sogar jedes ganz aus der Luft gegriffene Resultat, z. B. 54 Thlr. 13 gr. 7 pf. kann richtig seyn, in so fern man sich eine Geldgröße von 1 Thlr. 19 gr. $11\frac{5135}{23515}$ pf. dabey als Einheit gedenkt.

Durch Hülfe der bekannten Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ kann das Steinbeckische Exempel am kürzesten aufgelöst werden. Man setze nämlich, in Beziehung auf Thaler, $a = 10$, $b = \frac{1}{288}$, so ist

$$\left(10 - \frac{1}{288}\right)^2 = 100 - \frac{20}{288} + \frac{1}{288^2}$$

d. i. 100 Thlr. — 20 pf. + $\frac{1}{288}$ pf. = 99 Thlr. 22 gr. $4\frac{1}{288}$ pf. Der Verfasser braucht S. 17. diese Formel auch, verfällt aber bey ihrem Gebrauch in unnöthige Weitläuftigkeit. Eben so ist

$$\left(4 - \frac{1}{12}\right)^2 = 16 - \frac{8}{12} + \frac{1}{12^2}$$

folglich giebt 3 gr. 11 pf. mit sich selbst multiplicirt, und den Groschen zur Einheit angenommen, 16 gr. — 8 pf. + $\frac{1}{12}$ pf. = 15 gr. $4\frac{1}{12}$ pf. Auch hier gäben andere Einheiten andere Resultate, eins so richtig wie das andere, wenn sie richtig gerechnet sind; der Aeußerung (§. 19. S. 16) entgegen.

Diesen Erläuterungen will ich noch folgende Bemerkungen beyfügen. Die Gleichungen (S. 26, 27) sind so zu verbessern:

$$99 \text{ Thlr. } 22 \text{ gr. } 4\tfrac{1}{288} \text{ pf.} = \frac{8288641}{288^2} \text{ Thlr.}$$

$$15 \text{ „ } 4\tfrac{1}{12} \text{ „} = \frac{2209}{12^2} \text{ gr.}$$

$$1 \text{ „ } 2 \text{ „ } 2\tfrac{169}{288} \text{ „} = \frac{90601}{288^2} \text{ Thlr.}$$

Eben so die Quotienten, wie folget:

(99 Thlr. 22 gr. $4\frac{1}{288}$ pf.) : (9 Thlr. 23 gr. 11 pf.) = $\frac{2879}{288}$

(15 gr. $4\frac{1}{12}$ pf.) : (3 gr. 11 pf.) = $\frac{47}{12}$

(1 Thlr. 2 gr. $2\frac{169}{288}$ pf.) : (1 Thlr. 1 gr. 1 pf.) = $\frac{301}{288}$

Das

Das Exempel S. 39 ist falsch berechnet; es kommen 117 B 3 R 1 B $9\frac{108}{300}$ B. Auch hätte der Verfasser zu den von ihm §. 42 und S. 55 — 57 vorgelegten Aufgaben, wenn gleich nicht die Auflösungen, doch die Resultate, der Ungeübtern wegen, angeben sollen. Diese sind (§. 42. Ex. 1) 11 C 109 P 31 L 3 Q 3 P 1 H; (Ex. 3) 9 W 1 M 8 S 2 V 3 M; Im Ex. 2 muß ein Druckfehler vorkommen, wenn anders, wie zu vermuthen ist, das Resultat rational seyn soll. Ferner (S. 55, 1) die Erben empfiengen: der erste $956\frac{92}{173}$, der 2te $526\frac{16}{173}$, der 3te $414\frac{86}{173}$, der 4te $382\frac{106}{173}$, der 5te $382\frac{106}{173}$ Thaler an baarem Gelde und die Uhr $95\frac{113}{173}$ Thaler am Werthe. Doch vielleicht ist durch einen Druckfehler die Verlassenschaft 2758 statt 2768 Thaler angegeben; in diesem Falle kommen lauter ganze Zahlen für die Erbtheile nach der Ordnung: 960, 528, 416, 384, 384 und die Uhr 96 Thlr. am Werthe; (S. 55, 2) die Tiefe des Brunnens ist 129,218 Fuß; (S. 55, 3) Er hat bezahlt für ein Duzend 80 Thlr. und auch 80 Thlr. gewonnen; (S. 56, 4) der Streit fiel vor 1797, die jüngste Schwester war 16, die ältere 42 Jahre alt; (S. 56, 5) die Heerde bestand aus 277199 Stück.

Der Bruch, den die Gebrüder Thieme (S. 85) angegeben haben, ist nicht falsch, wie (S. 86) behauptet wird; er ist einerley mit dem der Herren Wagner und Häschke (S. 84, 85) wenn man diesen mit 3 aufhebt. Durchgehends ist hierbey angenommen, die zu verzehrende Summe werde erst zu Ende des Jahres ausgezahlt; sollte sie gleich zu Anfange des Jahres bezahlt werden: so gäbe das ein anderes Resultat

1479 Thlr. 12 gr. $1\frac{179915901}{531124748867}$ pf.

welches sich zu jenem, wie 10 : 11 verhält.

Zuletzt noch folgendes, in der Kürze: Herr Steinbeck hat ganz Unrecht, wenn er (S. 70) die zweyte und dritte der von Herrn Wagner angeführten Proportionen für zwey von seinem Exempel ganz verschiedne Aufgaben erklärt, und behauptet, die erste Proportion sey zwar richtig, erleichtere aber doch die Auflösung nicht. Es war ja nothwendig, vor allen Dingen der Aufgabe einen vernünftigen Sinn unterzulegen. Auch ist Herrn Steinbecks Tadel gegen Herrn Fischer, Schulmeister zu Z. ganz ungegründet. Die beyden mittlern Sätze einer Proportion können, wenn alle vier Glieder benannt sind, durchaus nicht, wenigstens nicht als benannte Zahlen, wie Herr Fischer richtig bemerkt, mit einander multiplicirt werden. Zu den belehrenden

Auf-

Aufsätzen über die Steinbecksche Aufgabe gehören auch, der von B. (S. 81, 82) und von M. L (S. 90—94) beyde aus Dresden. Der letzte ist zugleich der ausführlichste.

H. A. Rothe.

X.

Auszüge aus Briefen, verschiedene Nachrichten und Anzeigen.

---

1. Aus einem Briefe von Herrn D. Kramp an den Herausgeber.

Homburg, bey Zweybrücken, den 28. Nov. 1797

Die Bestimmung der astronomischen Strahlenbrechung, nach optisch-physischen Gründen, mit Anwendung des Mariottischen Lehrsatzes auf die Abnahme der Densitäten der atmosphärischen Luft, und vermittelst genauer, vollständiger Integration der hier vorliegenden sehr schweren Differentialgleichung, mit Weglassung alles dessen, was bloße Muthmaßung, bloß aufs Gerathewohl hin gewagte Näherung war — ist dasjenige Problem, mit welchem ich von meinen ersten Universitätsjahren her unaufhörlich, mit dem größten Fleiße, aber immer vergeblich und ohne allen Erfolg, mich abgegeben habe. Vergeblich war meine Bemühung, aus eben dem Grunde, warum bisher alle Bemühungen, selbst der größten Geometer, vergeblich gewesen waren, und die Aufgabe selbst bis auf diese Stunde unaufgelöst geblieben war. Die Ursache nämlich ist, die ungeheure Divergenz aller der Reihen, in welche sich das vorliegende Differential entwickeln lassen mußte, und deren sämtliche Coefficienten nach den Potenzen einer Zahl fortgiengen, deren mittlerer Werth, in gegenwärtigem Falle, wenigstens 800 war. Daher steht es auch um die Lehre von der astronomischen Refraction ungefähr so aus, wie mit dem Planeten- und Mondenlaufe vor dem Newtonischen Systeme, da man die allgemeinen Gesetze und die Gründe der Rechnung noch nicht kannte, nach welchen sich das Gesuchte *a priori* bestimmen ließ. Auch fand ich über die vorliegende analytische Schwierigkeit nirgends Aufschluß, selbst in beyden Abhandlungen des *Laplace*, *sur l'Approximation des formules qui sont fonctions de très grands nombres. Mem. de l'Acad. des Sciences. Année 1782. 1783* nicht, die doch zu allernächst hieher zu gehören schien. Endlich, wider alles Vermuthen, gelang es mir in der vorigen Woche, die sehr große Schwierigkeit ganz aus dem Grunde zu heben. Ich fand nämlich für jedes Integral $\int y dx$, zwey allgemeine, einfache, in der Anwendung leichte summatorische Reihen, deren die eine allemal convergiren muß, wann die andere aus der ersterwähnten Ursache divergirt. Die eine dieser Reihen ist ganz neu, und für die höhere Analysis ein

außer-

außerordentlich wichtiger Beytrag; auch werde ich ihn, nebst den daraus herfließenden wichtigern Folgen, zu seiner Zeit in Ihrem Archive bekannt machen. Ich machte nun zugleich die Anwendung auf die astronomische Refraction; und siehe da, das Problem war in seiner größten Allgemeinheit, durch sehr convergente Reihen aufgelöst. Es ergaben sich hieraus folgende Resultate, die ich hier mittheile:

1. Die von mir, nach meiner Integration berechnete Refractionstafel stimmt, für die Barometerhöhe 28 Zoll und + 10° Reaumur, die in Lalande's Astronomie steht, von da in die Berliner Sammlung astron. Tafeln übergegangen, und bekanntlich das Resultat der zahlreichsten und richtigsten Beobachtungen ist, bis auf 86° scheinbarer Entfernung vom Zenit, selbst in den einzelnen Secunden überein.

2. Ueber 86° hinaus, bis vollends an den Horizont hin, belaufen sich die Unterschiede auf mehrere, und bis gegen 30 Secunden; gleichwohl aber ist für die Horizontalrefraction der Unterschied noch so gering, daß solcher, bey der vollkommenen Uebereinstimmung alles übrigen, und der bekannten großen Schwierigkeit, die Horizontalrefraction richtig zu beobachten, offenbar auf Rechnung der Beobachtung, und nicht der Formel, fallen kann, die ohnehin die analytische Demonstration für sich hat.

3. Es folgt demnach zu allererst hieraus, daß die Anwendung des Mariottischen Gesetzes auf die Anordnung der atmosphärischen Schichten vollkommen richtig sey; daß überall, selbst in den höchsten Regionen, die Dichte sich verhalte wie der Druck, daß Temperatur, Electricität, ungleichartige Mischung der atmosphärischen Luft, durchaus keine Abweichung bewirken; und daß alle die angeblich beobachteten Abweichungen Fehler der Beobachtung, nicht der Theorie sind.

4. Daß von 4 bis 5 Grad scheinbarer Höhe an bis ans Zenith, die Refraction sich verhalte wie die Dichte der Luft, dies ist wahr. Allein, daß dies bey niedrigern Höhen auch statt habe, dies ist nicht wahr. Meine Formel sagt hierüber, daß für eine Temperatur über 10° die Verminderung der Refraction weniger, für Temperatur hingegen unter 10°, die Vermehrung derselben mehr, weit mehr austrägt, als es nach jener Regel seyn sollte: so, daß bey solchen Graden der Kälte, wie z. B. in Schweden oft statt haben mögen, die Horizontalrefraction gar wohl vier und mehr ganze Grade betragen kann, wie solches nach *la Lande Astronomie*, Tom. IV. p. 641; und *Lemonnier Mem. de l'Acad. Année* 1782. p. 87. der Fall war.

5. Vermittelst meiner Formel also wird der Astronom in den Stand gesetzt, für alle mögliche, von der mittlern noch so sehr abweichende Temperaturen, die selbst den allerniedrigsten Höhen zukommende Refraction, mit der größten Genauigkeit zu berechnen; und so fiele denn die große Schwierigkeit von selbst weg, die jene Beobachtungen bisher für die Wissenschaft so gut als unbrauchbar machte. Auch läßt sich eine Revision der vorzüglichsten, bey dergleichen niedrigen Höhen angestellten Beobachtungen machen, aus welchen man, bloß wegen der unrichtig angegebenen Refraction, die fehlerhaften Schlüsse gezogen hatte.

6. Und zuletzt, habe ich noch zu bemerken, daß alle, von Lambert, Bradley, Mayer, Simpson rc. gegebene allgemeine Refractionsformeln, zwar für größere Höhen anwendbar, aber auch alsdann überflüssig: für ganz niedrige Höhen hingegen nicht einmal als Näherung brauch-

brauchbar sind. Was Lambert vollends über die *Refractions terrestres* geschrieben hat, taugt gar nichts.

Ich zweifle nicht, Sie werden mir Beyfall geben, wenn ich das hier erwähnte für die Materialien eines nicht unwichtigen Werkes für die Astronomie ansehe, das ich künftige Ostern herauszugeben im Stande bin, auch, wenn sich auf billige Bedingungen ein Verleger finden sollte, und ich einstweilen mit den gehörigen gelehrten Hülfsmitteln unterstützt werde, herausgeben werde, unter dem Titel: *Refractionum Astronomicarum atque Terrestrium Historia.* Das ganze möchte dann ein Buch werden, wie das Buch des *de la Place, sur le Système du Monde et la figure des Planetes.*

2. Zweytes Schreiben, von eben dem Verfasser, in derselben Angelegenheit.

Homburg, den 14. Jan. 1798.

Da Sie meinem vorigen Schreiben eine Stelle in dem nächsten Hefte Ihres Archivs zugedacht haben, so bitte ich, demselben noch meinen gefundenen Ausdruck für die Horizontalrefraction beyzufügen. Es sey

a, Halbmesser der Erde. Unter dem Aequator 3277123 Toisen.

h, die Subtangente der Logistica, durch deren Ordinaten die Densität der Luft für jede gegebene Höhe ausgedrückt wird. In meiner Gesch. der Aerost. habe ich eine Tabelle der Subtangenten für jeden Grad des Reaum. Therm. gegeben: die auf de Luc's Höhenmessungen gegründet ist. Für 10° Reaum. ist h = 4218 Toisen.

c, ein kleiner Bruch, der Kürze wegen, für $\frac{h}{a}$ gesetzt.

1 : 1 + w. Verhältniß der Sinusse des Einfalls- und Brechungswinkels für den Durchgang aus Luft in den leeren Raum. w ist ein kleiner, der Densität der Luft proportionaler Bruch. Für 28 Zoll Barom. und + 10° Reaum. ist w = 0,0002869. Und nun die Horizontalrefraktion in Theilen des Halbmessers. Sie ist $\frac{w\sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}}$. Für die besagte Temperatur giebt dies 34′ 27″,3. Lalande hat aus 33′ 45″; la Caille 33′ 30″. Allein, aus überwiegenden physischen Gründen bin ich überzeugt, daß 34′ 27″ die wahre Horizontalrefraction ist; und ich erwarte sehr Herrn von Zachs Beobachtungen hierüber. Ich habe also Recht, wenn ich behaupte,

I. Daß die Horizontalrefractionen sich mit eben der Leichtigkeit, wie die Refractionen in größern Höhen berechnen lassen, und daß die bisher behauptete Unzuverläßigkeit derselben, nicht sowohl in der Veränderlichkeit der Atmosphäre, als vielmehr in der ungeschickten Berechnung lag.

II. Daß es mit dem so sehr bezweifelten Mariottischen Gesetz, welches bey meiner Berechnung zum Grunde liegt, vom Horizont an bis in die entferntesten Höhen der Atmosphäre seine vollkommene Richtigkeit hat.

III. Daß

III. Daß die Refrangibilität der atmosphärischen Luft sich durchgehends verhält wie ihre Densität; und daß aller Zusatz von Dünsten und fremden Luftarten, so wie auch aller Einfluß der Wärme, Kälte, Trockne und Feuchtigkeit, an diesen beyden großen Naturgesetzen nicht das geringste abzuändern vermögend ist.

Die Berechnung der Refractionen nahe am Horizonte, bis auf 7° scheinbarer Höhe, ist dagegen sehr schwer. Das Integral $\int e^{-tt} dt$, das bey der Horizontalrefraction $=0$ wird, kömmt alsdann mit ins Spiel; und hier war schlechterdings nichts anders zu thun, als eine Tabelle dieser Integrale zu berechnen, von $t=0{,}01$ bis $t=4{,}00$, auf 12 Decimalstellen. Es war eine ungeheure Arbeit; allein, Gottlob, ich bin damit fertig.

Eine Erläuterung muß ich mir von Ihnen ausbitten. De Luc hat angenommen, daß der Gang des Quecksilbers am Thermometer mit dem der äußern Luft gleichförmig sey; das ist: daß zwischen dem Grade des Thermometers y und der zugehörigen specifischen Federkraft der Luft, Y, eine Gleichung vom ersten Grade statt habe. Dies ist gewiß nicht anders als *cum Grano Salis* zu verstehen. Ich erinnere mich dagegen, in Prony (dem ersten Theil, gegen das Ende) eine Tabelle gesehen zu haben, wo für fünf der vorzüglichsten Grade des Therm. das zugehörige Volumen der gemeinen, dephlogisirten, brennbaren rc. Luft in Ganzen und vier Decimalen ausgedrückt ist. Prony hat die Gleichung dabey versucht: $Y = e^{my} + e^{ny} + e^{oy} + e^{py} + \text{etc}$; und es ist ihm gelungen. Dürfte ich mir wohl von Ihnen eine Abschrift dieser Stelle von Prony ausbitten? Ich brauche sie zu meinen Refractionen schlechterdings, und an Bücher dieser Art ist in dem Orte, wo ich itzt wohne, nicht zu denken: auch keine Gelegenheit, sie anders als mit großen Kosten und ungeheurem Zeitverluste zu bekommen. —

3. Aus Herrn D. Kramp's neuestem Schreiben.

Homburg, den 4ten März 1798.

Ihrem geneigten Rathe zufolge, habe ich mein Werk über die Refractionen in französischer Sprache auszuarbeiten angefangen; und mehr als die Hälfte der Analyse des Réfractions Astronomiques et Terrestres ist bereits fertig. Das dritte Kapitel, Analyse des Facultés numériques, enthält, auf etwa zwölf Bogen im Manuscript, weit weit mehr, als alles was ich noch bisher Ihnen zugesendet habe. Ich habe das Ueberflüßige weggelassen, die Beweise sehr ins Kurze gezogen, und das Ganze mit Anwendungen auf mehrere der wichtigsten Aufgaben der höhern Analysis bereichert, die zuverläßig vorhin niemand vermuthet hatte. Ich glaube behaupten zu können, ohne die Gränzen der Bescheidenheit zu überschreiten, daß das Meiste, was ich hier geschrieben habe, für die Mathematik eben so neu ist, als es die Infinitesimalrechnung zu ihrer Zeit war. Ein starker Grund zu dieser Behauptung liegt einerseits in dem Beyfalle, womit Sie meine

bis

bisherigen Arbeiten aufgenommen haben; andererseits in dem Bewußtseyn und der innern Gewißheit, daß zwischen jenen Arbeiten und dem was ich itzt liefere, ein sehr großer Abstand ist, daß letztere ohne Vergleich wichtiger und interessanter sind, als erstere. Ich ersuche Sie daher, wenn Sie meine Beyträge zur Summationslehre Ihrem Archive noch nicht einverleibt haben *), es itzt nicht zu thun. Ich habe neuerlich Alles viel kürzer gefaßt, durch schärfere Beweise mehr befestiget, und durch wichtige Anwendungen interessanter gemacht.

Was mir itzt die meiste Sorge macht, ist — einen Verleger zu finden. Ich wünschte das Werk, sobald als möglich, dem Druck übergeben, und so mein dem würdigen Herrn von ** gegebenes Wort erfüllen zu können. Ich habe auf dieses Werk einen großen Theil meiner Aussichten auf eine künftige mir angemessenere Bestimmung gebaut, deren Bedürfniß ich bey der bevorstehenden politischen Veränderung unsers Landes mit jedem Tage mehr fühle; auch muß ich befürchten, es möchte bey längerem Zaudern, irgend ein anderer Geometer auf die nämliche Ideenfolge verfallen, mir darinn zuvorkommen, und mir dadurch die ganze gehofte und verdiente Frucht meiner Arbeit rauben. Ich weiß wohl, daß die Sorge für einen Verleger eigentlich mein Geschäft seyn sollte; aber in meiner itzigen Lage ist dazu wenig Aussicht. Auf alle Fälle hoffe ich durch Sie und Ihre Empfehlung meinen Zweck geschwinder zu erreichen. Ich ersuche Sie daher, sich um einen Verleger umzusehen. Ich bin bereit, Ihnen deshalb mein ganzes Manuscript, so wie es fertig ist, zur Durchsicht und etwanigen Vorzeigung zuzuschicken **).

*) Die Beyträge, in drey Abtheilungen, würden mehrere Hefte (jede beynahe ein ganzes) gefüllt haben. Ich hatte mir daher vorgenommen, einen Auszug des Wesentlichen und Wichtigsten daraus, im Archive mitzutheilen. Nunmehr ist aber auch dieser nicht nöthig. H.

**) An einen Verleger für ein so wichtiges Werk, das die Wissenschaft von einer doppelten Seite interessirt, kann und soll es gewiß nicht fehlen. Herr D. Kramp hat nicht nöthig, sein Manuscript im voraus, als vorzuzeigende Probe, herzusenden. Der Name und die gegenwärtige Zusage seines durch mehrere vortreffliche Schriften rühmlichst bekannten Verfassers, ist schon mehr als hinreichend, die Güte des Werks zu verbürgen. H.

Leipzig,

gedruckt bey Christian Friedrich Solbrig.

Archiv
der
reinen und angewandten
Mathematik.

Achtes Heft. 1798.

I.

Anfangsgründe einer neuen Exponentialrechnung; von Johann Pasquich.

Ich habe diese Abhandlung in der Beylage zum ersten und zweyten Bande meines Unterrichts in der mathematischen Analysis (Leipz. 1798) versprochen. Meiner Ueberzeugung nach ist die Rechnungsmethode, von welcher hier die Rede ist, dergestalt beschaffen, daß sie, wegen der Einfachheit der Begriffe, worauf sie beruhet, der Gründlichkeit, womit sie ausgeführt werden kann, und der Allgemeinheit ihrer Gründe, mehr Aufmerksamkeit verdient, als manche andere Rechnungsmethoden, wodurch man das, was der schlecht abgehandelten Differentialrechnung fehlet, zu ersetzen gesucht hat: bloß aus diesem Grunde mache ich sie bekannt, in der gegründeten Hoffnung, daß jeder Kenner von ihr eben so, wie ich davon denke, urtheilen wird; daß sie nämlich beym gegenwärtigen Zustande der Differential- und Integral-Rechnung, zwar entbehrlich, aber immer doch werth ist, in diesem Archive aufbewahrt zu werden.

I.

Von der Exponentiirung algebraischer Funktionen.

§. 1.

Postulat. Jede Funktion y von einer veränderlichen Größe z soll sich unter der allgemeinsten Form $y = Az^a + Bz^b + Cz^c + Dz^d +$ etc betrachten lassen, entweder weil sie wirklich diese Form hat, oder weil sie einer Reihe von derselben Form gleich gesetzt werden kann.

§. 2.

Erklärung. Wenn y was immer für eine Funktion von einer absoluten veränderlichen Größe x ist (welche nämlich unabhängig ist von einer andern veränderlichen Größe); so nenne man diejenige Funktion, welche aus der Funktion y entstehen würde, wenn man alle Glieder der gleichgültigen Reihe (§. 1.) einzeln genommen mit den ihnen zugehörigen Exponenten von x multiplicirte, (den Exponenten 0 nicht ausgenommen), das Exponential der Funktion y, und bezeichne es mit εy: die Funktion y selbst soll, in Beziehung auf εy, die exponentiirte Funktion heissen: die Methode die Exponentialien der Funktionen, und die exponentiirten Funktionen für gegebene Exponentialien zu finden, wollen wir die Exponentialrechnung nennen.

Beyspiele.

$y = 3x^2 - 5x^{-3} + 2x^{\frac{3}{4}} - 7x^{\frac{2}{3}}$ giebt

$\varepsilon y = 6x^2 + 15x^{-3} + \frac{6}{4}x^{\frac{3}{4}} - \frac{14}{3}x^{\frac{2}{3}}$.

$y = (a^2 - 3x^4)^2 = a^4 - 6a^2x^4 + 9x^8$ giebt

$\varepsilon y = a^4 . 0 - 6a^2x^4 . 4 + 9x^8 . 8 = -24a^2x^4 + 72x^8$.

§. 3.

1. Zusatz. Das Exponential einer beständigen Grösse C ist gleich Null; nämlich $\varepsilon C = \varepsilon . C x^{0} = C x^{0} . 0 = 0$ (§. 2.).

§. 4.

2. Zusatz. Das Exponential jeder absoluten veränderlichen Grösse x ist derselben Grösse gleich; nämlich $\varepsilon x = x . 1 = x$ (§. 2.).

§. 5.

3. Zusatz. Das Exponential einer Funktion $y = Z + \varphi$ von x, wenn φ eine beständige Grösse bedeutet, ist gleich dem Exponential ihres veränderlichen Theils Z. Denn setzt man nach (§. 1.)

$$Z = A x^{a} + B x^{b} + C x^{c} + D x^{d} + \text{etc};$$

so ist $y = \varphi x^{0} + A x^{a} + B x^{b} + C x^{c} + D x^{d} + \text{etc}$: also $\varepsilon y = a A x^{a} + b B x^{b} + c C x^{c} + d D x^{d} + \text{etc} = \varepsilon Z$ (§. 2.).

§. 6.

4. Zusatz. Das Exponential jeder unter der Form $y = P x^{p} + Q x^{q} + R x^{r} + S x^{s} + \text{etc}$ vorkommenden Funktion von x ist gleich der Summe der Exponentialien ihrer einzelnen Glieder: nämlich nach (§. 2.)

$$\varepsilon y = p P x^{p} + q Q x^{q} + r R x^{r} + s S x^{s} + \text{etc}$$
$$= \varepsilon . P x^{p} + \varepsilon . Q x^{q} + \varepsilon . R x^{r} + \varepsilon . S x^{s} + \text{etc.}$$

§. 7.

5. Zusatz. Das Exponential der Summe $U + V + X + Y + \text{etc}$ mehrerer Funktionen von einer absoluten veränderlichen Grösse x ist gleich der Summe der Exponentialien derselben Funktionen einzeln genommen: nämlich $\varepsilon(U + V + X + Y + \text{etc}) = \varepsilon U + \varepsilon V + \varepsilon X + \varepsilon Y + \text{etc}$ (§. 1. 2.).

§. 8.

Aufgabe. Für bekannte Exponentialien zwoer Funktionen von einer absoluten veränderlichen Größe x das Exponential des Produkts aus denselben Funktionen zu finden.

Auflösung. Man multiplicire jede Funktion einzeln genommen mit dem Exponential der andern Funktion, und addire die Produkte in eine Summe; so wird diese das verlangte Exponential seyn.

Beweis. Es sollen hier drey mögliche Fälle betrachtet werden: denn entweder sind

1) beyde Funktionen, etwa $u = Sx^s$, $v = Rx^r$, einfach; oder

2) eine unter ihnen ist einfach, und die andere zusammengesetzt, wie $u = Sx^s$, $U = Kx^k + Lx^l + Mx^m + \text{etc}$;

3) oder beyde sind zusammengesetzt, wie $U = Kx^k + Lx^l + Mx^m + \text{etc}$, $V = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \text{etc}$: alles in der Bedeutung (§. 1.).

4) Im ersten Fall findet man nun nach (§. 2.) $uv = SRx^{s+r}$: also

$$\varepsilon . uv = (s+r)\, SRx^{s+r} = Rx^r . sSx^s + Sx^s . rRx^r = v\varepsilon u + u\varepsilon v.$$

5) Im zweyten Fall aber findet man dasselbe auf folgende Art:

$$uU = u . Kx^k + u . Lx^l + u . Mx^m + \text{etc}:$$

also ist nach (§. 7.)

$$\varepsilon . uU = \varepsilon(u . Kx^k) + \varepsilon(uLx^l) + \varepsilon(u . Mx^m) + \text{etc.}$$

Wenn man daher die einzelnen Exponentialien nach (4) nimmt; so wird seyn

$$\begin{aligned} \varepsilon . uU = & \; u\varepsilon . Kx^k + Kx^k . \varepsilon u \\ & + u\varepsilon . Lx^l + Lx^l . \varepsilon u \\ & + u\varepsilon . Mx^m + Mx^m . \varepsilon u \\ & + \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

= u

$= u(\varepsilon.Kx^k + \varepsilon.Lx^l + \varepsilon.Mx^m + etc)$
$+ (Kx^k + Lx^l + Mx^m + etc)\,\varepsilon u$
$= u\,\varepsilon U + U\,\varepsilon u$ (§. 5.).

6) Auf diese Art erhellet nun die Richtigkeit der gegebenen Auflösung auch für den 3ten Fall. Denn es wird seyn

$$UV = Kx^k.V + Lx^l.V + Mx^m.V + etc:$$

also nach (§. 7.)

$$\varepsilon.UV = \varepsilon(Kx^k.V) + \varepsilon(Lx^l.V) + \varepsilon(Mx^m.V) + etc.$$

Daher wenn man die einzelnen Exponentialien nach (5) ausdrücket, muß seyn

$$\varepsilon.UV = \left\{\begin{array}{ll} Kx^k.\varepsilon V + V\varepsilon.Kx^k \\ + Lx^l.\varepsilon V + V\varepsilon.Lx^l \\ + Mx^m.\varepsilon V + V\varepsilon.Mx^m \\ + etc. & etc. \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} (Kx^k + Lx^l + Mx^m + etc)\,\varepsilon V \\ + V(\varepsilon.Kx^k + \varepsilon.Lx^l + \varepsilon.Mx^m + etc) \end{array}\right\} =$$

$$= U\,\varepsilon V + V\,\varepsilon U \text{ (§. 6.).}$$

§. 9.

1. Zusatz. Für drey Funktionen P, Q, R von einer absoluten veränderlichen Größe x wäre $\varepsilon(PQR) = R\varepsilon(PQ) + PQ\varepsilon R = R(P\varepsilon Q + Q\varepsilon P) + PQ\varepsilon R$ (§. 8.) $= RP\varepsilon Q + RQ\varepsilon P + PQ\varepsilon R$.

§. 10.

2. Zusatz. Nimmt man an, daß das Produkt DEF---ST aus n+1 Funktionen D, E, F, --- S, T bestehet, und das Exponential des Produkts DEF---S der Summe der Produkte gleich ist, welche entstehen würden, wenn man das Exponential jedes Faktors von DEF---S mit allen übrigen Faktoren multiplicirte; so muß das Exponential $\varepsilon(DEF---ST) = (DEF---S)\,\varepsilon T + T\varepsilon(DEF---S)$ (§. 8.) die Summe der Produkte seyn,

welche man erhielte, wenn man das Exponential jedes Faktors von DEF---ST mit allen übrigen Faktoren multiplicirte.

§. 11.

3. Zusatz. Verlangt man demnach das Exponential des Produkts aus soviel man will Funktionen; so multiplicire man das Exponential jeder einzelnen Funktion mit allen übrigen Funktionen, und addire die erhaltenen Produkte in eine Summe. Denn dieses gilt wirklich für 2 und 3 Funktionen (§. 8. 9.), und wenn es für n Funktionen gälte; so müßte dasselbe auch für n+1 Funktionen gelten (§. 10.): daher gilt es überhaupt für jede mögliche Anzahl von Funktionen.

§. 12.

4. Zusatz. Für jede Funktion Z von einer absoluten veränderlichen Größe x, und jede ganze bejahte Zahl m muß seyn $\varepsilon . Z^m = \varepsilon . ZZZ \ldots Z = m Z^{m-1} \varepsilon Z$ (§. 11.).

§. 13.

Aufgabe. Für das gegebene Exponential einer Funktion Z von der absoluten veränderlichen Größe x das Exponential ihrer unbestimmten Potenz Z^n zu finden.

Auflösung. Man multiplicire die um einen Grad niedrigere Potenz von Z mit dem Exponenten der gegebenen Potenz, und dem bekannten Exponential von Z; so wird seyn $\varepsilon . Z^n = n Z^{n-1} \varepsilon Z$.

Beweis. Für einen ganzen bejahten Exponenten n erhellet dieses aus (§. 12.). Sey aber

1. $n = \frac{u}{v}$ eine bejahte gebrochene Zahl, und man setze $y = Z^n = Z^{\frac{u}{v}}$; so ist $y^v = Z^u$:

also

also ist nach (§. 12.) $v y^{v-1} \varepsilon y = u Z^{u-1} \varepsilon Z$, und nun

$$\varepsilon y = \frac{u}{v} Z^{\frac{u}{v}-1} \varepsilon Z.$$

2. Endlich sey $n = -r$ eine verneinte, übrigens ganze oder gebrochene Zahl, und
$y = Z^n = Z^{-r}$; so ist $y Z^{2r} = Z^r$: also nach (§. 8.)
$y \varepsilon . Z^{2r} + Z^{2r} \varepsilon y = \varepsilon Z^r$.

Weil aber $2r$, r bejahte Zahl sind, wofür die gegebene Auflösung bereits erwiesen worden ist; so hat man

$$\varepsilon . Z^{2r} = 2r Z^{2r-1} \varepsilon Z;\quad \varepsilon . Z^r = r Z^{r-1} \varepsilon Z.$$

Daher ist auch $2ry Z^{2r-1} \varepsilon Z + Z^{2r} \varepsilon y = r Z^{r-1} \varepsilon Z$, und hieraus folgt $\varepsilon y = - r Z^{-r-1} . \varepsilon Z$.

§. 14.

Aufgabe. Für gegebene Exponentialien zwoer Funktionen u, v von einer absoluten veränderlichen Größe x des Exponential der gebrochenen Funktion $y = \frac{u}{v}$ zu finden.

Auflösung. Man ziehe das Produkt aus dem Exponential des Nenners in den Zähler vom Produkt aus dem Exponential des Zählers in den Nenner ab, und dividire den Rest durch das Quadrat des Nenners; so wird seyn $\varepsilon y = \varepsilon \frac{u}{v} = \frac{v \varepsilon u - u \varepsilon v}{v^2}$.

Beweis. Es ist $v y = u$: also nach (§. 8.)

$$v \varepsilon y + y \varepsilon v = \varepsilon u,$$

und nun $\varepsilon y = \frac{\varepsilon u - y . \varepsilon v}{v} = \frac{v \varepsilon u - u \varepsilon v}{v^2}$.

§. 15.

Nach der bisherigen Theorie läßt sich demnach das Exponential jeder, wie immer verwickelten, algebraischen

Funktion von einer absoluten veränderlichen Größe x bestimmen.

Z. B. $y = (a + x^2)(cx - x^3)$
giebt nach (§. 8.)

$$\varepsilon y = (a + x^2)\,\varepsilon(cx - x^3) + (cx - x^3)\,\varepsilon(a + x^2);$$

Nun ist nach (§. 2. 5.)

$$\varepsilon(cx - x^3) = cx - 3x^3;$$
$$\varepsilon(a + x^2) = 2x^2; \text{ also ist}$$
$$\varepsilon y = (a + x^2)(cx - 3x^3) + 2x^2(cx - x^3).$$

$$y = \sqrt{(1 - x^4)^3} = (1 - x^4)^{\frac{3}{2}}$$

giebt nach (§. 13.)

$$\varepsilon y = \tfrac{3}{2}(1 - x^4)^{\frac{3}{2} - 1}.\,\varepsilon(1 - x^4),$$
und $\varepsilon(1 - x^4) = -4x^4$ nach (§. 2. 5.):
also $\varepsilon y = -4x^4 . \tfrac{3}{2}(1 - x^4)^{\frac{1}{2}} = -6x^4\sqrt{(1 - x^4)},$

$$y = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

giebt nach (§. 13.)

$$\varepsilon y = -\tfrac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2} - 1}.\,\varepsilon(1 - x^2),$$
und $\varepsilon(1 - x^2) = -2x^2$ nach (§. 2. 5.);

$$\text{also } \varepsilon y = x^2(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}.$$

$$y = \frac{1 - x^2}{1 + x^4} \text{ giebt nach (§. 14.).}$$

$$\varepsilon y = \frac{(1 + x^4)\,\varepsilon(1 - x^2) - (1 - x^2)\,\varepsilon(1 + x^4)}{(1 + x^4)^2};$$

und $\varepsilon(1 - x^2) = -2x^2$
$\varepsilon(1 + x^4) = 4x^4$ nach (§. 2. 5.):

$$\text{also } \varepsilon y = \frac{-2x^2(1 + x^4) - 4x^4(1 - x^2)}{(1 + x^4)^2}.$$

§. 16.

§. 16.

Erklärung. Das in (§. 2.) erklärte Exponential einer Funktion y soll das erste Exponential davon heissen: dividirt man es durch die absolute veränderliche x, auf welche die Funktion y sich bezieht; so soll das erste nach (§. 2.) genommene Exponential des Quotienten das zweyte Exponential der Funktion y genannt werden: und überhaupt soll aus jedem nten Exponential von y das (n+1)te entstehen, wenn man das nte durch die absolute veränderliche Größe x dividirt, und das erste Exponential des Quotienten nach (§. 2.) nimmt. Alle diese Exponentialien kann man mit εy, $\varepsilon^2 y$, $\varepsilon^3 y$, --- $\varepsilon^n y$, $\varepsilon^{n+1} y$ bezeichnen.

§. 17.

1. Zusatz. Diesen Erklärungen und Bezeichnungen gemäß ist daher überhaupt $\varepsilon^{n+1} y = \varepsilon . \frac{\varepsilon^n y}{x}$, wenn x die absolute veränderliche Größe bedeutet, auf welche die Funktion y sich beziehen mag.

§. 18.

2. Zusatz. Nach der vorhergehenden Theorie läßt sich das erste Exponential jeder algebraischen Funktion y von einer absoluten veränderlichen Größe x vollkommen bestimmen: dieselbe Theorie ist also zur Bestimmung der Exponentialien von allen Ordnungen für alle algebraische Funktionen hinreichend (§. 16.).

§. 19.

3. Zusatz. Wenn für jedes nte Exponential $\varepsilon^n y$ einer Funktion y von x der Quotient $\frac{\varepsilon^n y}{x}$ ebenfalls eine Funktion von x ist; so werden aus der Funktion y die Exponentialien von allen Ordnungen abgeleitet werden können (§. 16.).

z. B. $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$;

$$\text{giebt } \varepsilon y = -2x^{-2} = \frac{-2}{x^2} \text{ (§. 2.)};$$

$$\frac{\varepsilon y}{x} = -2x^{-3};$$

$$\varepsilon\frac{\varepsilon y}{x} = \varepsilon^2 y = 6x^{-3} = \frac{6}{x^3} \text{ (§. 16. 2.)};$$

$$\frac{\varepsilon^2 y}{x} = 6x^{-4};$$

$$\varepsilon\frac{\varepsilon^2 y}{x} = \varepsilon^3 y = -24x^{-4} = \frac{-24}{x^4} \text{ (§. 16. 2.)};$$

$$\frac{\varepsilon^3 y}{x} = -24x^{-5}.$$

$$\varepsilon\frac{\varepsilon^3 y}{x} = \varepsilon^4 y = 120x^{-5} = \frac{120}{x^5} \text{ (§. 16. 2.) u. s. w.}$$

§. 20.

4. Zusatz. Ist hingegen eine Funktion y von x so beschaffen, daß für irgend ein ntes Exponential $\varepsilon^n y$ der Quotient $\frac{\varepsilon^n y}{x}$ keine Funktion von x, sondern eine beständige Größe ist; so muß das $(n+1)$te, und jedes höhere Exponential davon gleich Null seyn (§. 16. 3.); mithin wird die Funktion y nur derjenigen Exponentialien fähig seyn, welche unter der $(n+1)$ten Ordnung liegen.

z. B. $y = ax^3$ giebt $\varepsilon y = 3ax^3$;

$$\frac{\varepsilon y}{x} = 3ax^2; \quad \varepsilon^2 y = 6ax^2;$$

$$\frac{\varepsilon^2 y}{x} = 6ax; \quad \varepsilon^3 y = 6ax;$$

$\frac{\varepsilon^3 y}{x}$

$$\frac{\varepsilon^3 y}{x} = 6a; \qquad \varepsilon^4 y = 0.$$

$$y = a + bx - cx^2 + dx^3.$$

giebt $\varepsilon y = bx - 2cx^2 + 3dx^3.$

$$\frac{\varepsilon y}{x} = b - 2cx + 3dx^2.$$

$$\varepsilon^2 y = -2cx + 6dx^2.$$

$$\frac{\varepsilon^2 y}{x} = -2c + 6dx.$$

$$\varepsilon^3 y = 6dx; \; \frac{\varepsilon^3 y}{x} = 6d; \; \varepsilon^4 y = 0.$$

§. 21.

5. Zusatz. Für eine absolute veränderliche Größe und die Funktion $y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \cdots + Px^p$ findet man das rte Exponential nach (§. 16. 20.), wie folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon^r y = {} & a(a-1)(a-2)\cdots(a-r+1)Ax^{a-r+1} \\ & + b(b-1)(b-2)\cdots(b-r+1)Bx^{b-r+1} \\ & + c(c-1)(c-2)\cdots(c-r+1)Cx^{c-r+1} \\ & \vdots \\ & + p(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)Px^{p-r+1} \end{aligned}$$

§. 22.

6. Zusatz. Ganz anders verhält sich die Exponentirung nach (§. 16.), wenn die Funktion y durch eine veränderliche Größe z gegeben wird, welche selbst eine Funktion von der absoluten veränderlichen Größe x ist: man muß nämlich z, nicht als die absolute veränderliche Größe, sondern als eine wirkliche Funktion davon nach (§. 16.) behandeln.

Z. B.

Z. B. $y = az^3$

giebt $\varepsilon y = 3az^2\varepsilon z$ nach (§. 13.)

$$\frac{\varepsilon y}{x} = 3az^2 . \frac{\varepsilon z}{x}.$$

$$\varepsilon\frac{\varepsilon y}{x} = 3az^2\,\varepsilon\frac{\varepsilon z}{x} + \frac{\varepsilon z}{x}\,\varepsilon . 3az^2 \text{ nach (§. 8)}$$

$$= 3az^2\,\varepsilon\frac{\varepsilon z}{x} + \frac{\varepsilon z}{x} . 6az\varepsilon z \text{ (§. 13.).}$$

Also wegen (§. 16.)

$$\varepsilon^2 y = 3az^2 . \varepsilon^2 z + \frac{6az . \varepsilon z^2}{x}.$$

$$\frac{\varepsilon^2 y}{x} = 3az^2 . \frac{\varepsilon^2 z}{x} + 6az\left(\frac{\varepsilon z}{x}\right)^2.$$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon\frac{\varepsilon^2 y}{x} &= 3az^2 . \varepsilon\frac{\varepsilon^2 z}{x} + \frac{\varepsilon^2 z}{x}\,\varepsilon . 3az^2 \\ &\quad + 6az . 2\frac{\varepsilon z}{x} . \varepsilon\frac{\varepsilon z}{x} + \left(\frac{\varepsilon z}{x}\right)^2 \varepsilon . 6az\end{aligned}\right\} \text{(§. 8. 13.)}$$

$$\left.\begin{aligned}&= 3az^2 . \varepsilon\frac{\varepsilon^2 z}{x} + \frac{\varepsilon^2 z}{x} . 6az\varepsilon z \\ &\quad + 12az\frac{\varepsilon z}{x} . \varepsilon\frac{\varepsilon z}{x} + \frac{\varepsilon z^2}{x^2} . 6a\varepsilon z\end{aligned}\right\} \text{(§. 13.)}$$

Daher nach (§. 16.)

$$\varepsilon^3 y = 3az^2 . \varepsilon^3 z + \frac{18az\varepsilon z . \varepsilon^2 z}{x} + \frac{6a\varepsilon z^3}{x^2}.$$

u. s. w.

II.

Anwendung der vorhergehenden Theorie auf die Transcendenten Funktionen.

§. 23.

Aufgabe. Die Potenz $(a+b)^m$ durch eine Reihe auszudrücken.

Auflösung. Für $x = \frac{b}{a}$ ist $(a+b)^m = (1+x)^m . a^m$: es kömmt demnach alles darauf an, daß man eine Reihe für $(1+x)^m$ finde. Daher setze man

$$(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \cdots$$
$$\cdots + Px^r + Qx^{r+1} = y.$$

So wird seyn nach (§. 13. 4. 5.)

$$\varepsilon y = mx(1+x)^{m-1} = \frac{mx(1+x)^m}{1+x} = \frac{mxy}{1+x};$$

also $(1+x)\,\varepsilon y - mxy = 0$.

Nimmt man demnach $\varepsilon y = Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + \cdots + rPx^r + (r+1)Qx^{r+1} + \text{etc}$ (§. 2. 5.); multiplicirt man hierauf $1+x$ damit, und mx mit y; so wird man, nach gehöriger Reduktion, aus der letzten Gleichung die Werthe von A, B, C, D, --- P, Q, etc für y nach der bekannten Methode bestimmen können.

§. 24.

Zusatz. So wie jede Funktion y von einer absoluten veränderlichen Größe x durch $y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \cdots + Px^p + \text{etc}$ kann ausgedrückt werden (§. 1.); eben so läßt sich der Werth, den sie erlangen würde, wenn die veränderliche Größe x um irgend eine Größe ω zunähme, durch $y^{I} = A(x+\omega)^a + B(x+\omega)^b + C(x+\omega)^c + \cdots + P(x+\omega)^p + \text{etc}$ ausdrücken: und wenn man die hier vorhandenen Potenzen von $x+\omega$

nach

nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt (§. 23.); so findet man

$$y^I = \begin{cases} Ax^a + \frac{aA}{1}x^{a-1}\omega + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-r+1)Ax^{a-r}}{1.2\dots r}.\omega^r \\ +Bx^b + \frac{bB}{1}x^{b-1}\omega + \dots + \frac{b(b-1)\dots(b-r+1)Bx^{b-r}}{1.2\dots r}.\omega^r \\ +Cx^c + \frac{cC}{1}x^{c-1}\omega + \dots + \frac{c(c-1)\dots(b-r+1)Cx^{c-r}}{1.2\dots r}.\omega^r \\ \vdots \\ +Px^p + \frac{pP}{1}x^{p-1}\omega + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-r+1)Px^{p-r}}{1.2\dots r}.\omega^r \\ + \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

§. 25.

Aufgabe. Für die bekannten Exponentialien $\varepsilon y, \varepsilon^2 y, \varepsilon^3 y, \varepsilon^4 y$ u. s. f. einer Funktion y von der absoluten veränderlichen Größe x den Werth y^I zu finden, welchen dieselbe Funktion erhalten würde, wenn x um eine Größe ω zunähme.

Auflösung. Dafür hat man in (§. 24.) einen allgemeinen Ausdruck: die erste vertikale Reihe daselbst enthält die Funktion y; die darauf folgenden vertikalen Reihen nach der Ordnung würde man aus der dortigen letzten unbestimmten Reihe erhalten, wenn man bey ihr nach und nach $r=1$, $r=2$, $r=3$, $r=4$ u. s. f. setzte: da also dieselbe unbestimmte Reihe durch $\frac{\varepsilon^r y}{1.2.3\dots rx}\omega^r$ ausgedrückt werden kann (§. 21.); so ist einleuchtend, daß der verlangte Werth y^I durch folgende Reihe bestimmt wird

$$y^I = y + \frac{\varepsilon y}{1.x}\omega + \frac{\varepsilon^2 y}{1.2x}\omega^2 + \frac{\varepsilon^3 y}{1.2.3x}\omega^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{\varepsilon^r y}{1.2.3\dots rx}\omega^r.$$

§. 26.

1. Zusatz. Setzt man $-\omega$ statt ω in (§ 25.); so erhält man folgende Reihe, wodurch derjenige Werth bestimmt wird, welchen eine Funktion y von der absoluten veränderlichen Größe x erlangen würde, wenn x um irgend eine Größe ω abnähme

$$y^1 = y - \frac{\varepsilon y}{1.x}\omega + \frac{\varepsilon^2 y}{1.2x}\omega^2 - \frac{\varepsilon^3 y}{1.2.3x}\omega^3 + \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{\varepsilon^r y}{1.2.3\ldots rx}\omega^r.$$

§. 27.

2. Zusatz. Zieht man die Funktion y von dem Werthe y^1 ab, welchen sie erhalten soll, wenn die absolute veränderliche Größe x um eine gegebene Größe ω zunimmt; so erhält man die Größe, um welche y sich bey dieser Voraussetzung ändert, nämlich zu- oder abnimmt: diese Größe ist aber nach (§. 25.)

$$y^1 - y = \frac{\varepsilon y}{x}\omega + \frac{\varepsilon^2 y}{2x}\omega^2 + \frac{\varepsilon^3 y}{2.3x}\omega^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\varepsilon^r y}{2.3.4\ldots rx}\omega^r.$$

§. 28.

Aufgabe. Den Logarithmen von $1+z$ durch eine Reihe zu bestimmen.

Auflösung. Um eine ganz allgemeine Auflösung zu geben, will ich annehmen, es sey z, mithin auch $l(1+z) = y$ eine Funktion von der absoluten veränderlichen Größe x, nicht aber z die absolute veränderliche Größe selbst (§. 2.).

1. Die Coefficienten A, B, C, D etc seyen so beschaffen, daß für sie und jeden Werth von u folgende Gleichung Statt finde

l(1+u)

$$l(1+u) = Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + \ldots$$
$$\ldots + Pu^r + Qu^{r+1} + \text{etc.}$$

2. So wird auch seyn $y = l(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \ldots + Pz^r + Qz^{r+1} + \text{etc.}$

3. Wenn die absolute veränderliche Größe x, auf welche die Funktionen y, z, vermöge der Voraussetzung, sich beziehen, um ω zunimmt; so nimmt y um folgenden Werth α, und z um folgenden Werth β zu (§. 27.).

$$\alpha = \frac{\varepsilon y}{x}\omega + \frac{\varepsilon^2 y}{2x}\omega^2 + \frac{\varepsilon^3 y}{2.3x}\omega^3 + \text{etc.}$$

$$\beta = \frac{\varepsilon z}{x}\omega + \frac{\varepsilon^2 z}{2x}\omega^2 + \frac{\varepsilon^3 z}{2.3x}\omega^3 + \text{etc.}$$

4. Bey der Voraussetzung (3), weil $y = l(1+z)$ ist, muß aber seyn $y + \alpha = l(1+z+\beta)$: also ist $\alpha = l(1+z+\beta) - l(1+z) = l\left(1 + \frac{\beta}{1+z}\right)$. Wegen (1) ist daher

$$\alpha = \frac{A\beta}{1+z} + \frac{B\beta^2}{(1+z)^2} + \frac{C\beta^3}{(1+z)^3} + \frac{D\beta^4}{(1+z)^4} + \text{etc.}$$

5. Einleuchtend ist es aber, daß, wegen (3), gewisse von ω unabhängige Coefficienten k, l, m, n etc möglich sind, für welche der Werth von α in (4) sich auch folgendermaßen würde ausdrücken lassen, wenn man nämlich die möglichen Potenzen von β in (3) statt β, β^2, β^3, β^4 etc in (4) substituirte.

$$\alpha = \frac{A\varepsilon z}{x(1+z)}\omega + k\omega^2 + l\omega^3 + m\omega^4 + \text{etc.}$$

6. Aus (3) 5) erhielte man demnach $\frac{\varepsilon y}{x} + \frac{\varepsilon^2 y}{2x}\omega + \frac{\varepsilon^3 y}{2.3x}\omega^2 + \frac{\varepsilon^4 y}{2.3.4x}\omega^3 + \text{etc} = \frac{A\varepsilon z}{x(1+z)} + k\omega + l\omega^2 + m\omega^3 + \text{etc.}$

7. Da

7. Da aber diese Gleichung überhaupt für jeden Werth von ω gelten soll; so ist nothwendig

$$\frac{\varepsilon y}{x} = \frac{A\varepsilon z}{x(1+z)};\ \varepsilon y = \frac{A\varepsilon z}{1+z},\ \text{und}\ (1+z)\,\varepsilon y - A\varepsilon z = 0.$$

8. Es ist aber in (2) nach (§. 5. 13.) $\varepsilon y = A\varepsilon z + 2Bz\varepsilon z + 3Cz^2\varepsilon z + 4Dz^3\varepsilon z + \cdots + rPz^{r-1}\varepsilon z + (r+1)\,Qz^r\varepsilon z$.

Hieraus und aus (7) findet man folgende Gleichung

$$\begin{array}{l} 2B)\,z + 3C)\,z^2 + 4D)\,z^3 + \cdots + (r+1)\,Q)\,z^r \\ +A) \quad +2B) \quad +3C) + \cdots\cdots + rP) = 0. \end{array}$$

Demnach hat man

$$\begin{array}{rl|l} 2B + & A = 0 & B = -\tfrac{1}{2}A \\ 3C + & 2B = 0 & C = \tfrac{1}{3}A \\ 4D + & 3C = 0 & D = -\tfrac{1}{4}A \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ (r+1)\,Q + & rP = 0 & Q = \dfrac{-r}{r+1}P. \end{array}$$

Und für diese Werthe findet man in (2) die bekannte Reihe $l(1+z) = A(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4}z^2 + \text{etc})$, wobey A der unbestimmte Modul des logarithmischen Systems ist.

§. 29.

1. Zusatz. Sey $u = 1+z$; so ist $\varepsilon u = \varepsilon z$ (§. 5.), und $l\,u = l(1+z)$; $\varepsilon.l\,u = \varepsilon.l(1+z) = \dfrac{A\varepsilon z}{1+z}$ (§. 28. n. 7.): also ist $\varepsilon.l\,u = \dfrac{A\varepsilon u}{u}$.

Das Exponential des zu was immer für einem System gehörigen Logarithmen von u wird also gefunden, wenn man das Exponential von u durch u dividirt, und den Quotienten mit dem Modul A des Systems multiplicirt.

§. 30.

2. Zusatz. Für die natürlichen Logarithmen ist der Modul $A = 1$: also für diese Logarithmen ist $\varepsilon . lu = \frac{\varepsilon u}{u}$.

Beyspiele.

$$y = l(1 + x^2)$$

giebt $\varepsilon y = \frac{\varepsilon(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}$ (§. 2. 5.).

$$y = l\,\frac{1-x}{1+x^2} = l(1-x) - l(1+x^2)$$

giebt $\varepsilon y = \varepsilon . l(1-x) - \varepsilon . l(1+x^2)$

$$= \frac{\varepsilon(1-x)}{1-x} - \frac{\varepsilon(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$= \frac{-x}{1-x} - \frac{2x^2}{1+x^2} \text{ (§. 2. 5.).}$$

§. 31.

3. Zusatz. In dem bestimmten Fall, wenn u eine absolute veränderliche Größe ist, nicht aber eine Funktion von einer absoluten veränderlichen Größe, ist $\varepsilon u = u$ (§. 4.), mithin $\varepsilon lu = A$ für jedes System, dessen Modul A ist (§. 29.), und $\varepsilon lu = 1$ für natürliche Logarithmen.

§. 32.

4. Zusatz. Hieraus erhellet, wie man Logarithmen von Logarithmen exponentiiren soll: man kann nämlich jeden Logarithmen für sich als eine veränderliche Größe betrachten, und das Exponential nach (§. 30.) suchen.

Z. B. $y = llu$

giebt $\varepsilon y = \frac{\varepsilon lu}{lu} = \frac{\varepsilon u}{ulu}$ (§. 30.).

$$y = \text{lllu}$$

giebt $\quad \varepsilon y = \frac{\varepsilon \text{llu}}{\text{llu}} = \frac{\varepsilon u}{u\text{lu}.\text{llu}}.$

§. 34.

5. Zusatz. Und nun kann man auch die sogenannten Exponentialgrößen von der Form $y = a^u$ exponentiiren; wenn man nämlich zuerst ihre Logarithmen nimmt, hernach nach (§. 30.) exponentiirt: nämlich

$$ly = la^u = u\,la; \; \frac{\varepsilon y}{y} = la.\varepsilon u;$$

mithin $\quad \varepsilon.a^u = \varepsilon y = a^u la.\varepsilon u.$

§. 34.

6. Zusatz. Für die Basis $a = e$ der natürlichen Logarithmen ist $la = le = 1$; also (§. 33.) $\varepsilon.e^u = e^u \varepsilon u$.

§. 35.

Aufgabe. Die Größe z, welcher der Logarithme $y = lz$ in irgend einem Systeme zugehört, durch eine Reihe auszudrücken.

Auflösung. 1. Es soll seyn $z = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots + Py^r + Qy^{r+1} + \text{etc.}$

2. So ist (§. 5. 13.) $\varepsilon z = A\varepsilon y + 2By\varepsilon y + 3Cy^2\varepsilon y + 4Dy^3\varepsilon y + \ldots + rPy^{r-1}\varepsilon y + (r+1)Qy^r\varepsilon y + \text{etc.}$

3. Aber wegen $y = lz$ ist $\varepsilon y = \frac{M\varepsilon z}{z}$, wenn M den Modul des Systems bedeutet (§. 29.): setzt man daher diesen Werth in (2); so findet man

$$z = MA + 2MBy + 3MCy^2 + 4MDy^3 + \ldots + rMPy^{r-1} + (r+1)MQy^r + \text{etc.}$$

4. Die Reihen (1) 3) sollten nun einander gleich seyn; bey ihnen wäre also

$MA = 1$	$A = \frac{1}{M}$.
$2MB = A$	$B = \frac{1}{2M^2}$.
$3MC = B$	$C = \frac{1}{2.3M^3}$.
$4MD = C$	$D = \frac{1}{2.3.4M^4}$.
⋮ ⋮	⋮ ⋮
$(r+1)MQ = P$	$Q = \frac{P}{(r+1)M}$.

Und für diese Werthe findet man aus (1) die bekannte Reihe

$$z = 1 + \frac{y}{M} + \frac{y^2}{2M^2} + \frac{y^3}{2.3M^3} + \ldots + \frac{y^r}{2.3\ldots rM^r}.$$

§. 36.

Aufgabe. Den Sinus und Cosinus von φ durch zwo Reihen auszudrücken.

Auflösung. 1. Es kann seyn, daß der Bogen φ, nicht eine absolute veränderliche Größe, sondern eine Funktion von einer absoluten veränderlichen Größe x ist: dieses will ich auch wirklich voraussetzen, um die Auflösung allgemeiner zu machen.

2. Nimmt man also an, daß x um ω wächst, und dafür der Bogen φ in $\varphi + e$ übergehet; so ist nach (§. 27.)

$$e = \frac{\varepsilon\varphi}{x}\omega + \frac{\varepsilon^2\varphi}{2x}\omega^2 + \frac{\varepsilon^3\varphi}{2.3x}\omega^3 + \text{etc.}$$

3. Bey

3. Bey derselben Voraussetzung muß Sin φ in Sin $(\varphi+e)$ übergehen, und es ist nach (§. 27.)

$$\text{Sin}(\varphi+e) - \text{Sin}\,\varphi = \frac{\varepsilon\,\text{Sin}\,\varphi}{x}\omega + \frac{\varepsilon^2\,\text{Sin}\,\varphi}{2x}\omega^2 + \frac{\varepsilon^3\,\text{Sin}\,\varphi}{2.3x}\omega^3 + \text{etc.}$$

4. Seyen nun die Coefficienten A, B, C, - - - P, Q dergestalt beschaffen, daß für sie und jeden denkbaren Kreisbogen folgende Reihe Statt finde

$$\text{Sin}\,\varphi = \varphi + A\varphi^3 + B\varphi^5 + C\varphi^7 + \cdots + P\varphi^{2n+1} + Q\varphi^{2n+3}.$$

5. Daher auch $\text{Sin}\,e = e + Ae^3 + Be^5 + Ce^7 + \cdots + Qe^{2n+3}$. Hieraus und aus (2) würde aber folgen, daß gewisse von ω unabhängige Coefficienten k, l, m etc. möglich sind, für welche wäre

$$\text{Sin}\,e = \frac{\varepsilon\varphi}{x}\omega + k\omega^2 + l\omega^3 + m\omega^4 + \text{etc.}$$

6. Da aber $\text{Cos}\,e = (1 - \text{Sin}\,e^2)^{\frac{1}{2}}$ ist; so müßten nothwendig andere von ω unabhängige Coefficienten α, β, γ etc möglich seyn, wofür wegen (5) wäre

$$\text{Cos}\,e = 1 + \alpha\omega^2 + \beta\omega^3 + \gamma\omega^4 + \text{etc.}$$

7. Nun ist $\text{Sin}(\varphi+e) = \text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,e + \text{Cos}\,\varphi\,\text{Sin}\,e$: wegen (6) 5) wäre also

$$\text{Sin}(\varphi+e) = \text{Sin}\,\varphi + \alpha\,\text{Sin}\,\varphi.\omega^2 + \beta\,\text{Sin}\,\varphi.\omega^3 + \gamma\,\text{Sin}\,\varphi.\omega^4 + \text{etc.}$$
$$+ \frac{\text{Cos}\,\varphi}{x}\omega\varepsilon\varphi + k\,\text{Cos}\,\varphi.\omega^2 + l\,\text{Cos}\,\varphi.\omega^3 + m\,\text{Cos}\,\varphi.\omega^4 + \text{etc}:$$

mithin

$$\text{Sin}(\varphi+e) - \text{Sin}\,\varphi = \frac{\text{Cos}\,\varphi}{x}\omega\varepsilon\varphi + (\alpha\,\text{Sin}\,\varphi + k\,\text{Cos}\,\varphi)\omega^2 + (\beta\,\text{Sin}\,\varphi + l\,\text{Cos}\,\varphi)\omega^3 + (\gamma\,\text{Sin}\,\varphi + m\,\text{Cos}\,\varphi)\omega^4 + \text{etc.}$$

8. Aus (3) 7) erhielte man $\frac{\varepsilon \text{Sin}\,\varphi}{x} + \frac{\varepsilon^2 \text{Sin}\,\varphi}{2x}\omega + \frac{\varepsilon^3 \text{Sin}\,\varphi}{2.3x}\omega^2 + \text{etc} = \frac{\text{Cos}\,\varphi}{x}\varepsilon\varphi + (\alpha\,\text{Sin}\,\varphi + k\,\text{Cos}\,\varphi)\omega + (\beta\,\text{Sin}\,\varphi + l\,\text{Cos}\,\varphi)\omega^2 + \text{etc}.$

9. Bey der Voraussetzung (4) muß also die Gleichung (8) für jedes ω gelten, welches nicht seyn kann, wenn nicht bey ihr $\frac{\varepsilon\,\text{Sin}\,\varphi}{x} = \frac{\text{Cos}\,\varphi}{x}\varepsilon\varphi$, und $\varepsilon\,\text{Sin}\,\varphi = \text{Cos}\,\varphi\,\varepsilon\varphi$ ist.

10. Ferner ist $\text{Cos}\,\varphi = \sqrt{(1 - \text{Sin}\,\varphi^2)}$: also nach (§. 13.) $\varepsilon\,\text{Cos}\,\varphi = \frac{-\text{Sin}\,\varphi\,\varepsilon\,\text{Sin}\,\varphi}{\sqrt{(1 - \text{Sin}\,\varphi^2)}} = \frac{-\text{Sin}\,\varphi\,\varepsilon\,\text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}\,\varphi}$.
Wegen (9) müßte daher seyn $\varepsilon\,\text{Cos}\,\varphi = -\text{Sin}\,\varphi\,\varepsilon\varphi$.

11. Nimmt man $\varepsilon\,\text{Sin}\,\varphi$ in (4) nach (§. 13.), und setzt man es $= \text{Cos}\,\varphi\,\varepsilon\varphi$ wegen (9); so erhält man

$$\text{Cos}\,\varphi = 1 + 3A\varphi^2 + 5B\varphi^4 + 7C\varphi^6 + \cdots \cdots + (2n+1)P\varphi^{2n} + (2n+3)Q\varphi^{2n+2}.$$

12. Und nimmt man $\varepsilon\,\text{Cos}\,\varphi$ in (11) nach (§. 13.), weil dieses $= -\text{Sin}\,\varphi\,\varepsilon\varphi$ seyn muß, wegen (10); so wird seyn

$$\text{Sin}\,\varphi = -2.3A\varphi - 4.5B\varphi^3 - 6.7C\varphi^5 \cdots - 2n(2n+1)P\varphi^{2n-1} - (2n+2)(2n+3)Q\varphi^{2n+1}.$$

13. Aus (4) 12) erhält man also

$-2.3A = 1.$	$A = \frac{-1}{2.3}.$
$-4.5B = A.$	$B = \frac{1}{2.3.4.5}.$
$-6.7C = B.$	$C = \frac{-1}{2.3.4.5.6.7}.$
⋮	⋮
$-(2n+2)(2n+3)Q = P.$	$Q = \frac{-P}{(2n+2)(2n+3)}.$

Für

Für diese Werthe in (4) 11) genommen findet man endlich folgende bekannte Reihen

$$\text{Sin}\,\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2.3} + \frac{\varphi^5}{2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{2.3\ldots7} + \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{\varphi^{2n+1}}{2.3\ldots(2n+1)}.$$

$$\text{Cos}\,\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2.3\ldots6} + \ldots$$

$$\ldots \pm \frac{\varphi^{2n+2}}{1.2.3\ldots(2n+2)}.$$

§. 37.

1. Zusatz. Für Sin φ und Cos φ als zwo Funktionen von φ hat man nach (§. 36. n. 9. 10.)

$$\varepsilon\,\text{Sin}\,\varphi = \text{Cos}\,\varphi\;\varepsilon\varphi.$$
$$\varepsilon\,\text{Cos}\,\varphi = -\,\text{Sin}\,\varphi\;\varepsilon\varphi.$$

§. 38.

2. Zusatz. Wegen Sin v $\varphi = 1 -$ Cos φ, und Cos v $\varphi = 1 -$ Sin φ, daher ε Sin v $\varphi = - \varepsilon$ Cos φ, und ε Cos v $\varphi = - \varepsilon$ Sin φ (§. 5.), muß nach (§. 37.) seyn

$$\varepsilon\,\text{Sin v}\,\varphi = \text{Sin}\,\varphi\;\varepsilon\varphi.$$
$$\varepsilon\,\text{Cos v}\,\varphi = -\,\text{Cos}\,\varphi\;\varepsilon\varphi.$$

3. Zusatz. Ferner ist $\text{Tang}\,\varphi = \frac{\text{Sin}\,\varphi}{\text{Cos}\,\varphi}$; daher

$$\varepsilon\,\text{Tang}\,\varphi = \frac{\text{Cos}\,\varphi\,\varepsilon\,\text{Sin}\,\varphi - \text{Sin}\,\varphi\,\varepsilon\,\text{Cos}\,\varphi}{\text{Cos}\,\varphi^2};$$ und $\text{Cot}\,\varphi$

$= \frac{1}{\text{Tang}\,\varphi}$; daher $\varepsilon\,\text{Cot}\,\varphi = -\frac{\varepsilon\,\text{Tang}\,\varphi}{\text{Tang}\,\varphi^2}$. Hieraus nach (§ 37.) erhält man also

$$\varepsilon\,\text{Tang}\,\varphi = \frac{\varepsilon\varphi}{\text{Cos}\,\varphi^2} = \text{Sec}\,\varphi^2.\varepsilon\varphi.$$

 ε Cot

$$\partial \text{Cot}\,\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\text{Sin}\,\varphi^2} = -\text{Cosec}\,\varphi^2 . \partial \varphi.$$

§. 40.

4. Zusatz. Endlich ist $\text{Sec}\,\varphi = \frac{1}{\text{Cos}\,\varphi}$, $\text{Cosec}\,\varphi = \frac{1}{\text{Sin}\,\varphi}$; daher $\partial\,\text{Sec}\,\varphi = -\frac{\partial \text{Cos}\,\varphi}{\text{Cos}\,\varphi^2}$; $\partial\,\text{Cosec}\,\varphi = -\frac{\partial\,\text{Sin}\,\varphi}{\text{Sin}\,\varphi^2}$: nach (§. 37.) ist also

$$\partial\,\text{Sec}\,\varphi = \frac{\text{Sin}\,\varphi\,\partial\varphi}{\text{Cos}\,\varphi^2} = \text{Sec}\,\varphi\;\text{Tang}\,\varphi . \partial\varphi.$$

$$\partial\,\text{Cosec}\,\varphi = -.\frac{\text{Cos}\,\varphi\,\partial\varphi}{\text{Sin}\,\varphi^2} = -\text{Cosec}\,\varphi\;\text{Cot}\,\varphi . \partial\varphi.$$

§. 41.

5. Zusatz. Die bisherigen Formuln (§. 37. 38. 39. 40.) gelten für jeden Fall, es mag φ als eine absolute veränderliche Größe, oder als eine Funktion von irgend einer absoluten veränderlichen Größe betrachtet werden (§. 36. n. 1.): im ersten Fall ist bey allen Formuln $\partial\varphi = \varphi$ (§. 4.).

§. 42.

6. Zusatz. Setzt man $\text{Sin}\,\varphi = x$, daher $\text{Cos}\,\varphi = \sqrt{(1-x^2)}$, oder $\text{Cos}\,\varphi = x$, mithin $\text{Sin}\,\varphi = \sqrt{(1-x^2)}$; so erhält man aus (§. 37.) für $\varphi = \text{Arc Sin}\,x$. oder $\varphi = \text{Arc Cos}\,x$.

$$\partial\,\text{Arc Sin}\,x = \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

$$\partial\,\text{Arc Cos}\,x = \frac{-\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

§. 43.

7. Zusatz. Für $\varphi = \text{Arc Sin v } x$, daher $\text{Sin v } x$
x, und $\text{Sin } \varphi = \sqrt{(2x - x^2)}$, oder $\varphi = \text{Arc Cos v } x$,
er $\text{Cos v } \varphi = x$, und $\text{Cos } \varphi = \sqrt{(2x - x^2)}$, findet
t aus (§. 38.).

$$\varepsilon \text{Arc Sin v } x = \frac{\varepsilon x}{\sqrt{(2x - x^2)}}.$$

$$\varepsilon \text{Arc Cos v } x = \frac{-\varepsilon x}{\sqrt{(2x - x^2)}}.$$

§. 44.

8. Zusatz. Und für $\varphi = \text{Arc Tang } x$, mithin
ng $\varphi = x$, und $\text{Sec } \varphi = \sqrt{(1 + x^2)}$, oder φ
Arc Cot x, daher $\text{Cot } \varphi = x$, und $\text{Cosec } \varphi$
$\sqrt{(1 + x^2)}$, erhält man aus (§. 39.)

$$\varepsilon \text{Arc Tang } x = \frac{\varepsilon x}{1 + x^2}.$$

$$\varepsilon \text{Arc Cot } x = \frac{-\varepsilon x}{1 + x^2}.$$

§. 45.

9. Zusatz. Endlich für $\varphi = \text{Arc Sec } x$, folg-
) $\text{Sec } \varphi = x$, und $\text{Sec } \varphi \text{ Tang } \varphi = x\sqrt{(x^2 - 1)}$,
er $\varphi = \text{Arc Cosec } x$, mithin $\text{Cosec } \varphi = x$ und
sec φ Cot $\varphi = x\sqrt{(x^2 - 1)}$, erhält man aus (§. 40.)

$$\varepsilon \text{Arc Sec } x = \frac{\varepsilon x}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}.$$

$$\varepsilon \text{Arc Cosec } x = \frac{-\varepsilon x}{x\sqrt{(x^2 - 1)}}.$$

§. 21.

10. Zusatz. Alle diese Formuln gelten für jede ver-
derliche Größe x, sie mag eine absolute veränderliche

 Größe,

Größe, oder was immer für eine Funktion von irgend einer absoluten veränderlichen Größe seyn; im ersten Fall ist überall $\varepsilon x = x$ (§. 4.).

III.

Erfindung der Funktionen aus ihren Exponentialien.

§. 47.

Die vorhergehende Theorie dient zur Bestimmung der Exponentialien gegebener Funktionen, und sie ist so vollständig, daß man nach ihr die Exponentialien von jeder Ordnung (§. 16.), sowohl algebraischer, als transcendenter, und der aus jenen und diesen zusammengesetzten Funktionen bestimmen kann. Nun aber lassen sich daraus die Vorschriften zur Erfindung der exponentiirten Funktionen (§. 2.) aus ihren Exponentialien herleiten: das Zeichen der einem gegebenen Exponential εZ zugehörigen exponentiirten Funktion soll der Buchstab F vor dem Exponential seyn, dergestalt, daß $F \varepsilon Z$ nichts anders bedeute, als diejenige Funktion, derer Exponential dem gegebenen εZ gleich ist.

§. 48.

1. Zusatz. Daher ist $F \varepsilon Z = Z$, und $\varepsilon F \varepsilon Z = \varepsilon Z$ (§. 47.): nämlich $F \varepsilon Z$ ist die Funktion Z, derer Exponential mit εZ ist bezeichnet worden; und $\varepsilon . F \varepsilon Z$ ist das Exponential der Funktion, derer Exponential mit εZ ist bezeichnet worden.

§. 49.

2. Zusatz. Unmittelbar aus einem gegebenen Exponential εy kann nur der veränderliche, nicht aber auch der beständige, wenn einer wirklich da ist, Theil der exponentiirten Funktion $F \varepsilon y$ hergeleitet werden (§. 5.): wenn man also unmittelbar aus εy findet, daß Z die Funktion

ist,

ist, derer Exponential dem gegebenen εy gleich ist; so muß man, um die exponentiirte Funktion $F \varepsilon y = y$ vollständig auszudrücken, $y = Z + C$ schreiben, wobey C die noch zu bestimmende Constante bedeuten soll.

§. 50.

3. Zusatz. Aber aus dem bekannten veränderlichen Theil Z einer Funktion $y = Z + C$ kann auch der Werth der Constante C bestimmt werden, wenn nur derjenige bestimmte Werth W bekannt ist, welchen die Funktion y erlangen mag, sobald die veränderliche Größe, auf welche y sich bezieht, einen bestimmten Werth w erhält: denn bey dieser Voraussetzung wäre $V + C = W$, wenn Z für den Werth w der veränderlichen Größe in V übergienge; mithin $C = W - V$, und $y = Z + W - V$.

§. 51.

4. Zusatz. Ist das Exponential $\varepsilon y = A \varepsilon Z$ durch das Produkt aus einem andern Exponential εZ in eine beständige Größe A bestimmt; so ist auch die ihm zugehörige exponentiirte Funktion $F \varepsilon y = A F \varepsilon Z$ (§. 47. 2.).

§. 52.

5. Zusatz. Und für $\varepsilon y = \varepsilon P + \varepsilon Q = \varepsilon R + \cdots \cdots + \varepsilon Z$ ist auch $F \varepsilon y = F \varepsilon P + F \varepsilon Q + F \varepsilon R + \cdots \cdots + F \varepsilon Z$ (§. 47. 7.), nämlich: die exponentiirte Funktion, welche einem aus mehreren andern Exponentialien zusammengesetzten Exponential zugehört, ist ebenfalls aus den exponentiirten diesen einzeln genommenen Exponentialien zugehörigen Funktionen zusammengesetzt.

§. 53.

6. Zusatz. Unmittelbar aus der in (§. 47.) gegebenen Erklärung, und der vorhergehenden Theorie lassen sich folgende Fundamentalformuln herleiten:

1. F

1. $F(u\partial v + v\partial u) = uv + C$ (§. 8. 49.).

2. $F z^m \partial z = \frac{z^{m+1}}{m+1} + C$ (§. 13.).

3. $F \frac{v\partial u - u\partial v}{v^2} = \frac{u}{v} + C$ (§. 14.).

4. $F \frac{\partial u}{u} = lu + C$ (§. 30.)

5. $F \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{Arc Sin } x + C$

6. $F \frac{-\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{Arc Cos } x + C$ (§. 42.).

7. $F \frac{\partial x}{\sqrt{(2x-x^2)}} = \text{Arc Sin v } x + C$

8. $F \frac{-\partial x}{\sqrt{(2x-x^2)}} = \text{Arc Cos v } x + C$ (§. 43.).

9. $F \frac{\partial x}{1+x^2} = \text{Arc Tang } x + C$

10. $F \frac{-\partial x}{1+x^2} = \text{Arc Cot } x + C$ (§. 44.).

11. $F \frac{\partial x}{x\sqrt{(x^2-1)}} = \text{Arc Sec } x + C$

12. $F \frac{-\partial x}{x\sqrt{(x^2-1)}} = \text{Arc Cosec } x + C$ (§. 45.).

§. 54.

7. Zusatz. Alle diese Formuln gelten für jeden Fall, es mag bey ihnen eine absolute veränderliche Größe, oder eine solche, welche selbst eine Funktion von einer absoluten veränderlichen Größe ist, vorhanden seyn: wird ein Exponential ∂y gegeben, bey welchem das Exponential der veränderlichen Größe, z. B. der Größe x gar nicht

vor-

rkömmt; so ist dieses ein Zeichen, daß x eine absolute ränderliche Größe, und $x = \varepsilon x$ ist (§. 4.); daher nn man εy mit $\frac{\varepsilon x}{x}$ multipliciren, hernach die exponenrte Funktion suchen.

Beyspiele.

$$\varepsilon y = x^4 = x^4 . \frac{\varepsilon x}{x} = x^3 \varepsilon x;$$

ebt $y = \frac{x^4}{4} + C$ (§. 53. 2. Form.).

$$\varepsilon y = x^r = x^r . \frac{\varepsilon x}{x} = x^{r-1} \varepsilon x;$$

ebt $y = \frac{x^r}{r} + C$ (§. 53. 2. Form.).

$$\varepsilon y = \frac{1}{x^r} = x^{-r} = x^{-r} . \frac{\varepsilon x}{x} = x^{-r-1} \varepsilon x;$$

ebt $y = \frac{x^{-r}}{-r} = \frac{-1}{r x^r} + C$ (§. 53. 2.).

$$\varepsilon y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \varepsilon x;$$

ebt $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$ (§. 53. 2.).

$$\varepsilon y = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{5}{2}} \varepsilon x;$$

ebt $y = \frac{-2x^{-\frac{3}{2}}}{3} = \frac{-2}{3\sqrt{x^3}} + C$ (§. 53. 2.).

$\varepsilon y = 4x^4 \sqrt{(1+x^4)}$ für $z = 1+x^4$

iebt $\varepsilon z = 4x^4$ (§. 2. 5.); $\varepsilon y = z^{\frac{1}{2}} \varepsilon z$:

so $y = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$ (§. 53. 2.) $= \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^4)^3} + C.$

εy

$$\varepsilon y = \frac{2z\varepsilon z}{1+z^2} = \frac{\varepsilon(1+z^2)}{1+z^2} \text{ (§. 5. 13.);}$$

giebt $y = l(1+z^2) + C$ (§. 53. 4.).

$$\varepsilon y = \frac{x^5}{a+bx^5} \text{ für } z = a+bx^5,$$

giebt $\varepsilon z = 5bx^5$ (§. 2. 5.); $x^5 = \frac{\varepsilon z}{5b}$;

$$\varepsilon y = \frac{1}{5b} \cdot \frac{\varepsilon z}{z}; \text{ also nach (§. 51. 53. 4.)}$$

$$y = \frac{1}{5b} lz = \frac{1}{5b} l(a+bx^5) + C.$$

§. 55.

8. Zusatz. Da also jedes Exponential $X\varepsilon x$ in eine Reihe von der Form $Ax^a\varepsilon x + Bx^b\varepsilon x + Cx^c\varepsilon x +$ etc kann verwandelt werden; so könnte schon die bisherige Theorie hinreichen, die exponentiirte jedem gegebenen Exponential $X\varepsilon x$ zugehörige Funktion wenigstens durch Näherung zu bestimmen. Doch könnte man sich der aus der Integralrechnung bereits bekannten Kunstgriffe bedienen, um die Erfindung der exponentiirten Funktionen aus bekannten Exponentialien zu erweiten, wovon auch nur ein Beyspiel hier überflüßig seyn würde.

IV.

Anleitung zur Anwendung der Exponentialrechnung.

§. 56.

Man kann sich nun dieser Exponentialrechnung bey allen Untersuchungen, bey welchen sonst die Differentialrechnung ihren Gebrauch findet, mit gleichem Erfolg bedienen, und ich halte für ganz überflüßig hier erst zu zeigen, wie man die Exponentialrechnung auf die Lehre von

Größ-

rößten und Kleinsten, die Summirung der Reihen u. s. f. nwenden soll: Indessen bleibt noch ein wichtiger Umstand u berühren übrig, nämlich die Erfindung der Exponentialien für unbekannte Funktionen.

§. 57.

Wenn eine Funktion y sich auf die absolute veränderliche Größe x beziehet; so wächst sie um eine Differenz $^{1} - y = \Delta y$, wenn x um irgend eine Differenz Δx unimmt: will man Δy durch die Exponentialien von y estimmen; so muß seyn (§. 27.)

$$\Delta y = \frac{\varepsilon y}{x}\Delta x + \frac{\varepsilon^2 y}{2x}\Delta x^2 + \frac{\varepsilon^3 y}{2.3x}\Delta x^3 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\varepsilon^r y}{2.3\ldots r x}\Delta x^r.$$

Z. B. $y = x^2$ giebt nach (§. 2. 16.).

$$\varepsilon y = 2x^2;\ \frac{\varepsilon y}{x} = 2x;\ \varepsilon^2 y = 2x;$$

$$\frac{\varepsilon^2 y}{x} = 2;\quad \varepsilon^3 y = 0$$ (§. 20.): also

$$\Delta y = 2x\Delta x + \frac{2\Delta x^2}{2} = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

$y = a + bx^3$ giebt nach (§. 2. 5. 16. 20.)

$$\varepsilon y = 3bx^3;\quad \frac{\varepsilon y}{x} = 3bx^2;$$

$$\varepsilon^2 y = 6bx^2;\quad \frac{\varepsilon^2 y}{x} = 6bx;$$

$$\varepsilon^3 y = 6bx;\quad \frac{\varepsilon^3 y}{x} = 6b;\ \varepsilon^4 y = 0$$: also

$$\Delta y = 3bx^2\Delta x + \frac{6bx\Delta x^2}{2} + \frac{6b\Delta x^3}{2.3} =$$

$$= 3bx^2\Delta x + 3bx\Delta x^2 + b\Delta x^3.$$

§. 58.

§. 58.

Wenn man doch bemerkt, daß die Funktion y abnehmen muß, wenn die absolute veränderliche Größe x, auf welche sie sich beziehet, zunimmt, weil alsdann $y^1 - y = \Delta y$ einen verneinten Werth erlanget; so muß die nach (§. 57.) erhaltene Differenz mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden.

§. 59.

Aus (§. 57.) erhält man $x\Delta y : \Delta x = (\varepsilon y + \frac{\varepsilon^2 y}{2}\Delta x + \frac{\varepsilon^3 y}{2.3}\Delta x^2 + \frac{\varepsilon^4 y}{2.3.4}\Delta x^3 + \text{etc}) : 1$, und dieses Verhältniß nähert sich der Gränze $\varepsilon y : 1$, wenn Δx unaufhörlich abnimmt: das Verhältniß $\varepsilon y : 1$ des Exponentials εy jeder Funktion y von einer absoluten veränderlichen Größe x gegen 1 ist also die Gränze, welcher das Verhältniß $x\Delta y : \Delta x$ des Produkts aus der veränderlichen Größe x in die Differenz der Funktion y gegen die Differenz der veränderlichen Größe sich ohne Ende nähern würde, wenn die Differenz Δx ohne Ende abnähme.

§. 60.

Sonst kann man mit vollkommenster Gewißheit behaupten, εy entstehe aus $\frac{x\Delta y}{\Delta x}$, wenn $\Delta x = 0$ wird (§. 57.). Doch mag man εy auf was immer für eine Art aus Δy herleiten; so muß εy allemal mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden, wenn die Funktion y abnimmt bey zunehmender veränderlichen Größe x (§. 58.).

§. 61.

Findet man, daß für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten P, Q, R, S - - - p, q, r, s u. s. f. und für jeden wie immer kleinen Werth der Differenz Δx

sowohl

sowohl $\frac{x\Delta y}{\Delta x} > Z + p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 +$ etc,

als $\frac{x\Delta y}{\Delta x} < Z + P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 +$ etc,

ist; so muß $\epsilon y = Z$ das Exponential der Funktion y seyn. Man kann nämlich aus bekannten Gründen beweisen, daß $Z : 1$ bey dieser Voraussetzung die Gränze ist, welcher $x\Delta y : \Delta x$ sich nähern würde, wenn Δx allmählich abnähme: daher ist $\epsilon y : 1 = Z : 1$ (§. 59.), und $\epsilon y = Z$.

§. 62.

Auf diesen Gründen beruhet die sicherste Erfindung der Exponentialien unbekannter Funktionen: ich würde mich ihrer eben so bedienen, wie ich mich solcher Gründe zur Bestimmung der Exponenten der Differentialverhältnisse zu bedienen pflege: dieses habe ich in der Beylage zum ersten und zweyten Bande meines Unterrichts in der mathematischen Analysis umständlich gezeigt; zur Erläuterung werden daher folgende Beyspiele hinreichen:

I. Für die gegebene Gleichung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten x, y einer krummen Linie, die Subtangente zu finden.

Man betrachte die Abscisse x als eine absolute veränderliche Größe, und die Ordinate y als eine Funktion von ihr. Wächst x um Δx; so übergeht y in y^{I}, und wenn man durch die Punkte, in welchen die krumme Linie von den Ordinaten y, y^{I} getroffen wird, eine Secante zieht, wodurch eine Subsecante S entstehen mag; so ist $\Delta y : \Delta x = y : S$; also auch $x\Delta y : \Delta x = xy : S$. Nimmt aber Δx allmählich ab; so nähert sich die Subsecante S der Subtangente, welche t heißen mag, und das Verhältniß $xy : S$ nähert sich dem Verhältnisse $xy : t$ als

seiner Gränze. Daher ist $\varepsilon y : 1 = xy : t$ (§. 59.): folglich die Subtangente $t = \frac{xy}{\varepsilon y}$.

Aus der Subtangente folgt die Tangente, Normal- und Subnormallinie sehr leicht: die Tangente sey T, die Normallinie N, und n die Subnormallinie; so ist

$$T = \sqrt{(y^2+t^2)} = \sqrt{\left(y^2 + \frac{x^2y^2}{\varepsilon y^2}\right)} = \frac{y}{\varepsilon y}\sqrt{(\varepsilon y^2+x^2)}.$$

$$n = \frac{y^2}{t} = y^2 : \frac{xy}{\varepsilon y} = \frac{y\varepsilon y}{x}.$$

$$N = \sqrt{(n^2+y^2)} = \sqrt{\left(\frac{y^2\varepsilon y^2}{x^2} + y^2\right)} = \frac{y}{x}\sqrt{(\varepsilon y^2+x^2)}.$$

Z. B. Beym Kreise ist $y = \sqrt{(2rx-x^2)}$: also nach (§. 13.)

$$\varepsilon y = \varepsilon(2rx-x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(2rx-x^2)^{-\frac{1}{2}}\varepsilon(2rx-x^2),$$

und $\varepsilon(2rx-x^2) = 2rx - 2x^2$ (§. 2.);

daher $$\varepsilon y = \frac{rx-x^2}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \frac{rx-x^2}{y};$$

$$\varepsilon y^2 = \frac{(rx-x^2)^2}{2rx-x^2} = \frac{r^2x-2rx^2+x^3}{2r-x}.$$

Folglich ist

$$t = xy : \frac{rx-x^2}{y} = \frac{y^2}{r-x} = \frac{2rx-x^2}{r-x}.$$

$$T = \frac{y^2}{rx-x^2}\sqrt{\left(\frac{r^2x-2rx^2+x^3}{2r-x}+x^2\right)} = \frac{ry}{r-x}$$

$$n = \frac{y}{x} \times \frac{rx-x^2}{y} = r-x.$$

$$N = \frac{y}{x}\sqrt{\left(\frac{r^2x-2rx^2+x^3}{2r-x}+x^2\right)} = r.$$

II. Für

II. Für die gegebene Gleichung zwischen den echtwinklichten Coordinaten y, x einer krummen inie den Bogen φ zu finden, welcher zwischen er Ordinate y, und der am Anfangspunkte der lbscissen errichteten liegt.

1. Seyen T, t, die der Abscisse x zugehörigen Tangente und Subtangente.

2. Wächst x, als eine absolute veränderliche Größe, m Δx; so nimmt y um $\Delta y = \frac{\varepsilon y}{x} \Delta x + \alpha \Delta x^2$ $+ \beta \Delta x^3 + etc$ für gewisse von Δx unabhängige Coefficienten α, β etc zu (§. 57.): daher müssen andere Coefficienten k, l, m etc möglich seyn, wofür $\sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)}$

$$= (\Delta y^2 + \Delta x^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\varepsilon y^2}{x^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \Delta x + k \Delta x^2$$

$$+ l \Delta x^3 + etc = \frac{\Delta x}{x} \sqrt{(\varepsilon y^2 + x^2)} + k \Delta x^2$$

$+ l \Delta x^3 + etc$ seyn würde.

3. Bey derselben Voraussetzung (2) wächst der Bogen um $\Delta\varphi$, die Ordinate y übergeht in $y^I = y + \Delta y$, nd die Tangente T in (1), gehörig verlängert, trifft die rdinate y^I irgendwo in einem Punkte, so, daß der Bogen $\Delta\varphi$ für jede wie immer kleine Differenz Δx größer als ine Sehne, und zugleich kleiner als das Stück der Tangente zwischen dem Berührungspunkte und der Ordinate y^I gesetzt werden kann: heißt also dieses Stück s, und es Bogens $\Delta\varphi$ Sehne c; so hat man allemal

$$\Delta\varphi > c \text{ und } \Delta\varphi < s.$$

Aber s ist die Hypotenuse eines rechtwinklichten reyecks, wovon eine Seite Δx ist, und eben diesem reyecke ist jenes ähnlich, wo T in (1) die Hypotenuse, d t die mit Δx homologe Seite ist: also $s : \Delta x = T : t$, ithin nach (I)

$$s:\Delta x = \frac{y}{\varepsilon y}\sqrt{(\varepsilon y^2+x^2)} : \frac{xy}{\varepsilon y};\ s = \frac{\Delta x}{x}\sqrt{(\varepsilon y^2+x^2)}.$$

Nimmt man demnach des Bogens $\Delta\varphi$ Sehne $c = \sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)}$ nach (2); so hat man

$$\Delta\varphi > \frac{\Delta x}{x}\sqrt{(\varepsilon y^2+x^2)} + k\Delta x^2 + l\Delta x^3 + \text{etc};$$

$$\Delta\varphi < \frac{\Delta x}{x}\sqrt{(\varepsilon y^2+x^2)}:$$ also auch

$$\frac{x\Delta\varphi}{\Delta x} > \sqrt{(\varepsilon y^2+x^2)} + k\Delta x + l\Delta x^3 + \text{etc};$$

$$\frac{x\Delta\varphi}{\Delta x} < \sqrt{(\varepsilon y^2+x^2)}.$$

Nach (§. 61.) erhält man $\varepsilon\varphi = \sqrt{(\varepsilon y^2+x^2)}$ für das Exponential des Bogens φ, als einer Funktion von der Abscisse x, welche als eine absolute veränderliche Größe ist betrachtet worden, statt welcher Formel man demnach auch folgende annehmen kann (§. 55.)

$$\varepsilon\varphi = \frac{\varepsilon x}{x}\sqrt{(\varepsilon y^2+x^2)};$$ und nun ist

$$\varphi = F\frac{\varepsilon x}{x}\sqrt{(\varepsilon y^2+x^2)}$$ nach (§. 47.).

Z. B. Beym Kreise ist $y = \sqrt{(2rx-x^2)} = (2rx-x^2)^{\frac{1}{2}}$; also, wie oben in (I)

$$\varepsilon y^2 = \frac{r^2x^2 - 2rx^3 + x^4}{2rx - x^2};$$ daher

$$\frac{\varepsilon x}{x}\sqrt{(\varepsilon y^2+x^2)} = \frac{\varepsilon x}{x}\cdot\frac{rx}{\sqrt{(2rx-x^2)}} = \frac{r\varepsilon x}{\sqrt{(2rx-x^2)}};$$

und $$\varphi = F\frac{r\varepsilon x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}.$$

Drückt

Drückt man demnach $\frac{1}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$ durch eine Reihe aus, und multiplicirt man diese mit $r\varepsilon x$; so wird man hierauf φ nach (§. 54. 55.) suchen können.

III. Wenn bey der Voraussetzung (II) R den Raum bedeutet, welcher zwischen dem Bogen φ, der Abscisse x, und den beyden Ordinaten liegt; so nimmt auch R um ΔR zu, wenn x um Δx wächst, und es ist

$$\Delta R > y \Delta x;\quad \Delta R < (y + \Delta y)\Delta x;$$
$$\frac{x\Delta R}{\Delta x} > xy;\quad \frac{x\Delta R}{\Delta x} < x(y + \Delta y).$$

Folglich für denselben Werth von Δy, wie bey (II) ist auch

$$\frac{x\Delta R}{\Delta x} > xy;\quad \frac{x\Delta R}{\Delta x} < xy + \varepsilon y . \Delta x + \alpha x \Delta x^2$$
$$+ \beta x \Delta x^3 + \text{etc.}$$ Mithin nach (§. 61.)

$$\varepsilon R = xy = xy . \frac{\varepsilon x}{x} = y\,\varepsilon x \text{ (§. 55.)};$$

und nun $R = F y \varepsilon x$.

Nach dieser Formel lassen sich demnach die ebenen Flächen quadriren.

IV. Eben so leicht findet man die Formul für die Cubatur runder Körper, welche durch die Umdrehung einer krummen Linie um ihre Axe erzeugt werden. Wenn man sich nämlich am Endpunkte der Abscisse x, woran eine Ordinate y stehen mag, einen auf die Axe senkrechten Durchschnitt denkt, und mit S das Stück des ganzen Körpers bezeichnet, welches zwischen demselben Durchschnitte und der Spitze liegt; so müssen S, y, wenn x um Δx zunimmt, um ΔS, Δy wachsen; es muß ferner ΔS größer seyn als der Cylinder, der Δx zur Höhe, und y

 zum

zum Halbmesser seiner Grundfläche hat, zugleich aber kleiner, als der Cylinder, welcher bey derselben Höhe, $y+\Delta y$ zum Halbmesser seiner Grundfläche hat: also

$$\Delta S > \pi y^2 \Delta x, \text{ und } \Delta S < \pi (y+\Delta y)^2 \Delta x$$

für das Verhältniß $1 : \pi$ des Halbmessers zur halben Peripherie. Nimmt man aber den Werth von Δy wie in (II); so erhält man

$$\frac{x\Delta S}{\Delta x} > \pi x y^2; \quad \frac{x\Delta S}{\Delta x} < \pi x (y + \frac{\varepsilon y}{x} \Delta x + \alpha \Delta x^2 + \beta \Delta x^3 + \text{etc})^2.$$

Daher muß es gewisse von Δx unabhängige Coefficienten p, q, r etc geben, wofür wäre

$$\frac{x\Delta S}{\Delta x} > \pi x y^2; \quad \frac{x\Delta S}{\Delta x} < \pi x y^2 + p\Delta x + q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + \text{etc.}$$

Folglich nach (§. 61.)

$$\varepsilon S = \pi x y^2 = \pi x y^2 . \frac{\varepsilon x}{x} = \pi y^2 \varepsilon x \text{ (§. 55.)},$$

und nun $S = F \pi y^2 \varepsilon x$.

V. Sey s der Raum, welchen ein Punkt binnen einer Zeit t durchläuft; die Bewegung sey wie immer veränderlich, und c bedeute die binnen der Zeit t erzeugte Geschwindigkeit. Nimmt t um Δt zu; so nimmt s um Δs zu, die Geschwindigkeit c aber nimmt um Δc zu oder ab, und es ist bey zunehmender Geschwindigkeit

$$\Delta s > c \Delta t; \quad \Delta s < (c + \Delta c) \Delta t;$$

bey abnehmender Geschwindigkeit aber

$$\Delta s < c \Delta t; \quad \Delta s > (c - \Delta c) \Delta t.$$

Man kann aber s, c als zwo Funktionen von der Zeit t, als einer absoluten veränderlichen Größe, betrachten, daher für gewisse von Δt unabhängige Coefficienten α, β, γ etc, $\Delta c = \alpha \Delta t + \beta \Delta t^2 + \gamma \Delta t^3 + \text{etc}$ (§. 57.) setzen: also

$$\frac{t\Delta s}{\Delta t} > tc;\ \frac{t\Delta s}{\Delta t} < tc + \alpha t\Delta t + \beta t\Delta t^2 + \gamma t\Delta t^3 + \text{etc}$$ oder

$$\frac{t\Delta s}{\Delta t} < tc;\ \frac{t\Delta s}{\Delta t} > tc - \alpha t\Delta t - \beta t\Delta t^2 - \gamma t\Delta t^3 - \text{etc.}$$

In beyden Fällen wäre nach (§. 61.)

$$\varepsilon s = tc = tc.\frac{\varepsilon t}{t} = c\varepsilon t \text{ (§. 55.)}.$$

Dieses wäre demnach die erste Grundformul der ganzen Dynamik: die zweyte findet man so:

VI. Eine bloß träge Masse M werde von einer veränderlichen Kraft nach der durch ihren Schwerpunkt gehenden geradlinichten Richtung getrieben, so, daß sie binnen der Zeit t eine Geschwindigkeit c erlanget: die Kraft am Ende dieser Zeit sey v, und, wenn t, als eine absolute veränderliche Größe betrachtet, um Δt zunimmt, nehme sie um Δv zu oder ab. Bey diesen Voraussetzungen erhält man aus bekannten Gründen für die zunehmende Kraft

$$\Delta c > \frac{2gv}{M}\Delta t;\ \Delta c < \frac{2g(v+\Delta v)}{M}\Delta t;$$

für die abnehmende Kraft

$$\Delta c < \frac{2gv}{M}\Delta t;\ \Delta c > \frac{2g(v-\Delta v)}{M}\Delta t.$$

also

$$\frac{t\Delta c}{\Delta t} > \frac{2gtv}{M};\ \frac{t\Delta c}{\Delta t} < \frac{2gtv}{M} + \frac{2gt}{M}\Delta v,$$

oder

$$\frac{t\Delta c}{\Delta t} < \frac{2gtv}{M};\ \frac{t\Delta c}{\Delta t} > \frac{2gtv}{M} - \frac{2gt}{M}\Delta v.$$

Da aber v als eine Funktion von t kann betrachtet, daher $\Delta v = \frac{\varepsilon v}{t}\Delta t + \frac{\varepsilon^2 v}{2t}\Delta t^2 + \frac{\varepsilon^3 v}{2.3t} + etc$ gesetzt werden (§. 57.); so sieht man leicht ein, warum nach (§. 61.) in beyden Fällen

$$\varepsilon c = \frac{2gtv}{M} = \frac{2gtv}{M}.\frac{\varepsilon t}{t} = \frac{2gv}{M}\varepsilon t \text{ (§. 55.)}$$

seyn muß.

Anmerkung des Herausgebers.

Der vorstehende lehrreiche Aufsatz, den sein scharfsinniger Verfasser in seinem so eben (Leipzig 1798) herausgekommenen **Unterricht in der mathematischen Analysis und Maschinen-Lehre**, so wie in einer besondern (im Intelligenzblatte der Allg. Litt. Zeit. No. 99. d. J. befindlichen) **Nachricht**, für das mathematische Archiv zu liefern versprochen hatte, enthält die weitere Ausführung der in jenem Unterrichte (S. 42 u. f.) gegebenen ersten Gründe einer neuen Rechnungsmethode, die von einem, das Polynomialtheorem und dessen Beweis betreffenden, Mitterpacherischen Entwurfe (das. S. 38-42) abstrahirt und abgeleitet worden ist. Ihr Urheber, Herr Prof. **Pasquich**, nennt sie die **Exponentialrechnung**, in einem allgemeinern, weniger beschränkten Sinne, als in welchem das Wort sonst vorkommt; weil dabey nur die Exponenten der Differentialverhältnisse, als endliche Größen, zum Gegenstande der Differentialrechnung gemacht werden. In jener Nachricht wird sie als eine neue, von allen Begriffen des unendlich Kleinen ganz unabhängige, und auf den einfachsten Gründen beruhende Rechnung angege-

gegeben, die alles, was bisher nur immer die Differentialrechnung geleistet hat, eben so schnell und leicht zu leisten vermögend sey; eine Behauptung, die man nun, aus dem hier vorliegenden ausführlicherm Entwurfe, mit Vergnügen bestätiget finden wird. Noch wird in jener Nachricht angeführt: daß Herr Prof. Grüson zu Berlin, am Schlusse des Vorberichts zu seiner Uebersetzung von Lagrange's Theorie der analytischen Funktionen (vom 6ten Febr. 1798) einen ganz neuen Calcul angekündigt habe, den er Exponirungscalcul nennt, und nächstens bekannt machen werde, mittelst welchem sich eben so schnell und leicht alles dasjenige verrichten lasse, was bisher nur immer die Differentialrechnung geleistet hat, und der gänzlich auf Principien beruhe, die zur Analysis endlicher Größen gehören, und alle Betrachtungen von unendlich kleinen Größen entfernen; einen Calcul also, der vollkommen die oben angezeigten Eigenschaften der Pasquichischen Exponentialrechnung hat. Herr Pasquich versichert, schon vor neun Jahren in dem Besitze seiner Methode gewesen zu seyn, auch habe er vor fünf Jahren Herrn Prof. Kraft in Petersburg einen Aufsatz darüber zugeschickt, und solchen nachher verschiedenen Gelehrten in Deutschland mitgetheilt. Wie weit beyde Verfasser mit einander zusammentreffen, oder von einander abweichen, wird dann, wenn auch Herr Prof. Grüson seinen Calcul wird vorgelegt haben, aus beyder Vergleichung erhellen. Herr Prof. Pasquich schlägt übrigens den Werth seiner Exponentialrechnung so wenig hoch an, daß er sich vielmehr am Ende der ofterwähnten Nachricht dahin erklärt, wie er jeden neuen Calcul, wodurch man das zu ersetzen suche, was der schlechtabgehandelten Differentialrechnung fehlet, für ganz entbehrlich halte.

Hindenburg.

II.

Ueber die Wegschaffung der Wurzelgrößen aus den Gleichungen; von Herrn Prof. E. G. Fischer, zu Berlin.

Fortsetzung des Aufsatzes im 6ten Heft. S. 180 u. f.

Dritte Methode.

§. 22. Ehe ich die dritte Methode auseinandersetze, muß ich die Erklärung einer eigenen Art von Zeichen, die ich dabey gebraucht habe, und die auch bey andern Rechnungen Bequemlichkeiten gewähren, vorausschicken.

§. 23. Die merkwürdige, und durch ihre Anwendungen so fruchtbare, Formel $\text{Cos}\,\varphi + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\varphi$, bezeichne ich mit einem einzigen griechischen $\varkappa$, und setze über dasselbe den Winkel oder Bogen, worauf sie sich bezieht, als Marke. Ich setze also $\text{Cos}\,\varphi + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\varphi = \overset{\varphi}{\varkappa}$.

Diese Bezeichnung hat ihren ganz eigenen Algorithmus, den ich der Hauptsache nach kürzlich erklären muß.

§. 24. Da, wenn $p = 2\pi$, für folgende Bogen

$$\varphi;\ p+\varphi;\ 2p+\varphi;\ 3p+\varphi;\ \text{etc etc}$$

Sinus und Cosinus völlig die nämlichen sind, so hat man

$$\overset{\varphi}{\varkappa} = \overset{p+\varphi}{\varkappa} = \overset{2p+\varphi}{\varkappa} = \overset{3p+\varphi}{\varkappa} = \text{etc}$$

oder, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, allgemein

$$\overset{\varphi}{\varkappa} = \overset{np+\varphi}{\varkappa}.$$

§. 25. Da ferner $(\text{Cos}\,\varphi + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\varphi)(\text{Cos}\,\psi + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\psi) = \text{Cos}\,(\varphi+\psi) + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,(\varphi+\psi)$, so hat man $\overset{\varphi}{\varkappa} \cdot \overset{\psi}{\varkappa} = \overset{\varphi+\psi}{\varkappa}$

folglich

folglich auch $\varkappa^{\phi} : \varkappa^{\psi} = \varkappa^{\phi-\psi}$ folglich auch, wenigstens für ganze n, $\left(\varkappa^{\phi}\right)^{n} = \varkappa^{n\phi}$

§. 26. Da $\varkappa^{\phi} = \varkappa^{p+\phi} = \varkappa^{2p+\phi} = \varkappa^{3p+\phi} =$ etc (§. 24.) so ist, wenigstens für ganze n,

$$\sqrt[n]{\varkappa^{\phi}} = \left(\varkappa^{\phi}\right)^{\frac{1}{n}} = \varkappa^{\frac{\phi}{n}}; = \varkappa^{\frac{p+\phi}{n}}; = \varkappa^{\frac{2p+\phi}{n}}; = \varkappa^{\frac{3p+\phi}{n}}; \text{ etc.}$$

Obgleich alle diese Formeln $= \sqrt[n]{\varkappa^{\phi}}$ sind, so ist doch leicht einzusehen, daß sie nicht unter einander gleich sind. Doch sind sie auch nicht sämmtlich verschieden. Nur

$$\varkappa^{\frac{\phi}{n}}; \quad \varkappa^{\frac{p+\phi}{n}}; \quad \varkappa^{\frac{2p+\phi}{n}}; \quad \text{- - - - - bis} \quad \varkappa^{\frac{(n-1)p+\phi}{n}}$$

sind verschieden. Geht man weiter, so ist

$$\varkappa^{\frac{np+\phi}{n}} = \varkappa^{p+\frac{\phi}{n}} = \varkappa^{\frac{\phi}{n}} \text{ (§. 24.). Deßgleichen}$$

$$\varkappa^{\frac{(n+1)p+\phi}{n}} = \varkappa^{p+\frac{p+\phi}{n}} = \varkappa^{\frac{p+\phi}{n}} \text{ (§. 24.) u. s. f.}$$

Man hat also nur n verschiedene Werthe, welches die n Werthe von $\sqrt[n]{\varkappa^{\phi}}$ sind.

§. 27. Wenn p wie bisher die Kreisperipherie oder 2π ist, so ist allezeit $\varkappa^{p} = +1$, weil Cos p $= +1$, und Sin p $= 0$. Also hat man

$$\varkappa^{p} = \varkappa^{2p} = \varkappa^{3p} = \varkappa^{4p} = \text{- - -} = \varkappa^{np} = +1$$

und eben diesen Werth hat auch $\varkappa^{0}$.

§. 28. Es sey a irgend eine positive, oder negative, mögliche, oder unmögliche Größe, so darf man allezeit setzen $a = a\varkappa^{p} = a\varkappa^{2p} = a\varkappa^{3p} = \text{- - -} = a\varkappa^{np}$. (§. 27.).

§. 29.

§. 29. Die n Wurzeln aus irgend einer Größe die man als eine nte Potenz ansieht, und die wir α^n nennen wollen, lassen sich demnach so ausdrücken:

Da $\alpha^n = \alpha^n x^p$, so ist

$$\alpha = \alpha x^{\frac{p}{n}}; = \alpha x^{\frac{2p}{n}}; = \alpha x^{\frac{3p}{n}}; \cdots = \alpha x^{\frac{np}{n}}.$$

§. 30. Da die eben angegebenen Werthe von α, die Wurzeln der Gleichung $x^n - \alpha^n = 0$ sind, so ist aus der Theorie der Gleichungen klar, daß

$$\alpha\,(x^{\frac{p}{n}} + x^{\frac{2p}{n}} + x^{\frac{3p}{n}} + \cdots + x^{\frac{np}{n}}) = 0$$

oder $x^{\frac{p}{n}} + x^{\frac{2p}{n}} + x^{\frac{3p}{n}} + \cdots + x^{\frac{np}{n}} = 0$,

ferner daß $\alpha^n\,(x^{\frac{p}{n}} \cdot x^{\frac{2p}{n}} \cdot x^{\frac{3p}{n}} \cdots x^{\frac{np}{n}}) = \alpha^n$,

oder $x^{\frac{p}{n}} \cdot x^{\frac{2p}{n}} \cdot x^{\frac{3p}{n}} \cdots x^{\frac{np}{n}} = +1 = x^p$

seyn werde.

Die Summe der Combinationen von weniger als n Gliedern sind in jeder Klasse $= 0$; da in $x^n - \alpha^n = 0$ alle Zwischenglieder fehlen.

§. 31. Diese Art, die Wurzeln aus α^n auszudrükken (§. 29), ist für allgemeine Rechnungen bequem, weil man nicht nöthig hat, die Fälle, wo α^n positiv oder negativ, möglich oder unmöglich ist, zu unterscheiden. Dagegen ist sie für bestimmte Rechnungen nicht immer bequem. Gesetzt es wäre α^n negativ, etwa $= -\beta$, und $n = 6$; also $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha = \sqrt[6]{-\beta}$, so müßte wenigstens erst ein

ein Werth von $\sqrt[\delta]{-\beta}$ besonders gesucht werden. Ist dieser aber gefunden, und heißt er α, so ergeben sich alle übrige Werthe, wie oben (§. 29.).

§. 32. Nach dieser Erläuterung des Zeichens $\varkappa$ und seines Algorithmus, komme ich zur Hauptsache zurück.

Wenn man r Faktoren von der Form $x^n - \alpha^n$ mit einander multiplicirt, so ist klar, daß im Produkt keine andere Potenzen von x vorkommen können, als solche, deren Exponenten durch n theilbar sind. Das Produkt wird also folgende Form haben:

$$x^{rn} - Ax^{(r-1)n} + Bx^{(r-2)n} - Cx^{(r-3)n} + \cdots \pm Q = 0.$$

§. 33. Umgekehrt, muß jede Gleichung von dieser Form, in r Faktoren von der Form $x^n - \alpha^n$ zerlegt werden können.

§. 34. Es sey die Gleichung

$$x^r - ax^{r-1} + bx^{r-2} - cx^{r-3} + \cdots \pm q = 0$$

gegeben, und ihre r Wurzeln sollen seyn

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \cdots \varrho, \text{ so daß}$$

$$x^r - ax^{r-1} + bx^{r-2} - \cdots \pm q = (x-\alpha)(x-\beta) \cdots \cdots (x-\varrho).$$

§. 35. Soll aus dieser Gleichung eine andere, mit nmal größeren Exponenten, gefunden werden, so wird man diese Absicht erreichen, wenn sich eine Gleichung finden läßt, die aus den r Faktoren $(x^n - \alpha^n)(x^n - \beta^n) \cdots \cdots (x^n - \varrho^n)$ zusammengesetzt ist (§. 5.). Diese Gleichung aber läßt sich in der That finden, ohne daß man nöthig hat, die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma \cdots \varrho$ zu wissen.

§. 36. Vermittelst (§. 29. 30.) läßt sich jeder der Faktoren $(x^n - \alpha^n)(x^n - \beta^n)$ etc. in seine n einfachen Faktoren zerfällen. Es ist nämlich, wenn man statt

α^n,

$\alpha^n, \beta^n, \gamma^n$ etc nach (§. 28.) überall $\alpha^n \overset{p}{x}$, $\beta^n \overset{p}{x}$, $\gamma^n \overset{p}{x}$ etc schreibt

$$(x^n - \alpha^n \overset{p}{x}) = (x - \alpha \overset{\frac{p}{n}}{x})(x - \alpha \overset{\frac{2p}{n}}{x})(x - \alpha \overset{\frac{3p}{n}}{x}) \cdots (x - \alpha \overset{\frac{np}{n}}{x})$$

$$(x^n - \beta^n \overset{p}{x}) = (x - \beta \overset{\frac{p}{n}}{x})(x - \beta \overset{\frac{2p}{n}}{x})(x - \beta \overset{\frac{3p}{n}}{x}) \cdots (x - \beta \overset{\frac{np}{n}}{x})$$

$$(x^n - \gamma^n \overset{p}{x}) = (x - \gamma \overset{\frac{p}{n}}{x})(x - \gamma \overset{\frac{2p}{n}}{x})(x - \gamma \overset{\frac{3p}{n}}{x}) \cdots (x - \gamma \overset{\frac{np}{n}}{x})$$

etc etc etc

$$(x^n - \varrho^n \overset{p}{x}) = (x - \varrho \overset{\frac{p}{n}}{x})(x - \varrho \overset{\frac{2p}{n}}{x})(x - \varrho \overset{\frac{3p}{n}}{x}) \cdots (x - \varrho \overset{\frac{np}{n}}{x})$$

1. 2. 3. - - - n

Es ist klar, daß wenn die sämmtlichen über 1. 2. 3. - - - n stehenden einfachen Faktoren mit einander multiplicirt werden, eben das herauskommen müsse, als wenn man die Faktoren $(x^n - \alpha^n)$ $(x^n - \beta^n)$ - - - - - $(x^n - \varrho^n)$ mit einander multiplicirte: d. h. ihr Produkt wird die gesuchte Gleichung mit nmal erhöhten Exponenten seyn.

§. 37. Betrachtet man nun diese einfachen Faktoren mit einiger Aufmerksamkeit, nicht nach den horizontalen, sondern nach den vertikalen Reihen, wie sie unter einander stehn, so wird man leicht gewahr, daß jede einzelne Vertikalreihe ein Produkt geben müsse, das der ursprünglich gegebenen Gleichung $x^r - a x^{r-1} + b x^{r-2} -$ etc vollkommen ähnlich ist. Vermittelst der bekannten Sätze, durch welche die Coefficienten einer Gleichung aus ihren Wurzeln bestimmt werden, ist es demnach leicht, jedes dieser Produkte zu finden. Nämlich

die

die Faktoren über	geben das Produkt
1.	$x^r - \varkappa^{\frac{p}{n}} a x^{r-1} + \varkappa^{\frac{2p}{n}} b x^{r-2} - - - \pm \varkappa^{\frac{rp}{n}} q = 0$
2.	$x^r - \varkappa^{\frac{2p}{n}} a x^{r-1} + \varkappa^{\frac{4p}{n}} b x^{r-2} - - - \pm \varkappa^{\frac{2rp}{n}} q = 0$
3.	$x^r - \varkappa^{\frac{3p}{n}} a x^{r-1} + \varkappa^{\frac{6p}{n}} b x^{r-2} - - - \pm \varkappa^{\frac{3rp}{n}} q = 0$
etc	etc etc
n.	$x^r - \varkappa^{\frac{np}{n}} a x^{r-1} + \varkappa^{\frac{2np}{n}} b x^{r-2} - - - \pm \varkappa^{\frac{nrp}{n}} q = 0$

Daß die letzte dieser Gleichungen mit der ursprünglich gegebenen (§. 34.) völlig einerley sey, ist leicht einzusehen (§. 27.). Das Produkt von allen aber ist die gesuchte erhöhte Gleichung.

§. 38. Da aber alle hier vorkommende $\varkappa$ bekannte und gegebene Größen sind, und das Gesetz, nach welchem sie horizontal und vertikal fortschreiten, so einfach und einleuchtend ist, so ist klar, daß wenn die unterste Reihe gegeben ist, die darüber stehenden augenblicklich formirt werden können: d. h. zu jeder gegebenen Gleichung wird man augenblicklich die übrigen $n-1$ Hülfsgleichungen bestimmen können, von denen, nebst der gegebenen, die gesuchte ein Produkt ist. Auch ist es klar, daß man dazu gar nicht die Wurzeln der gegebenen Gleichung zu wissen nöthig habe.

§. 39. Um nun die Coefficienten A, B, C - - - Q der gesuchten Gleichung (deren Form §. 32. steht) zu finden, ist nichts weiter nöthig, als daß die gegebene Gleichung, nebst den $n-1$ Hülfsgleichungen in einander multipliciret werden.

§. 40. Das Resultat dieser Multiplication läßt sich vermittelst der Variationszeichen des Herrn Professor Hindenburg auf eine sehr einfache Art vorstellen. Denn man setze in §. 37. über die Glieder die Exponenten von x als Indices, und es zeige N, Variationen von n Gliedern, aus den Elementen n, n — 1, n — 2 - - - 2, 1, 0 an: so ist das gesuchte Produkt

$$^{nr}Nx^{nr} + {}^{n(r-1)}Nx^{n(r-1)} + {}^{n(r-2)}Nx^{n(r-2)} + \ldots$$
$$\ldots + {}^{n}Nx^{n} + {}^{0}N = 0$$

Da nämlich im Voraus bekannt ist, daß im Produkte keine andere Potenzen von x vorkommen können, als solche, deren Exponent mit n aufgeht, so dürfen auch keine andern Variationen formirt werden, als solche, deren Summenexponent mit n aufgeht. Im Produkte haben alle Glieder das Zeichen + erhalten, weil beym Gebrauch das Zeichen jedes Gliedes sich von selbst aus den Zeichen ergiebt, welche a, b, c - - - q in der gegebenen Gleichung haben.

§. 41. Um das Verfahren anschaulicher zu machen, wollen wir aus der Gleichung $x^2 + ax - b = 0$ eine andere, mit dreymal größeren Exponenten, ableiten. Es ist also hier r = 2 und n = 3, und die drey zu multiplicirenden Gleichungen sind nach (§. 37. 38)

$$p)\quad x^2 + \overset{\frac{p}{3}}{\varkappa}\, ax - \overset{\frac{2p}{3}}{\varkappa}\, b = 0$$

$$q)\quad x^2 + \overset{\frac{2p}{3}}{\varkappa}\, ax - \overset{\frac{4p}{3}}{\varkappa}\, b = 0$$

$$r)\quad x^2 + \overset{\frac{3p}{3}}{\varkappa}\, ax - \overset{\frac{6p}{3}}{\varkappa}\, b = 0$$

2. 1. 0. sind die Indices.

§. 42. Das Produkt p q r, ist nach (§. 40.) in Variationszeichen $^{6}Cx^{6} + {}^{3}Cx^{3} + {}^{0}C = 0$

Nun

Nun ist $6 = \overset{p.}{2} + \overset{q.}{2} + \overset{r.}{2}$, und da der Coefficient von x^2 in allen drey Gleichungen $= 1$ ist, so ist ${}^6C = 1$.

Ferner ist

$$3 = \overset{p.}{0} + \overset{q.}{1} + \overset{r.}{2}; \text{ daher } {}^3C = -\varkappa^{\frac{2p}{3}}b \,.\, \varkappa^{\frac{2p}{3}}a \,.\, 1$$

$$0 + 2 + 1 \qquad -\varkappa^{\frac{2p}{3}}b \,.\, 1 \,.\, \varkappa^{\frac{3p}{3}}a$$

$$1 + 1 + 1 \qquad +\varkappa^{\frac{p}{3}}a \,.\, \varkappa^{\frac{2p}{3}}a \,.\, \varkappa^{\frac{3p}{3}}a$$

$$1 + 0 + 2 \qquad -\varkappa^{\frac{p}{3}}a \,.\, \varkappa^{\frac{4p}{3}}b \,.\, 1$$

$$1 + 2 + 0 \qquad -\varkappa^{\frac{p}{3}}a \,.\, 1 \,.\, \varkappa^{\frac{6p}{3}}b$$

$$2 + 0 + 1 \qquad -1 \,.\, \varkappa^{\frac{4p}{3}}b \,.\, \varkappa^{\frac{3p}{3}}a$$

$$2 + 1 + 0 \qquad -1 \,.\, \varkappa^{\frac{2p}{3}}a \,.\, \varkappa^{\frac{6p}{3}}b$$

oder, wenn man die $\varkappa$ in jedem Gliede nach §. 25. multiplicirt

$$\begin{aligned}{}^3C &= -\varkappa^{\frac{4p}{3}}ab &&= -\varkappa^{\frac{p}{3}}ab \quad (\text{§. } 26.)\\ &\quad -\varkappa^{\frac{6p}{3}}ab &&\quad -\varkappa^{\frac{2p}{3}}ab\\ &\quad +\varkappa^{\frac{3p}{3}}a^3 &&\quad +\varkappa^{p}a^3\\ &\quad -\varkappa^{\frac{6p}{3}}ab &&\quad -\varkappa^{\frac{2p}{3}}ab\end{aligned}$$

 $-\varkappa ab$

$$-\varkappa^{\frac{7p}{3}}ab \qquad -\varkappa^{\frac{p}{3}}ab$$
$$-\varkappa^{\frac{7p}{3}}ab \qquad -\varkappa^{\frac{p}{3}}ab$$
$$-\varkappa^{\frac{8p}{3}}ab \qquad -\varkappa^{\frac{2p}{3}}ab$$

Also $^3C = -3(\varkappa^{\frac{p}{3}} + \varkappa^{\frac{2p}{3}})ab + \varkappa^{p}a^3$. Da aber $\varkappa^{\frac{p}{3}} + \varkappa^{\frac{2p}{3}} + \varkappa^{\frac{3p}{3}} = 0$ (§. 30.), also $\varkappa^{\frac{p}{3}} + \varkappa^{\frac{2p}{3}} = -\varkappa^{\frac{3p}{3}} = -\varkappa^{p}$, und $\varkappa^{p} = +1$ (§. 27.), so ist

$$^3C = +3ab + a^3$$

Endlich, da $0 = \overset{p.}{0} + \overset{q.}{0} + \overset{r.}{0}$, so ist

$$^0C = -\varkappa^{\frac{p}{3}}b \,.\, \varkappa^{\frac{2p}{3}}b \,.\, \varkappa^{\frac{3p}{3}}b = -\varkappa^{p}b^3 \text{ (§. 30.)}$$
$$= -b^3. \text{ (§. 27.)}.$$

Demnach verwandelt sich $^6Cx^6 + {^3C}x^3 + {^0C} = 0$ in $x^6 + (3ab + a^3)x^3 - b^3 = 0$, gerade so, wie wir es oben (§. 11. mutatis mutandis) auf einem andern Wege gefunden haben.

Ein Beyspiel von der Eliminirung der Radicalien, vermittelst der vorgetragenen Theorie.

§. 43. Die Regeln selbst sind schon oben (§. 6.) vorgetragen. Hier wollen wir zur Verdeutlichung noch ein Beyspiel hinzufügen, wo, so einfach es auch ist, dennoch die gewöhnlichen Regeln nicht hinreichen.

§. 44. Aufgabe. Die Gleichung $a = \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y}$ von den Wurzelzeichen zu befreyen.

Auf-

Auflösung. Die Radicalien gehören zu zwey Klassen (§. 6.), und müssen daher durch zwey Operationen weggeschaft werden. Da aber aus jeder Klasse nur ein einziges Radicale da ist, so wird die erste Arbeit eine bloße Potenziirung seyn; nämlich

A) $\sqrt[5]{x} = a - \sqrt[5]{y}$, daher

$$x = a^5 - 5a^4\sqrt[5]{y} + 10a^3\sqrt[5]{y^2} - 10a^2\sqrt[5]{y^3} + 5a\sqrt[5]{y^4} - y.$$

B) Um die zweyte Klasse der Radicalien wegzuschaffen, ordne man die Gleichung so:

$$0 = (x - a^5 + y) + 5a^4 y^{\frac{1}{5}} - 10a^3 y^{\frac{2}{5}} + 10a^2 y^{\frac{3}{5}} - 5ay^{\frac{4}{5}}.$$

Aus dieser Gleichung leite man nun eine andere mit fünfmal größern Exponenten ab, welches man entweder vermittelst des Schema (§. 14), oder nach der dritten Methode bewerkstelligen kann.

§. 45. Im letzten Fall sind die fünf Hülfsgleichungen nach §. 37. folgende, deren Entstehung aus der Gleichung des vorigen §. leicht zu übersehen ist, wenn man nur bemerkt, daß um mehrerer Einfachheit willen $-b$ statt $x - a^5 + y$ geschrieben worden.

$$1)\ y^{\frac{4}{5}} - \varkappa^{\frac{p}{5}} . 2ay^{\frac{3}{5}} + \varkappa^{\frac{2p}{5}} . 2a^2y^{\frac{2}{5}} - \varkappa^{\frac{3p}{5}} a^3 y^{\frac{1}{5}} + \varkappa^{\frac{4p}{5}} b = 0$$

$$2)\ y^{\frac{4}{5}} - \varkappa^{\frac{2p}{5}} . 2ay^{\frac{3}{5}} + \varkappa^{\frac{4p}{5}} . 2a^2y^{\frac{2}{5}} - \varkappa^{\frac{6p}{5}} a^3 y^{\frac{1}{5}} + \varkappa^{\frac{8p}{5}} b = 0$$

$$3)\ y^{\frac{4}{5}} - \varkappa^{\frac{3p}{5}} . 2ay^{\frac{3}{5}} + \varkappa^{\frac{6p}{5}} . 2a^2y^{\frac{2}{5}} - \varkappa^{\frac{9p}{5}} a^3 y^{\frac{1}{5}} + \varkappa^{\frac{12p}{5}} b = 0$$

$$4)\ y^{\frac{4}{5}} - \varkappa^{\frac{4p}{5}} . 2ay^{\frac{3}{5}} + \varkappa^{\frac{8p}{5}} . 2a^2y^{\frac{2}{5}} - \varkappa^{\frac{12p}{5}} a^3 y^{\frac{1}{5}} + \varkappa^{\frac{16p}{5}} b = 0$$

$$5)\ y^{\frac{4}{5}} - \varkappa^{\frac{5p}{5}} . 2ay^{\frac{3}{5}} + \varkappa^{\frac{10p}{5}} . 2a^2y^{\frac{2}{5}} - \varkappa^{\frac{15p}{5}} a^3 y^{\frac{1}{5}} + \varkappa^{\frac{20p}{5}} b = 0$$

Werden diese fünf Gleichungen vermittelst der Variationszeichen in einander multiplicirt, so erhält man das Gesuchte. Die Rechnung selbst sey mir erlaubt wegzulassen, da es hier nicht auf die Sache selbst, sondern nur auf die Erklärung der Methode ankommt.

Ueber die Umkehrung der Aufgabe.

§. 46. Es ist klar, daß es zu dem Progressus von der niedrigen auf die höhere Gleichung, auch einen Regressus von dieser auf jene gebe. Auch hiermit hat sich Lambert a. a. O. (Beyträge Theil 2. Abschn 1. S. 224.) beschäftigt, aber die Anwendung, von der wir hier ein Paar Worte sagen wollen, nur beyläufig und in einem einzelnen Falle erwähnt. Wird nämlich der Regressus auf eine gewisse bestimmte Art gemacht, so zeigt sich ein allgemeiner, und ganz gleichförmiger Zusammenhang, mit der Auflösung solcher Gleichungen, in welchen die nächste Potenz nach der höchsten fehlt, auf welche Form sich bekanntlich alle Gleichungen bringen lassen. Nun ist es mir zwar nicht gelungen, auf diesem Wege etwas mehr, als das schon längst Bekannte zu finden; auch bemerke ich, daß der Weg, den ich gegangen bin, im Wesentlichen nicht von dem verschieden ist, auf welchem Euler, im 9ten Band der neuen Petersb. Comment *) die Auflösung der Gleichungen versucht hat, indessen halte ich es doch nicht für überflüssig, die Methode, welche ich gebraucht habe, mit ein Paar Worten zu beschreiben, theils, weil bey einer Materie, wo in der Theorie der Analysis noch eine so große Lücke ist, jede mögliche Ansicht der Sache einiger Aufmerksamkeit werth ist, theils auch, weil dasjenige, was Euler a. a. O. über die Form der Wurzeln bloß scharfsinnig

*) Herr Michelsen hat von dieser Abhandlung in den Zusätzen zur Einleitung in die Anal. des Unendl. S. 24 ff. eine Uebersetzung geliefert.

sinnig gemuthmaßt hatte, hier zum Theil als ein allgemein erwiesener Satz erscheint.

§. 47. Um mich möglichst kurz zu fassen, will ich bloß zeigen, wie man zu verfahren habe, um die Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade vermittelst der vorgetragenen Theorie zu finden.

§. 48. Die Gleichung (§. 11.)

A) $o = a^3 + (b^3 - 3abc)\, x^3 + c^3 x^6$

hat nach §. 37. die drey Faktoren

$$B)\quad o = a + \varkappa^{\frac{p}{3}}\, bx + \varkappa^{\frac{2p}{3}}\, cx^3$$

$$o = a + \varkappa^{\frac{2p}{3}}\, bx + \varkappa^{\frac{4p}{3}}\, cx^3$$

$$o = a + \varkappa^{\frac{3p}{3}}\, bx + \varkappa^{\frac{6p}{3}}\, cx^3$$

§. 49. Da dieß offenbar richtig bleiben muß, was man auch irgend für Werthe den Buchstaben a, b, c und $\varkappa$ geben mag; so setze man $x = 1$, und sehe a als die unbekannte Größe an, die wir z. nennen wollen: so verwandelt sich

C) die erste Gleichung A in

$z^3 - 3bcz + b^3 + c^3 = o$

D) und ihre drey Faktoren bey B werden

$$z + \varkappa^{\frac{p}{3}}\, b + \varkappa^{\frac{2p}{3}}\, c = o$$

$$z + \varkappa^{\frac{2p}{3}}\, b + \varkappa^{\frac{4p}{3}}\, c = o$$

$$z + \varkappa^{\frac{3p}{3}}\, b + \varkappa^{\frac{6p}{3}}\, c = o$$

wodurch man also offenbar die drey Wurzeln der Gleichung C erhält.

§. 50. Es kommt also nur noch darauf an, die Gleichung C mit jeder cubischen Gleichung, worin das zweyte Glied fehlt, gehörig zu vergleichen; welches bey diesem Grade keine Schwierigkeit hat. Wir setzen also, daß die Gleichung

E) $z^3 + Az + B = 0$

gegeben sey; so ist klar, daß man hier (§. 49. C)

F) $A = -3bc$, und

G) $B = b^3 + c^3$

setzen müsse, um C und E identisch zu machen. Man darf also bloß b und c aus F und G bestimmen, um vermittelst D alle drey Wurzeln von E zu erhalten.

§. 51. Bringt man also den Werth von c, aus F bestimmt, in G, so verwandelt sich dieses in

$$B = b^3 - \frac{A^3}{27b^3}, \text{ daher}$$

$$b^6 - Bb^3 - \tfrac{1}{27}A^3 = 0; \text{ daraus folgt}$$

$$b = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}B \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3)})}$$

Der doppelte Werth von b in dieser Formel ist nichts anders, als b, und c, weil b und c in den Gleichungen F und G völlig auf einerley Art enthalten sind.

§. 52. Wir können demnach setzen

$$b = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}B + \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3)})}$$

$$c = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}B - \sqrt{(\tfrac{1}{4}B^2 + \tfrac{1}{27}A^3)})}$$

welche Werthe in D gebracht, die drey Wurzeln der Gleichung E vollständig geben.

§. 53. Daß diese Methode sich auf eine vollkommen gleichförmige Art, auf alle Gleichungen von jedem Grade anwenden lasse, ist leicht einzusehen. Doch ist es zu diesem Zwecke nicht nöthig, von der Form der erhöhten Gleichung auszugehn; sondern es wird, wenigstens bey der allgemeinen Untersuchung, kürzer und bequemer seyn, von

den Wurzeln anzufangen. Es ist nämlich aus dem bisherigen klar, daß die Wurzelgleichungen einer Gleichung vom nten Grade folgende Form haben müssen:

$$1)\ z + b x^{\frac{p}{n}} + c x^{\frac{2p}{n}} + d x^{\frac{3p}{n}} + \cdots + n \,.\, x^{\frac{(n-1)p}{n}}$$

$$2)\ z + b x^{\frac{2p}{n}} + c x^{\frac{4p}{n}} + d x^{\frac{6p}{n}} + \cdots + n \,.\, x^{\frac{2(n-1)p}{n}}$$

$$3)\ z + b x^{\frac{3p}{n}} + c x^{\frac{6p}{n}} + d x^{\frac{9p}{n}} + \cdots + n \,.\, x^{\frac{3(n-1)p}{n}}$$

etc etc etc

$$n)\ z + b x^{\frac{np}{n}} + c x^{\frac{2np}{n}} + d x^{\frac{3np}{n}} + \cdots + n \,.\, x^{\frac{n(n-1)p}{n}}$$

Die Multiplication dieser Gleichungen giebt geradezu eine Gleichung vom nten Grade, worin das zweyte Glied fehlt. Denn dieß zweyte Glied ist

$$z^{n-1}\, b\left(x^{\frac{p}{n}} + x^{\frac{2p}{n}} + x^{\frac{3p}{n}} + \cdots + x^{\frac{np}{n}}\right)$$

Aber, was in der Klammer steht, ist nach §. 30 $= 0$. Vergliche man nun das gefundene Produkt mit der allgemeinen Form $z^n + B z^{n-2} + C z^{n-3} + \cdots + N = 0$, so würden die Vergleichungen der Coefficienten gerade so viele Gleichungen geben, als nöthig sind, um $b, c, d - - n$ aus $B, C, D - - - N$ zu bestimmen. Allein, die Bestimmung dieser Größen führt schon bey Gleichungen des 5ten Grades, zu einer unabsehbaren Weitläuftigkeit von Rechnungen, die einer eisernen Geduld spottet. Uebrigens müßte zwar diese Rechnung, nach den äußerst scharfsinnigen Untersuchungen des Herrn Lagrange, im 2ten und 3ten Bande der neuen Memoiren der Berl. Ak. (man sehe Michelsen's Zusätze zu Eulers Einl. S. 271 bis zu Ende), nothwendig auf Gleichungen führen, die weit höher wären,

als vom nten Grade, so wie uns schon die Auflösung der cubischen Gleichung im 50sten §. auf eine Gleichung vom 6ten Grade führte; allein, es ist wohl kein Zweifel, daß es nur solche Gleichungen seyn werden, die sich nach Art der niedrigern auflösen lassen.

§. 54. Es läßt sich mit Grund erwarten, daß die combinatorische Analysis, die schon so viel schwierige und fast unmöglich scheinende Probleme aufgelöset hat, auch hier die Schwierigkeiten des Calculs noch überwältigen werde, indem nichts weiter dazu erforderlich ist, als daß das Eliminirungsproblem in vollkommener Allgemeinheit aufgelöst werde.

§. 55. Ich bedaure übrigens, daß ich diese kleine Arbeit dem Publikum in einer ziemlich unvollendeten Gestalt vorlegen muß, da es mir ganz unmöglich gewesen ist, die nöthige Muße zu mehrerer Vollendung derselben zu finden. Dennoch hielt ich auch so ihre Bekanntmachung nicht für überflüßig, um vielleicht geschicktern und freyern Händen Veranlassung zu ihrer Vollendung zu geben.

III.

Deduction der Euclidischen Definitionen 3, 4, 5, 7 des V. Buchs der Elemente; von C. F. Pfleiderer, der Physik und Mathematik Professor zu Tübingen.

Fortsetzung des Aufsatzes im 7ten Heft. S. 257 u. f.

---

57. Wenn $nA = nB$, und $nC = nD$ ist: so ist $A = B$, $C = D$ (§. 18.)

Und nun folgt weiter, wenn $pA <=> qB$: weil $qB = qA$ (§. 14.), also nun $pA <=> qA$ ist;

daß

daß $p <=> q$ (§. 25. 26.); $pC <=> qC$ (§. 23. 24.); und, weil $qC = qD$ (§. 14.) auch $pC <=> qD$ sey.

Der Satz §. 31. no. 3: daß, wenn $nA = mB$, und $nC = mD$ ist, jede Gleichvielfache von A und C irgend Gleichvielfachen von B und D, das von A nämlich dem von B, und das von C dem von D, entweder beyde gleich, oder beyde zugleich größer oder kleiner seyen; gilt also auch für die Bedingung $nA = nB$, und $nC = nD$.

58. So folgt auch aus der Bedingung $nA = nB$, aber $nC < nD$, eben so wie §. 44. no. 3 aus der Bedingung $nA = mB$, aber $nC < mD$: daß sich ein Gleichvielfaches von A und C, und ein Gleichvielfaches von B und D angeben lassen, so, daß das Vielfache von A größer als das von B, das Vielfache von C aber nicht größer als das von D ist.

Wenn nämlich $nA = nB$, aber $nC < nD$, und $nD = nC + E$ ist: so wird

α) Wenn $C =< E$ ist; $nC + C =< nC + E$, d. h. $(n+1)C =< nD$ seyn, indem $(n+1)A > nA$ oder nB ist.

β) Wenn $C > E$, aber $C < rE$ ist: so wird $r \times nC + C < r \times nC + rE$, d. h. $(r \times n + 1)C < r(nC + E)$ oder $r \times nD$ seyn;

indem $r \times nA + A$ d. i. $(r \times n + 1)A > r \times nA$ oder $r \times nB$ ist.

59. Die Resultate §. 49. f. ergeben sich also auch aus der Vergleichung Gleichvielfacher von A und C mit den nämlichen Gleichvielfachen von B und D; aus der Vergleichung (in Rücksicht auf Gleichheit und Ungleichheit) von nA und nB, nC und nD, eben so wie aus der Vergleichung von nA und mB, nC und mD. Und so ist man berechtiget, den auf beyde Definitionen 5, 7 sich beziehenden Ausdruck der 5ten: Gleichvielfache der

ersten und dritten, Gleichvielfache der zweyten und vierten Größe, καθ οποιουν πολλαπλασιασμον, secundum quamcunque multiplicationem, auch von Gleichvielfachen aller vier Größen zu verstehen; mithin die Definitionen auch auf dieser ihre gegenseitige Vergleichung anzuwenden.

60. Diesemnach ist 1°. $A:B = C:D$, wenn $A = B$, und $C = D$; folglich (§. 14.) $nA = nB$, und $nC = nD$ (§. 57. und Defin. 5.).

2°. $A:B > C:D$, wenn $A > B$, aber $C =< D$; folglich (§. 14. 17.) $nA > nB$, aber $nC =< nD$ (Defin. 7.);

oder wenn $A = B$, aber $C < D$; folglich (§. 14. 17.) $nA = nB$, aber $nC < nD$ (§. 58. und Defin. 7.).

und 3°. $A : B < C : D$, oder $C : D > A : B$, wenn $A =< B$, aber $C > D$; folglich (§. 14. 17.) $nA =< nB$, aber $nC > nD$ (Defin. 7.);

oder wenn $A < B$, aber $C = D$; folglich (§. 14. 17.) $nA < nB$, aber $nC = nD$ (§. 58. und Defin. 7.).

61. Umgekehrt, wenn $A:B = C:D$; so sind zugleich $A <=> B$, und $C <=> D$.

Denn so wie $A <=> B$: ist $nA <=> nB$ (§. 14. 17.); also auch (hyp. und Defin. 5.) $nC <=> nD$; und daher (§. 18. 19.) $C <=> D$.

Oder 1) wenn $A = B$, kann nicht $C <> D$ seyn: weil sonst (§. 60. no. 2. 3) $A:B >< C:D$ wäre;

2) wenn $A > B$; kann nicht $C =< D$ seyn: weil sonst (§. 60. no. 2.) $A:B > C:D$ wäre;

3) wenn $A < B$; kann nicht $C => D$ seyn: weil sonst (§. 60. no. 3.) $A:B < C:D$ wäre,

alles gegen die Voraussetzung $A : B = C : D$ und §. 54. 56. no. 1.

62. Wenn hingegen $A:B > C:D$: so muß $C < D$ seyn, wenn $A =< B$ ist; aber A muß $> B$ seyn, wenn $C => D$ ist.

Denn

Denn 1°. Wenn $A = < B$ ist; so kann weder $C = D$ seyn: weil sonst (§. 60. no. 1. 3.) $A : B = < C : D$ wäre; noch $C > D$ seyn: weil sonst (§. 60. no. 3.) $A : B < C : D$ wäre.

2°. Wenn $C = D$ ist; kann nicht $A = < B$ seyn: weil sonst (§. 60. no. 1. 3.) $A : B = < C : D$ wäre.

Auch, wenn $C > D$ ist; kann nicht $A = < B$ seyn; weil sonst (§. 60. no. 3.) $A : B < C : D$ wäre;

alles gegen die Voraussetzung $A : B > C : D$, und §. 54. 56. no. 4.

63. Verhältnisse, deren Glieder gleich sind, heissen **Verhältnisse der Gleichheit**, rationes aequalitatis: Verhältnisse hingegen, deren Glieder ungleich sind, heissen **Verhältnisse der Ungleichheit**, rationes inaequalitatis; und zwar **der grösseren Ungleichheit**, majoris inaequalitatis, wenn das Vorderglied grösser ist, als das Hinterglied; **der kleineren Ungleichheit**, minoris inaequalitatis, wenn das Vorderglied kleiner ist, als das Hinterglied.

64. Nach diesen Benennungen besagen die Sätze §. 60.

1°. Jede zwey Verhältnisse der Gleichheit sind unter einander einerley.

2°. Jedes Verhältniß der grösseren Ungleichheit ist grösser, als jedes Verhältniß der Gleichheit, oder der kleinern Ungleichheit, und jedes Verhältniß der Gleichheit ist grösser, als jedes Verhältniß der kleinern Ungleichheit.

65. Die Sätze §. 61. 62. aber heissen:

1°. Zwey gleiche Verhältnisse sind entweder beyde rationes aequalitatis, oder beyde rationes majoris inaequalitatis, oder beyde rationes minoris inaequalitatis.

2°. Von zwey ungleichen Verhältnissen ist das kleinere ratio minoris inaequalitatis, wenn das grössere ratio aequalitatis, oder minoris inaequalitatis ist; und das grössere ist ratio majoris inaequalitatis, wenn das kleinere ratio aequalitatis oder majoris inaequalitatis ist.

66. Gleichheit zweyer Grössen wird gewöhnlich nicht unter der Gestalt von Verhältniß, sondern bloß als Gegensatz unbestimmter Ungleichheit derselben betrachtet, deren Bestimmung durch die Angabe des gegenseitigen Verhältnisses der ungleichen Grössen erhalten werde.

Die Folgerung der Verhältnisse ungleicher Grössen, die von gewissen Bestimmungsstücken abhängen, beruhet auch, wenigstens in ihrer Grundlage, auf vorläufiger, besonders dazu geeigneter Festsetzung der Bedingung ihrer Gleichheit und Ungleichheit. So wird erstlich durch Schlüsse, die am Ende auf den Grundsatz der Congruenz (I. B. Ax 8) beruhen, erwiesen: daß gleich hohe Triangel auf gleichen Grundlinien, gleich, folglich auf ungleichen Grundlinien, ungleich seyen; und nun hieraus (VI, 1.) gefolgert: daß dergleichen ungleiche Triangel auf ungleichen Grundlinien, sich wie ihre Grundlinien verhalten.

67. Diesemnach ist §. 2. die Erklärung von Verhältniß nur auf ungleiche Grössen bezogen; und §. 3. ff. die Vergleichung Gleichvielfacher beyder Glieder eines Verhältnisses bey Seite gelassen werden; welche Gleichvielfache ohnehin, bey vorausgesetzter Ungleichheit der Glieder, immer auch ungleich sind, so, daß das des grösseren Glieds grösser ist (§. 17.).

68. Uebrigens sind nach der Vorstellungsart §. 2. der Exponent eines Verhältnisses der Gleichheit $= 1$; der Exponent, oder die kleineren Grenzen des Exponenten eines Verhältnisses der grösseren Ungleichheit > 1; der Exponent, oder die grösseren Grenzen des Exponenten eines Verhältnisses der kleineren Ungleichheit < 1: und umgekehrt, ein Verhältniß, dessen Exponent $= 1$, ist ratio aequalitatis; ein Verhältniß, dessen Exponent selbst, oder eine kleinere Grenze desselben > 1, ist ratio majoris inaequalitatis; und ein Verhältniß, dessen Exponent selbst, oder eine grössere Grenze desselben < 1, ist ratio minoris inaequalitatis.

69.

69. Und so ergeben sich nach dieser Vorstellungsart die Sätze §. 60. 61. 62. 64. 65. nach §. 9. 37. ff. gleichsam als Axiome, wenigstens als bloße unmittelbare Anwendungen der Axiome von Gleichheit und Ungleichheit der Größen.

70. Diese Art, jene und andere dergleichen Sätze zu folgern, welche überdieß bey der Anwendung auf Verhältnisse incommensurabler Größen ohne vollständige deutliche Entwicklung unzuverläßig und schwankend ausfällt, darf in den Euclidischen Vortrag, nach Festsetzung der Definitionen 5. 7. eben so wenig, als die gemeine Bedeutung der Worte Gleich, Ungleich (§. 53.) eingemischt werden.

71. Der Satz §. 61. fehlt in den Elementen; ungeachtet in verschiedenen Beweisen Anwendungen davon vorkommen: und Alphons. Borellus (Euclides restitutus. Pisis 1658. p. 126.) machte der 5. Defin. des V. Buchs den Vorwurf, es lasse sich nicht einmal dieser einfache Satz aus derselben herleiten. S. Barrow l. c. p. 322. Rob. Simson p. 142 358 sq.

Das Ende des 5ten, und der Anfang des 6ten §. sind auf folgende Art abzuändern:

5. — — quoad multiplicitatem. Auf eben diese Erklärung weiset die Folge der 1. 2. 3. Defin. so wie die Fassung der 4. 5. 7.

Aber die Worte des Textes: λογος εϛι δυο μεγεθων ομογενων η κατα πηλικοτητα προς αλληλα ποια σχεσις, geben diesen Sinn nicht. Πηλικοτης heißt quantitas; wie in Ptolemaei Magnae Construct. Lib. I. p. 8 (Basil. 1538) περι της πηλικοτητος των εν τω κυκλω ευθειων: folglich κατα πηλικοτητα, quoad quantitatem.

Clavius

Clavius (Euclidis Elem. Francof. 1607. p. 352 sq.) erläutert dieß so: Quando duae quantitates ejusdem generis — inter se comparantur secundum quantitatem, h. e. secundum quod una major est quam altera, vel minor, vel aequalis, appellatur hujusmodi comparatio seu habitudo, Ratio. *Wallis* (Opp. math. Oxon. 1651. Pars I. Math. univ. Cap. 25. 29. Adversus Meibomii de proportionibus dialogum Tractatus p. 6 sqq. 19 sqq. Opp. math. Oxon. 1693. Vol. II. De Algebra Tractatus Cap. 19. De Postulato 5. Lib. I. 9. Defin. 5 Lib. VI. Euclidis Disceptatio) will einen besonderen Nachdruck auf ποια σχεσις gelegt wissen, und übersetzt: Ratio est duarum magnitudinum homogenearum ea relatio, qua dicitur, qualiter se habet earum una ad alteram secundum quantuplicitatem considerata; h. e. quot vicibus, aut etiam qua vel quanta parte unius vicis, una alteram contineat. *Barrow* (Lectiones habitae in scholis publ. Acad. Cantabrig. anno 1666. Lond. 1684. Lect. III.) mißbilliget beyde; übersetzt (p. 220.) κατα πηλικοτητα quoad quantitatem, h. e. quoad magnitudinis suae determinationem, vel magnitudinem ipsam determinatam; saltem secundum quod quaeritur: quantae sunt? et respondetur: tantae; bekennt aber am Ende: diese Definition sey nicht mathematisch genug; und, so wie die 8te, für die Folge ganz entbehrlich. *Rob. Simson* (p. 354 sq.) sagt, nach Anführung dieses Urtheils Barrow's: Quibus nihil addendum video, praeterquam quod hisce rationibus de inutilitate hujus et sequentis 8vae definitionis persuasus firmiter credam, eas non Euclidis esse, sed cujusdam minus periti editoris. Einen andern Anlaß zu diesem Verdachte giebt die Beziehung, welche diese 3. Defin. des V. Buchs auf die zuverlässig unächte, von Theon, oder wenigstens aus dessen Commentar über des Ptolomäus Magn. Constr. (Lib. I. p. 62.)

o. 62.) eingeschobene 5. Defin. des VI. Buchs zu haben scheint (S. Rob. Simson p. 370. 372 sqq.).

6. Wie man aber auch die 3. Definition ansehen mag; so liegt die Reduktion §. 3. 4. wenigstens in den folgenden Definitionen, und in den auf dieselbe sich beziehenden Beweisen des V. Buchs, so wie der übrigen, zum Grunde. Und hieraus erwächst der Vortheil —

Noch füge ich einige Verbesserungen, theils des Drucks, theils des Textes bey.

§. 9. Lin. 16 ist, statt: commensurabel, zu setzen: incommensurabel

§. 17. Lin. 7. I. B. Ar. 9, statt: I. B. Ar. 2.

§. 31. Bew. 2°. Lin. 2. §. 14. statt: §. 9.

§. 32. Lin. 4, 5. p statt: n, q statt: m

§. 40. Lin. 3 ff. statt: größer ist u. s. w. ist zu setzen: so groß oder größer ist, als eine der größeren Grenzen (§. 2.) des Exponenten des Verhältnisses C : D; und umgekehrt: also wenn $A = mB$, $C > rD < (r+1) D$, und $m =$ oder $> r+1$, folglich $C < mD$; oder wenn $nA = B$, aber $nC < D$; oder wenn $nA = mB$, $nC > rD < (r+1) D$, und wieder $m =$ oder $> r+1$, also $nC < mD$: und umgekehrt.

§. 41. Lin. 2 f. eine der kleinern Grenzen, statt: die kleinere Grenze

§. 42. Lin. 2 f. wenn für irgend eine Zahl n die kleinere Grenze, statt: wenn die kleinere Grenze

§. 44. Bew. 1°. α. Lin. 2 I. B. Ar. 2. 4, statt: I. B. Ar. 2. 9.

§. 45. Bew. 3°. Lin. 5 $n \times pA$, statt: $m \times pA$

§. 46. Lin. 3 der Gleichheit zweyer Verhältnisse, st. zweyer Verhältnisse

§. 51. S. 280 Lin. 4 Umfange, statt: Anfange

§. 55. S. 283 Lin. 11 E multiplex, statt: E aequemultiplex

§. 55. S. 283 Lin. 19 illa E, statt: illae E

§. 56. Lin. 3 u. s. w. in der Folge dieses §phen ist §. 44. no. 3. zu setzen, statt: §. 43. no. 3.

IV.

Ueber Glenie's Construktionen verschiedener geometrischer Aufgaben; von verschiedenen Verfassern.

Vorerinnerung des Herausgebers.

Es war zu erwarten, daß die von Herrn Hofr. Kästner im ersten Bande des Archivs (Heft IV. S. 481 u. f.) mitgetheilten Construktionen von Glenie: Aufgaben (wie er sich ausdrückt) vom dritten Grade durch Verzeichnung des zweyten Grades zu lösen — die Neugierde mehrerer Kenner zu näherer Untersuchung und Prüfung derselben reizen und beschäftigen würde. Seit jener Bekanntmachung dieser Construktionen sind drey dahin gehörige Aufsätze bey mir eingegangen, die ich in der Ordnung, wie sie mir von ihren Verfassern zugesendet worden sind, hier folgen lasse. Die erste Abhandlung

IV, a.

Ueber Glenie's Construktion der Aufgabe (Archiv H. IV. S. 481; 18, I.) von J. K. Hagner zu Berthelsdorf bey Herrnhut

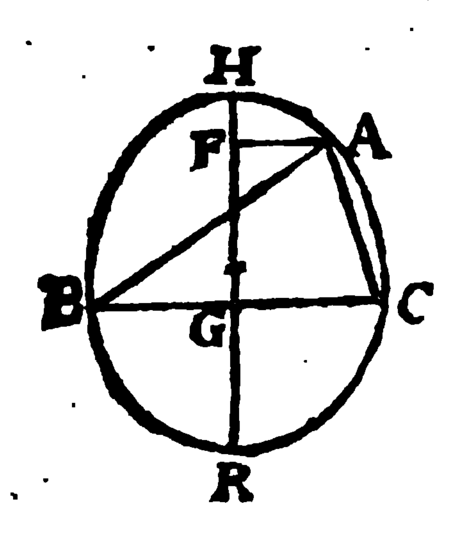
enthält zugleich folgende Nachricht über die Veranlassung dazu, die ich aus einem Briefe ihres Verfassers im Auszuge mittheile:

— „Ein Freund theilte mir, aus dem 4ten Hefte „Ihres mathematischen Archivs, die von dem Engländer „Glenie bekannt gemachte Construktion eines Dreyecks „mit, worin die Summe der Würfel von zween „Seiten dem Würfel der dritten Seite gleich ist, „mit der Anzeige, daß Glenie keinen Beweis seiner Con-

„struktion

„struktion gegeben habe. Dies veranlaßte mich, den „Beweis zu suchen, und ich entdeckte eine allgemeine „Formel zu gedachter Construktion, die den von Glenie „beschriebenen Fall in sich begreift. Vorerwähnter „Freund zeigte mir nachher die trigonometrische Prüfung „der Construktion von Glenie, welche Herr Hofrath „Kästner angestellt hat, jedoch ohne einen Beweis davon „zu geben. Da es scheint, dieser große Mathematiker „halte eine weitere Untersuchung über diese und ähnliche „Fälle für eine nicht unnütze Bemühung, so hoffe ich, „Sie werden dem, was ich hierüber gefunden habe, eine „Stelle in Ihrem Archiv einzuräumen, sich geneigt finden „lassen" —

Aufgabe.



In dem Dreyecke ABC sey $AB^3 + AC^3 = BC^3$; der Durchmesser HR eines um ABC beschriebenen Kreises schneide BC in G; AF stehe in F lothrecht auf HR: man suche GH, GF, wenn BC gegeben ist.

Auflösung.

1. Es sey $BC = a$, also $BG = GC = \frac{1}{2}a$; $GH = b$; $GF = c$.

Nun ist $BA^2 = FG^2 + (BG + FA)^2$
$= FG^2 + BG^2 + FA^2 + 2BG \times FA$
und $AC^2 = FG^2 + (GC - FA)^2$
$= FG^2 + BG^2 + FA^2 - 2BG \times FA$.

Ferner, da $GH : GB = GB : GR$, so findet man $GR = \frac{a^2}{4b}$, folglich $FR = c + \frac{a^2}{4b}$; und da $HF : FA = FA : FR$, so hat man $FA^2 = \frac{(b-c)(4bc + a^2)}{4b}$.

Demnach ist $FG^2 + BG^2 + FA^2 = c^2 + \frac{1}{4} a^2$
$+ \frac{(b-c)(4bc+a^2)}{4b} = \frac{4bc+a^2}{4} + \frac{a^2(b-c)}{4b}$, und

$$BA^2 = \frac{4bc+a^2}{4} + \frac{a^2(b-c)}{4b} + \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{(b-c)(4bc+a^2)}{b}};$$

$$AC^2 = \frac{4bc+a^2}{4} + \frac{a^2(b-c)}{4b} - \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{(b-c)(4bc+a^2)}{b}};$$

oder $BA = \frac{1}{2} \sqrt{(4bc+a^2)} + \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{b-c}{b}}$,

und $AC = \frac{1}{2} \sqrt{(4bc+a^2)} - \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{b-c}{b}}$.

Also ist $BA^3 + AC^3 = \frac{1}{4} \left(4bc+a^2+3a^2 \frac{(b-c)}{b}\right)$.

$$\sqrt{(4bc+a^2)} = \left(\frac{(4b^2-3a^2)c+4a^2b}{4b}\right)\sqrt{(4bc+a^2)}.$$

Setzt man nun $4bc+a^2 = (a+2f)^2$, so findet sich

$$BA^3 + AC^3 = \frac{(4(a^2+af+f^2)b^2 - 3a^2(a+f)f)(a+2f)}{4b^2}.$$

Da nun auch $BA^3 + AC^3 = BC^3 = a^3$, so ist
$4a^3b^2 = (4(a^2+af+f^2)b^2 - 3a^2(a+f)f)(a+2f)$,

oder $b^2 = \frac{3a^2(a+f)(a+2f)}{4(2a^2+(a+f)(a+2f))}$; woraus denn auch

$c = \frac{(a+f)f}{b}$ gefunden wird.

2. Damit die Werthe von AB, AC, nicht unmöglich werden, muß man f so nehmen, daß $b > c$, folglich $b^2 > (a+f)f$ sey. Es ist demnach

$$3a^2(a+2f) > 4f(2a^2+(a+f)(a+2f))$$

oder $\quad 4a^3 > a^3 + 6a^2f + 12af^2 + 8f^3$.

Hier-

Hieraus findet sich $2f < a(\sqrt[3]{4}-1)$ oder $f < \frac{a(\sqrt[3]{4}-1)}{2}$.

Alle bejahte Werthe von f, die kleiner sind, als $\frac{a(\sqrt[3]{4}-1)}{2}$ $= a.0,29\ldots$, thun also der Föderung ein Genüge. Einer von diesen Werthen, $f = \frac{1}{4}a$, giebt die Auflösung des Herrn Glenie. Alsdann ist nämlich

$$b^2 = \frac{3a^2(4+1)(2+1)}{4(16+(4+1)(2+1))} = \frac{5.9a^2}{4.31}, \text{ und } b = \frac{3a\sqrt{5}}{2\sqrt{31}}$$

$$= BC.\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{31}};\ c = \frac{5a^2}{16b} = \frac{a\sqrt{5.31}}{24} = BC\frac{\sqrt{5.31}}{24}.$$

3. Wenn $b = c$, so ist $f = \frac{a(\sqrt[3]{4}-1)}{2}$, und

$$b^2 = bc = (a+f)f = \frac{a^2(\sqrt[3]{4}+1)(\sqrt[3]{4}-1)}{4};$$

$$b = c = \frac{a\sqrt{(2\sqrt[3]{2}-1)}}{2};\ 4bc+a^2 = 2a^2\sqrt[3]{2}; \text{ und}$$

$$BA = AC = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4bc+a^2)} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{(2\sqrt[3]{2})}.$$

Dieses giebt $BA^3 = AC^3 = \frac{1}{8}a^3\sqrt{8.2} = \frac{1}{2}a^3$, und $2BA^3 = 2AC^3 = a^3 = BC^3$.

In diesem Falle fällt A und F mit H zusammen, und ABC ist ein gleichschenklichtes Dreyeck, in welchem die Summe der Würfel beyder Schenkel gleich ist dem Würfel der Grundlinie, und die Höhe $HG = \frac{1}{2}BC\sqrt{(2\sqrt[3]{2}-1)}$.

4. Für ein verneintes f setze man $f = -g$; so ist

$$b^2 = \frac{3a^2(a-g)(a-2g)}{4(2a^2+(a-g)(a-2g))} \text{ und } c = -\frac{(a-g)g}{b}$$

$= \frac{(g-a)g}{b}$. Soll hier c, sowohl als b, bejaht seyn, so ist $g > a$. Wenn aber, für bejahte b und c, $\sqrt{(b-c)}$ möglich seyn soll, so muß $c < b$, oder $(g-a)g < b^2$ seyn.

Dieses giebt

$$8\,a^2(g-a)g+4(g-a)(a-g)(a-2\,g)g$$
$$<3\,a^2(a-g)(a-2\,g),$$ und, mit $g-a$ dividirt,
$$8\,a^2\,g+4\,(a-g)\,(a-2\,g)g<3\,a^2(2\,g-a),$$

woraus man endlich $(2g-a)^3<-4\,a^3$ und $g<\frac{a(1-\sqrt[3]{4})}{2}$ findet. Daraus erhellet, daß, wenn b und c bejaht und $g>a$ ist, $\sqrt{(b-c)}$ keinen möglichen Werth hat.

5. Wenn $g>a$ und b verneint ist, so ist auch c verneint; alsdann wird zwar $b-c$ bejaht, weil c eine größere verneinte Zahl ist, als b, aber $\frac{b-c}{b}$ ist verneint, folglich $\sqrt{\frac{b-c}{b}}$ unmöglich. Es giebt daher für $g>a$ in keinem Falle mögliche Werthe von BA und AC.

6. Für $g<a$ und $2\,g>a$, ist, in dem Ausdruck von b^2, (4) der Zähler $3\,a^2(a-g)\,(a-2\,g)$ verneint, und der Nenner $4(2\,a^2+(a-g)\,(a-2\,g))$
$$=4\,(2\,a^2-(2\,g-a)\,(a-g))$$ bejaht, weil sowohl $2\,g-a$ als $a-g$, kleiner ist, als a. Demnach wird in diesem Falle b^2 verneint und b unmöglich.

7. Für $2\,g<a$ ist $b^2=\frac{3\,a^2(a-g)\,(a-2\,g)}{4\,(2\,a^2+(a-g)\,(a-2\,g))}$ bejaht, also b möglich. Wenn hier b bejaht genommen wird, so ist $c=-\frac{(a-g)g}{b}$ verneint, und $b-c$ bejaht; wird hingegen b verneint genommen, so ist c bejaht, und $b-c$ verneint. In beyden Fällen ist $\frac{b-c}{b}$ bejaht, und $\sqrt{\frac{b-c}{b}}$ möglich.

8. Aus

8. Aus 4 — 7 erhellet, daß alle verneinte Werthe von f, die kleiner sind, als $\frac{1}{2}$ a, sonst aber keine, die Aufgabe so auflösen, daß AB, AC möglich sind.

Es sey z. B. $f = -\frac{1}{4}a$, so ist

$$b^2 = \frac{3 \cdot 3a^2}{4 \cdot 19};\ b = \pm \frac{3a}{2\sqrt{19}};\ c = \mp \frac{a\sqrt{19}}{8};$$

$$4bc + a^2 = a^2 - \frac{3a^2}{4} = \frac{1}{4}a^2;\ \frac{b-c}{b} = \frac{31}{12};$$

$$AB = \frac{1}{4}a + \frac{a\sqrt{31}}{4\sqrt{3}};\ AC = \frac{1}{4}a - \frac{a\sqrt{31}}{4\sqrt{3}};\ \text{und}$$

$$AB^3 + AC^3 = 2\left(\frac{1}{64} + \frac{31}{64}\right)a^3 = a^3 = BC^3.$$

9. Will man sich nicht mit Herrn Glenie begnügen, irrationale Ausdrücke für b und c zu finden; so suche man, unter welchen Umständen der für b^2 gefundene Ausdruck $\frac{3a^2(a+f)(a+2f)}{4(2a^2+(a+f)(a+2f))}$ ein Quadrat wird.

Ein solcher Fall ist, wenn $b^2 = \frac{a^2}{4}$ wird, oder

$3a^2(a+f)(a+2f) = a^2(2a^2 + (a+f)(a+2f))$. Dieses giebt $f = -\frac{3}{2}a$. Da aber für diesen Werth $\sqrt{(b-c)}$ unmöglich wird, so ist er nur dazu brauchbar, um vermittelst desselben einen andern zu finden.

Man setze nämlich $f = (k - \frac{3}{2})a$, so erhält man

$$b^2 = \frac{3(2k-1)(2k-2)a^2}{4(4+(2k-1)(2k-2))} = \frac{3(2k-1)(k-1)a^2}{4(2+(2k-1)(k-1))}.$$

Nun muß $\frac{4b^2(2+(2k-1)(k-1))^2}{a^2}$

$= 3(2k-1)(k-1)(2+(2k-1)(k-1))$
$= 3(2k-1)(k-1)(3-3k+2k^2)$
$= 9 - 36k + 51k^2 - 36k^3 + 12k^4$, ein Quadrat seyn.

Es sey dieses Quadrats Wurzel $= 3 - 6k + \alpha k^2$, so ist $15k^2 - 36k^3 + 12k^4 = 6\alpha k^2 - 12\alpha k^3 + \alpha^2 k^4$. Um dieser Gleichung ein Genüge zu thun, nehme man $6\alpha = 15$ oder $\alpha = \frac{5}{2}$, und $12k - 36 = \alpha^2 k - 12\alpha$, oder $k = \frac{36 - 12\alpha}{12 - \alpha^2} = \frac{6.4}{23}$. Demnach ist $f = -\frac{212}{46}$ ein Werth, für welchen $\sqrt{\frac{(b-c)}{b}}$ möglich ist (7). Als- denn ist $b^2 = \frac{5^2 . a^2}{2^2 . 19^2}$, $b = \pm \frac{5a}{2.19}$, $c = \mp \frac{5.19.212}{2.23^2}$ u. s. w.

10. Man kann auch in 1 setzen $BA = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{b-c}{b}} + \frac{1}{2}\sqrt{(4bc+a^2)}$, $AC = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{b-c}{b}} - \frac{1}{2}\sqrt{(4bc+a^2)}$, und $\frac{b-c}{b} = m^2$, einer Quadratzahl. Da ist $c = b(1-m^2)$ und $AB^3 + AC^3 = \frac{a}{4}\left(\frac{a^2(b-c)}{b} + 3(4bc+a^2)\right)$.

$$\sqrt{\frac{b-c}{b}} = \frac{ma}{4}(m^2a^2 + 3(4b^2(1-m^2) + a^2)).$$

Weil nun $AB^3 + AC^3 = BC^3 = a^3$, so findet sich daraus $b^2 = \frac{(4 - 3m - m^3)a^2}{3.4m(1-m^2)}$.

Soll hier b und c zugleich bejaht seyn, so ist $m < 1$. Es sey z. B. $m = \frac{1}{2}$;

so ist $b^2 = \frac{19a^2}{4.9}$, $b = \frac{a\sqrt{19}}{6}$, $c = \frac{a\sqrt{19}}{8}$;

$$AB = \frac{1}{4}a + \frac{a\sqrt{31}}{4\sqrt{3}},\ AC = \frac{1}{4}a - \frac{a\sqrt{31}}{4\sqrt{3}}.$$

Wenn

Wenn b bejaht und c verneint ist, so ist $m > 1$. Damit aber $\sqrt{(4bc + a^2)}$ nicht unmöglich werde, muß $4bc + a^2 = a^2 - 4(m^2 - 1)b^2$ bejaht, oder $a^2 > 4(m^2 - 1)b^2$ seyn. Dieses giebt $3.m > m^3 + 3m - 4$, oder $m < \sqrt[3]{4}$. Demnach muß in diesem Falle m größer als 1, aber kleiner als $\sqrt[3]{4} = 1,58\ldots$ genommen werden.

Es sey z. B. $m = \frac{3}{2}$; so ist $b^2 = \frac{31 a^2}{4.5.9}$, $b = \frac{a\sqrt{31}}{6\sqrt{5}}$;

$$c = -\frac{a\sqrt{5.31}}{24};\quad \frac{b - c}{b} = \frac{9}{4},\quad 4bc + a^2 = \frac{5a^2}{36};$$

$$AB = \frac{3}{4}a + \frac{a\sqrt{5}}{12},\quad AC = \frac{3}{4}a - \frac{a\sqrt{5}}{12}.$$

11. Wenn, wie in 8 und 10, b und c verschiedene Zeichen haben, so ist von den Linien GF, GH, die eine über, die andere unter BC zu nehmen.

In solchen Fällen, hat AC einen verneinten Werth, welches anzeigt, daß nicht die Summe, sondern der Unterschied, der Würfel von den Seiten AB und AC dem Würfel von BC gleich ist. Man darf sich daher auch nicht wundern, daß die gefundenen Werthe von AB und AC zusammen genommen, kleiner sind, als BC, da doch die Summe jeder zwo Seiten eines Dreyecks größer ist, als die dritte; denn die Summe der gefundenen Werthe, ist nicht die Summe der beyden Seiten, sondern ihr Unterschied.

1. Anmerkung.

12. Die gefundene Auflösung scheint vorauszusetzen, daß eine Gleichung des dritten Grades durch eine krumme Linie der zweyten Ordnung construirt werden könne. Es hängt aber damit folgendermaßen zusammen. Wenn in der Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$; z gegeben ist, und x, y

gesucht werden, so verwandelt sich die Gleichung des dritten Grades in eine des zweyten Grades, und es ist eine unbestimmte quadratische Aufgabe. Denn, man setze $x = p + q$, $y = p - q$; so verwandelt sich die gegebene Gleichung in folgende: $2p(p^2 + 3q^2) = z^3$. Man multiplicire solche mit der unbestimmten Größe r, und zerfälle sie sodann in zwo Gleichungen, $2p = rz$ und $r(p^2 + 3q^2) = z^2$. Wenn man nun den Werth von p aus der ersten dieser Gleichungen in die andere setzt, so findet man daraus $q^2 = \frac{(4 - r^3)z^2}{4 \cdot 3r}$, und $q = \frac{z\sqrt{(4 - r^3)}}{2\sqrt{3r}}$,

$x = \frac{rz}{2} + \frac{z\sqrt{(4 - r^3)}}{2\sqrt{3r}}$, $y = \frac{rz}{2} - \frac{z\sqrt{(4 - r^3)}}{2\sqrt{3r}}$, wo man für r jede bejahte Zahl nehmen kann, die kleiner ist, als $\sqrt[3]{4} = 1,58\ldots$ Nimmt man z. B. $r = \frac{1}{2}$, so findet man unmittelbar die Werthe von AB, AC, in vorherstehender Aufgabe, welche man vermöge der Construktion des Herrn Glenie mit den von ihm angegebenen Werthen von GH, GF, erhält.

2. Anmerkung.

13. Wenn m, n beliebige Zahlen sind, und $mx^3 + ny^3 = z^3$; so läßt sich die Aufgabe, x und y durch z aus dieser Gleichung zu finden, ebenfalls in eine unbestimmte quadratische Aufgabe verwandeln. Es ist nämlich, aus der gegebenen Gleichung $m(x^3 + y^3) = z^3 - (n - m)y^3$. Hier zerfällt die Größe rechter Hand in die beyden Faktoren $z - y\sqrt[3]{(n - m)}$ und $z^2 + zy\sqrt[3]{(n - m)} + y^2\sqrt[3]{(n - m)^2}$, und, wenn man $x = p + q$, $y = p - q$ setzt, so erhält man $2mp(p^2 + 3q^2) = (z - (p - q)\sqrt[3]{(n - m)})$. $(z^2 + z(p - q)\sqrt[3]{(n - m)} + (p - q)^2\sqrt[3]{(n - m)^2})$. Man multiplicire beyderseits mit einer unbestimmten Größe r, und zerfälle dann die Gleichung in folgende

beyde: $2mp = r(z-(p-q)\sqrt[3]{(n-m)})$ und $r(p^2+3q^2) = z^2 + z(p-q)\sqrt[3]{(n-m)} + (p-q)^2\sqrt[3]{(n-m)^2}$.

Aus der ersten findet man $p = \frac{r(z+q\sqrt[3]{(n-m)})}{2m+r\sqrt[3]{(n-m)}}$.

Die andere giebt, wenn man den gefundenen Werth von p substituirt: $r(r^2z^2+2r^2zq\sqrt[3]{(n-m)} + q^2(4r^2\sqrt[3]{(n-m)^2}+12mr^2\sqrt[3]{(n-m)}+12m^2)) = z^2(2m+r\sqrt[3]{(n-m)})^2+z(rz-2mq)(2m+r\sqrt[3]{(n-m)}).\sqrt[3]{(n-m)}+(rz-2mq)^2\sqrt[3]{(n-m)^2}$, woraus q durch z und r gefunden wird.

So findet man z. B. wenn

$$m = n = 1, \text{ für } x^3 + 2y^3 = z^3,$$

$$q = \frac{-(r^3+3r+2)z \pm (r+2)z\sqrt{3(12r^2-(r-1)^4)}}{4(r^3+3r^2+3r-1)}$$

Nimmt man $r = 2$,

so wird $q = \frac{-4z \pm z\sqrt{3.47}}{25}$;

$$p = \frac{z+q}{2} = \frac{z(21 \pm \sqrt{3 \cdot 47})}{50};$$

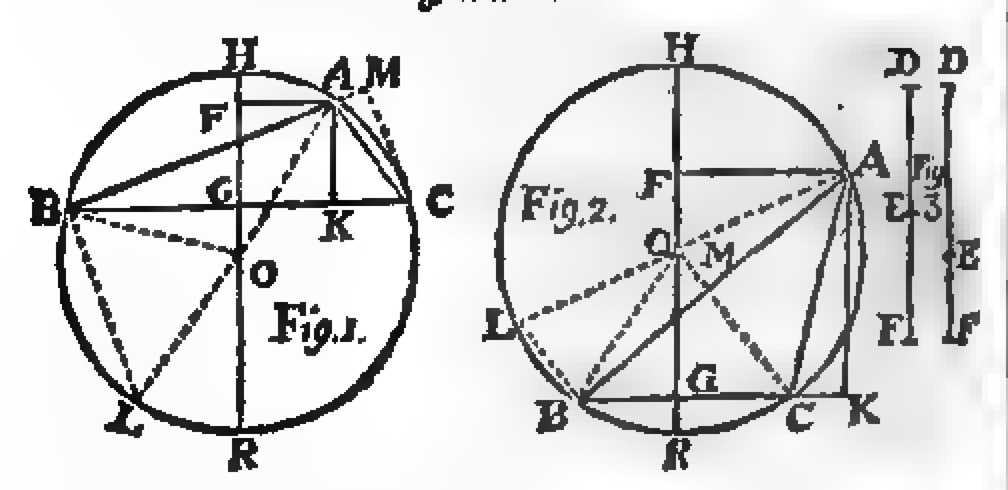
$$x = p + q = \frac{z(13 \pm 3\sqrt{3 \cdot 47})}{50};$$

$$y = p - q = \frac{z(29 \mp \sqrt{3 \cdot 47})}{50},$$

und diese Werthe werden der Gleichung ein Genüge thun.

IV, b.

Bemerkungen über Glenie's (Archiv Band I. Heft 4. angeführte S. 481 u. f.) Aufgaben, und Anzeige eines Weges, auf die von ihm angegebenen Construktionen derselben zu kommen; von M. C. F. Hauber.



1. Auf einer gegebenen geraden Linie als Grundlinie ein Dreyeck zu beschreiben, dessen beyde andere Seiten zusammen einer gegebenen Länge gleich, oder um eine gegebene Länge von einander unterschieden, oder von dessen beyden andern Seiten die Quadrate zusammen einen gegebenen Raume gleich, oder um einen gegebenen Raum von einander unterschieden seyen; sind unbestimmte Aufgaben, deren jeder durch unendlich viele Dreyecke Genüge geleistet werden kann; welche übrigens alle das mit einander gemeinschaftlich haben, daß ihre Spitzen im Umfang einer der Lage nach gegebenen Ellipse im Fall der ersten, Hyperbel im Fall der zweyten der genannten Aufgaben, im Fall der dritten und vierten aber in einer der Lage nach gegebenen Kreisperipherie und geraden Linie liegen, deren Bestimmung man im 5ten und 1sten Satze des IIten Buchs von Apollonius ebenen Oertern finden kann.

Die Aufgaben: Auf einer gegebenen Grundlinie ein Dreyeck von der Beschaffenheit zu beschreiben, daß die Summe oder Differenz der Würfel seiner beyden andern

Seiten

Seiten zum Würfel der Grundlinie ein gegebenes Verhältniß habe; gehören ebenfalls unter die unbestimmten; und die Spitzen aller Dreyecke, welche der einen und der andern dieser Aufgaben Genüge thun, liegen im Umfang krummer Linien, oder vielmehr verschiedener Theile einer Curve, welche, wenn man die Seiten des Dreyecks (Fig. 1.) $AB = x$, $AC = y$, $BC = a$, das gegebene Verhältniß $p : q$ setzt, durch die Gleichung $x^3 \pm y^3 = \frac{p}{q} a^3$ in Absicht auf das wechselseitige Verhalten in ihrem Umfange sich kreuzender, um die Pole B, C sich drehender, gerader Linien, oder, wenn man will, in Absicht auf das Verhalten zwischen einem an irgend einen ihrer Punkte (wie A) vom Punkt B aus gezogenen Radius vector (BA), und der Entfernung (AF, welche man z setze) desselben Punkts von dem auf der BC in ihrer Mitte G errichteten Loth durch die Gleichung $2az = x^2 - \sqrt[3]{\frac{p}{q}a^3 - x^3}^{\,2}$ (denn im Dreyeck BAC ist bekanntlich $2BC \times AF$, d. i. wenn auch AK auf BC senkrecht ist, $2BC \times GK = AB^q - AC^q$), oder endlich, wenn in letzterer Gleichung $\sqrt{(\frac{1}{2}a + z)^2 + v^2}$ statt x gesetzt wird, in Absicht auf das Verhalten rechtwinklicher Coordinaten ($GK = z$, $KA = v$); von welchen die Absciſſen auf BC von deren Mitte G an genommen sind, charakterisirt wird.

Uebrigens würde, wenn AB von irgend einer Länge beliebig angenommen wird, die Bestimmung der dazu gehörigen Länge von AC (welche $= \pm \sqrt[3]{\frac{p}{q} BC^3 - AB^3}$, d. i. die dritte von vier stetigen Proportionallinien ist, von welchen BC die erste, die Differenz zwischen $\frac{p}{q} BC$ und $\frac{AC^3}{BC^2}$ die vierte ist), oder von GK, und hiedurch des dazu

gehö-

gehörigen Dreyecks, von Auflösung der Aufgabe: zwischen zwo gegebenen geraden Linien zwo mittlere stetig proportionirte zu finden, abhangen, welche vermittelst der Postulate der Elementargeometrie nicht bewerkstelligt werden kann.

Die von Glenie (am angef. O. 36. 37.) angegebenen Bestimmungsstücke aber, der auf gegebenen Grundlinien zu construirenden Dreyecke, deren Summe oder Unterschied der Würfel der beyden andern Seiten dem Würfel der Grundlinie gleich, das doppelte, dreyfache desselben sey, hängen nur von Radicalien des zweyten Grades ab, und die dadurch bestimmten Dreyecke lassen sich durch Elementargeometrie construiren.

2. Um zu prüfen, ob die (a. a. O. 36.) angegebenen Bestimmungsstücke ihren correspondirenden Aufgaben Genüge leisten, drücke man die beyden Seiten AB, AC eines in einen Kreis beschriebenen Dreyecks aus dessen Grundlinie BC und Höhe AK oder GF, und aus der Höhe GH des an einerley Seite und auf der nämlichen Grundlinie auf dem Dreyeck befindlichen Abschnitts des genannten Kreises aus. Es ist nämlich

$AB^q + AC^q = 2\,AK^q + BK^q + CK^q$ (El. I, 47.)

$= 2(AK^q + BG^q + GK^q)$ (El. II, 9. wenn das Loth AK die Grundlinie zwischen B, C (Fig. 1.); II, 10. wenn es ihre Verlängerung trifft (Fig. 2.)).

$= 2(FG^q + BG^q + AF^q)$

$= 2(FG^q + HGR + HFR)$ (E. III, 35.)

$= 2(FG^q + FGR + HFG + 2HF \times GR)$ (E. II, 1.)

$= 2(HR \times FG + 2\,HF \times GR)$ (E. II, 1.)

Und

Und

$2AB \times AC = 2HR \times FG$; (denn man zieht durch A den Durchmesser AL, und ziehe BL; so sind die Winkel ABL, AKC einander gleich als Rechte (E. III, 31.); die Winkel ALB, ACK aber (in Fig. 1.), weil sie in einerley Abschnitt stehen (III, 21.), oder (Fig. 2.) weil jeder derselben mit dem Winkel ACB zweyen Rechten gleich ist (III, 31.); daher die Dreyecke ABL, ACK gleichwinklich; und AB : AL das ist HR = AK d. i. FG : AC; daher $AB \times AC = HR \times FG$)

Folglich $(AB + AC)^q = 4(HR \times FG + HF \times GR)$
$= 4(HGF + FGR + HF \times GR)$
$= 4(HGF + HGR)$ (E. II, 1.)
$= 4(HGF + BG^q)$;

$(AB - AC)^q = 4 HF \times GR = 4 \frac{HF}{HG} BG^q$;

Mithin $AB + AC = 2\sqrt{HGF + BG^q}$

$AB - AC = 2BG\sqrt{\frac{HF}{GH}}$

Folglich $AB = \sqrt{HGF + \frac{1}{4}BC^q} + \frac{1}{2}BC\sqrt{1 - \frac{GF}{GH}}$

$AC = \sqrt{HGF + \frac{1}{4}BC^q} - \frac{1}{2}BC\sqrt{1 - \frac{GF}{GH}}$

Setzt man nun nach Glenies Vorschrift für Aufg. I. (a. a. O. 18.) $GH = \frac{1}{2}BC\sqrt{(\frac{5}{31})}$, $GF = \frac{1}{24}BC\sqrt{5.31}$; so findet sich hieraus ganz leicht $AB = \frac{9 + \sqrt{5}}{12} BC$, $AC = \frac{9 - \sqrt{5}}{12} BC$; woraus man ganz genau

AB²

$AB^c + AC^c = \frac{2 \cdot 9^3 + 2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 5}{3^3 \cdot 4^3}$, $BC^c = \frac{3 \cdot 9 + 5}{2 \cdot 4 \cdot 4}$

d. i. $\frac{32}{32} BC^c = BC^c$ finden, auch, wenn man will, die Werthe $b = 0,936333$, $c =$ 0,[illegible]63666 (ebend. 34.) herleiten kann. Man könnte eben so verfahren, um zu prüfen, ob die Aufg. II. u. III. (36) durch die daselbst angegebenen ihnen zugehörigen GH, GF aufgelöst werden.

3. Um aber statt dessen lieber a priori auf einen Weg zu kommen, auf welchem man die Bestimmungsstücke des zu findenden Dreyecks von keinen andern Wurzelgrößen, als vom zweyten Grad abhängig erhalten möge; nehme man fürs erste die Gleichung $x^3 + y^3 = \frac{p}{q} a^3$ wiederum vor; und man wird sich erinnern oder leicht finden, daß die Werthe der Größen x, y, welche dieser Gleichung Genüge thun, die geforderte Eigenschaft, nur von Wurzelgrößen genannter Art abhängig zu seyn, haben werden, wenn man auch $x + y$ einer gegebenen Größe gleich, z. B. $= \frac{m}{n} a$ setzt. Man findet nämlich, wenn x die größere ist

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} + \sqrt{\frac{1}{3}\left(4\frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} - \frac{m^2}{n^2}\right)}\right) a$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} - \sqrt{\frac{1}{3}\left(4\frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} - \frac{m^2}{n^2}\right)}\right) a;$$

wobey erhellt, daß, damit x, y möglich seyen, $4\frac{p}{q}$ nicht $< \left(\frac{n}{m}\right)^3$, oder $\frac{m}{n}$ nicht $> \sqrt[3]{\left(\frac{4p}{q}\right)}$ seyn darf.

Die Summe der Würfel zwoer geraden Linien nämlich, hat zum Würfel ihrer Summe, wenn die geraden Linien gleich sind, das Verhältniß wie 1 : 4; wenn sie aber ungleich sind, ein größeres.

Denn

Denn es seyen DE, EF (Fig. 3.) zwo gerade Linien. Und sie seyen fürs erste gleich, $DE = EF = \frac{1}{2} DF$,

mithin $\left\{\begin{matrix} DE \\ EF \end{matrix}\right\} : DF = 1 : 2$;

so ist $\left\{\begin{matrix} DE^c \\ EF^c \end{matrix}\right\} : DF^c = 1 : 8$ (E. XI, 33.)

daher $DE^c + EF^c : DF^c = 2 : 8 = 1 : 4$.

Sie seyen aber ungleich; so ist $DF^q > 4 DEF$ (E. II, 8.)

mithin $DF^q : DEF$
d. i. (E. XI, 32.) $DF^c : DEF \times DF$ $\Big\} > 4 : 1$, daher

DF^c d. i. $DE^c + EF^c + 3DEF \times DF : 3DEF \times DF > 4 : 3$,
u. folgl. $DE^c + EF^c : 3DEF \times DF > 1 : 4$.

Da ferner der Würfel der Summe größer ist, als die Summe der Würfel, so muß $\left(\frac{m}{n}\right)^3 > \frac{p}{q}$ seyn.

4. Sollen nun die x, y, so wie wir sie durch $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, a bestimmt haben, nebst a, Seiten eines geradlinichen Dreyecks abgeben können; so muß vermöge El. I, 21. $\frac{m}{n} > 1$ seyn, damit $x + y > a$ sey; und aus der Bedingung, daß $a + y > x$ sey, folgt, daß $\left(\frac{m}{n}\right)^3 + 3\frac{m}{n} > 4\frac{p}{q}$ seyn müsse. Und da vermöge des vorhergehenden (§. 3.) $\frac{4p}{q}$ nicht $< \left(\frac{m}{n}\right)^3$ seyn darf, aber $\frac{m}{n}$ und mithin auch $\left(\frac{m}{n}\right)^3 > 1$ seyn muß; so ergiebt sich hieraus, daß auch $\frac{4p}{q} > 1$ oder $\frac{p}{q} > \frac{1}{4}$, das ist, das gegebene Verhältniß, welches die Summe der Würfel der Seitenlinie zum Würfel der Grundlinie haben soll, grösser seyn müsse, als 1:4; welcher Bestimmung auch (a. a. O. 23. I.) erwähnt ist.

Da

Da nämlich, wenn AB, AC, BC Seiten eines Dreyecks sind, $AB + AC > BC$, mithin $(AB+AC)^c > BC^c$, das Verhältniß $AB^c + AC^c : (AB + AC)^c$ aber entweder $= 1 : 4$, wenn nämlich AB, AC gleich sind, oder, wenn sie ungleich sind, $> 1 : 4$ ist; so folgt, daß immer $AB^c + AC^c : BC^c > 1 : 4$ seyn müsse.

5. Um diese Bestimmungen auf die besondern Fälle der Aufgaben I, II, III (a. a. O. 18. 19.), wo $\frac{p}{q} = 1, 2, 3$ ist, anzuwenden; so ergiebt sich aus denselben, ausser der bey allen gemeinschaftlichen Bedingung, daß $\frac{m}{n} > 1$ sey, noch insbesondere, daß

für $\frac{p}{q} = 1$; $\frac{m}{n}$ nicht $> \sqrt[3]{4}$, aber $\left(\frac{m}{n}\right)^3 + 3\frac{m}{n} > 4$,

für $\frac{p}{q} = 2$; - - - > 2, aber $> \sqrt[3]{2}$, u. - - - - - - $> 2^3$,

für $\frac{p}{q} = 3$; - - - $> \sqrt[3]{12}$, ab. $> \sqrt[3]{3}$, u. - - - - - > 12

seyn müsse.

Diesen Forderungen geschieht Genüge, wenn man z. B. setzt

bey Aufgabe I. $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$; und denn wird

$$x\ (\S.\ 3.) = \frac{9 + \sqrt{5}}{12}a,$$

$$y = \frac{9 - \sqrt{5}}{12}a;$$

bey Aufgabe II. $\frac{m}{n} = \frac{5}{3}$; so wird

$$x = \frac{5 + \sqrt{(\frac{21}{15})}}{6}a,\ y = \frac{5 - \sqrt{(\frac{21}{15})}}{6}a;$$

bey Aufgabe III. $\frac{m}{n} = 2$; so wird

$$x = (1 + \sqrt{(\tfrac{1}{6})})a,\ y = (1 - \sqrt{(\tfrac{1}{6})})a.$$

Es

Es wird demnach jeder der genannten drey Aufgaben durch ein, aus den dazu gehörigen hier angegebenen x, y und a, als Seiten, (nach El. I, 22.) beschriebenes Dreyeck, Genüge geschehen: welches für Aufg. I. durch die Proberechnung (in §. 2) schon bestätigt ist, indem die dortigen AB, AC, BC mit den hier bey Aufg. I. genannten x, y, a übereinstimmen. Und man wird eben so die hier für Aufg. II, III. angegebenen Werthe von x, y mit denjenigen gleichgültig finden, welche man für AB, AC aus den von Glenie zu Construktion dieser Aufgaben (a. a. O. 36.) angegebenen Werthen von GF, GH vermittelst der in §. 2. gegebenen Ausdrücke herleiten kann.

6. Umgekehrt, wenn man die zu beschreibenden Dreyecke, statt sie aus den drey gegebenen Seiten, BC oder a, und den angegebenen x, y zu construiren, mit Glenie vermittelst ihrer Höhen und der Kreise, in welche sie beschrieben werden können, bestimmen wollte; so hätte man nur in den allgemeinen Ausdrücken der Höhe GF eines Dreyecks und der Höhe GH des Kreisabschnitts, der mit ihm einerley Grundlinie und die Spitze des Dreyecks in seiner Peripherie liegend hat, durch des Dreyecks Seiten, nämlich GF

$$= \frac{\sqrt{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)(BC+AB-AC)(BC-AB+AC)}}{2BC}$$

$$GH = \tfrac{1}{2} BC \sqrt{\left(\frac{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)}{(BC+AB-AC)(BC-AB+AC)}\right)},$$

(welche Ausdrücke, zunächst für schiefwinkliche Dreyecke bestimmt, übrigens auch, als den Fall der rechtwinklichen, für welche $GF = \frac{AB \times AC}{BC}$, $GH = \frac{1}{2} BC$ wird, unter sich begreifend angesehen werden können; der erste derselben ist bekannt genug: den zweyten zu beweisen,

ziehe man von B an den Mittelpunkt O die BO, und fälle von C auf AB das Loth CM, welches die AB zwischen A, B, wenn der Winkel BAC spitzig (Fig. 2.), ihre Verlängerung aber trifft, wenn derselbe stumpf ist (Fig. 1.)); und da die Winkel BGO, AMC einander gleich sind als rechte, die Winkel BOG, CAM aber, weil jeder derselben die Hälfte des Winkels BOC (El. III, 20; und 22 Fig. 1; 21 in Fig. 2.); mithin sind die Dreyecke ACM, OBG gleichwinklich, und

$$OB \text{ d. i. } HO \text{ oder } OR : OG = AC : AM = 2BAC : 2BAM$$

$$= 2BAC : \begin{cases} BC^q - (AB^q + AC^q) \text{ Fig. 1.} \\ \qquad (\text{El. II, } 12, 13.) \\ AB^q + AC^q - BC^q \text{ Fig. 2.} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Folglich} & HO - OG : OR + OG \text{ (Fig. 1.)} \\ & HO + OG : OR - OG \text{ (Fig. 2.)} \\ \text{d. i.} & GH : GR \\ \text{d. i. (El. VI, 8, 20.)} & GH^q : BG^q \end{array}\right\}$$

$$= \begin{cases} (AB + AC)^q - BC^q : BC^q - (AB - AC)^q \\ (AB + AC + BC)(AB + AC - BC) : (BC + AB - AC) \\ \qquad (BC - AB + AC) \end{cases}$$

$$GH : BG \text{ d. i. } \tfrac{1}{2} BC$$

$$= \sqrt{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)} : \sqrt{(BC+AB-AC)(BC-AB+AC)}$$

statt AB, AC in die §. 3 angegebenen x, y zu substituiren; wodurch man die genannten beyden Höhen durch $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, a oder BC ausgedrückt, nämlich

$$GF = \tfrac{1}{2} BC \sqrt{\left(\frac{m^2}{n^2} - 1\right)\left(1 - \tfrac{4}{3} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{m^2}{n^2}\right)},$$

$$GH = \tfrac{1}{2} BC \sqrt{\left\{\frac{\frac{m^2}{n^2} - 1}{1 - \tfrac{4}{3} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{m^2}{n^2}}\right\}};$$

und hieraus wiederum für die einzelnen Fälle, wenn

$\frac{p}{q} = 1,\ \frac{m}{n} = \frac{3}{2}$; $GH = \frac{3}{2} BC \sqrt{(\frac{5}{31})}$, $GF = \frac{1}{24} BC \sqrt{5.31}$,

$\frac{p}{q} = 2,\ \frac{m}{n} = \frac{5}{3}$; $GH = BC \sqrt{(\frac{15}{11})}$, $GF = \frac{4}{9} BC \sqrt{(\frac{11}{15})}$,

$\frac{p}{q} = 3,\ \frac{m}{n} = 2$; $GH = \frac{3}{2} BC$, $GF = \frac{1}{2} BC$,

das ist, für Aufgabe I, II, III gerade die (a. a. O. 36.) angegebenen Werthe von GF, GH erhält.

7. Um nun auf den Fall zu kommen, da ausser der Grundlinie des zu beschreibenden Dreyecks das Verhältniß des Unterschieds der Würfel der beyden andern Seiten zum Würfel der Grundlinie gegeben ist; so wird sich, wenn man wiederum die Bedingung $x^3 - y^3 = \frac{p}{q} a^3$ mit der $x - y = \frac{m}{n} a$ verbindet,

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{3}\left(4 \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} - \frac{m^2}{n^2}\right)} + \frac{m}{n}\right) a$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{3}\left(4 \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} - \frac{m^2}{n^2}\right)} - \frac{m}{n}\right) a$$

entweder unmittelbar finden, oder auch aus den §. 3. gefundenen Werthen, indem man y dort negativ nimmt, herleiten lassen. Uebrigens, da der Unterschied der Würfel zwoer geraden Linien größer ist, als der Würfel ihres Unterschieds, so muß $\frac{p}{q} > \left(\frac{m}{n}\right)^3$ seyn; und wenn dies ist, so sind x, y immer möglich.

8. Setzt man hiezu noch die vermöge El. I, 21. erforderliche Bestimmung, daß $\frac{m}{n} < 1$ sey, worinn alsdenn, wenn $\frac{p}{q}$ eine ganze Zahl ist, diese, daß $\left(\frac{m}{n}\right)^3 + \frac{3m}{n} < \frac{4p}{q}$ seyn müsse, schon enthalten ist; so kann man die für irgend ein gegebenes $\frac{p}{q}$ und den erwähnten Bestimmungen

 gemäß

gemäß angenommenes $\frac{m}{n}$ bestimmten x, y; namentlich, $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ gesetzt,

$$\text{für } \frac{p}{q} = 1;\ x = \frac{\sqrt{\left(\frac{31}{3}\right)} + 1}{4} BC,\ y = \frac{\sqrt{\left(\frac{31}{3}\right)} - 1}{4} BC,$$

$$\text{für } \frac{p}{q} = 2;\ x = \frac{\sqrt{21} + 1}{4} BC,\ y = \frac{\sqrt{21} - 1}{4} BC,$$

$$\text{für } \frac{p}{q} = 3;\ x = \frac{\sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)} + 1}{4} BC,\ y = \frac{\sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)} - 1}{4} BC,$$

nebst der BC gebrauchen, um aus ihnen, als den drey gegebenen Seiten, vermöge El. I, 22. die Dreyecke zu construiren, welche die diesen bestimmten $\frac{p}{q}$ entsprechenden Aufgaben auflösen werden.

9. Oder man wird statt dessen aus dem schon angeführten Satze, daß eines Dreyecks ABC Höhe GF oder AK

$$= \frac{\sqrt{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)(BC+AB-AC)(BC-AB+AC)}}{2BC}$$

und dem bekannten, daß GK die Entfernung des Punkts, in welchem das von der Spitze eines Dreyecks auf dessen Grundlinie gefällte Loth dieselbe trifft, von der Mitte der Grundlinie $= \frac{AB^q - AC^q}{2BC}$ sey, die den Dreyecken, deren Seiten die §. 7. angegebenen x, y sind, zugehörigen

$$AK = \tfrac{1}{2} BC \sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)\left(\tfrac{4}{3} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} + \tfrac{1}{3} \frac{m^2}{n^2} - 1\right)}$$

$$GK = \tfrac{1}{2} BC \cdot \frac{m}{n} \sqrt{\tfrac{4}{3} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} - \frac{m^2}{n^2}}$$

und namentlich, $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ gesetzt, für die bestimmten Fälle, da

$\frac{p}{p}$

$\frac{p}{q} = 1$; $GK = \frac{1}{8} BC \sqrt{(\frac{31}{3})}$, $AK = \frac{1}{8} BC \sqrt{19}$,
$\frac{p}{q} = 2$; $GK = \frac{1}{8} BC \sqrt{63}$, $AK = \frac{1}{8} BC \sqrt{51}$,
$\frac{p}{q} = 3$; $GK = \frac{1}{8} BC \sqrt{(\frac{95}{3})}$, $AK = \frac{1}{8} BC \sqrt{83}$,
herleiten, und mit Glenie diese Elemente zur Composition der Aufgaben IV, V, VI gebrauchen können. Denn die hier für die genannten drey Fälle angegebenen Werthe von GK, AK sind mit den (a. a. O. 37.) angegebenen von GE, ED für Aufgabe IV; GF, FL für V; GH, HK für VI, respektive einerley.

10. Uebrigens ist offenbar, daß den für $\frac{m}{n}$ angegebenen Bedingungen, daß es < 1 und $< \sqrt[3]{\frac{p}{q}}$ bey Auflösung der Aufgabe, welche den Unterschied (§. 8.), bey der andern aber, welche die Summe der Würfel der Seiten betrifft, $\frac{m}{n} > 1$ und $< \sqrt[3]{\left(\frac{4p}{q}\right)}$, aber $\left(\frac{m}{n}\right)^3 + 3\frac{m}{n} > \frac{4p}{q}$ seyn müsse (§. 3. 4.), nicht durch die Werthe allein Genüge geschieht, welche wir §. 8, 5. dafür angenommen haben; daß mithin den gleich anfangs gemachten Bemerkungen über die Unbestimmtheit dieser Aufgaben gemäß, die für die Aufgaben I-III. in §. 5. oder 6. für IV-VI. in §. 8. oder 9. angegebenen Werthe der Elemente der zu findenden Dreyecke nur einzelne Auflösungen aus den unendlich vielen geben, welche sich aus der Annahme immer verschiedener, wenn nur mit den angeführten Einschränkungen bestehender Werthe von $\frac{m}{n}$ ergeben würden. Daher ganz begreiflich: „Jede solche Aufgabe läßt sich, vermittelst der ebenen Geometrie, auf mannigfaltige Art verzeichnen.“ (a. a. O. 20.)

So bietet sich z. B. von selbst dar, daß der Aufg. II. durch ein auf der gegebenen Grundlinie beschriebenes gleichseitiges Dreyeck Genüge geschieht; welches sich auch ergiebt, wenn man in §. 5. für den Fall, da $\frac{p}{q} = 2$, $\frac{m}{n} = 2$ setzt.

11. Da ferner die §. 3. 6. oder 7. 9. in $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, a ausgedrückten Werthe der Bestimmungsstücke der zu findenden Dreyecke für jedes gegebene Verhältniß, welches die Summe oder der Unterschied der Würfel der Seiten zum Würfel der Grundlinie haben soll, ohne daß der Exponent desselben auf ganze Zahlen eingeschränkt wäre, wenn er nur für den Fall der Summe $> \frac{1}{4}$ ist, gültig sind, und auf jeden besondern Fall, wo dieser Exponent in bestimmten ganzen oder gebrochenen Zahlen benannt ist, durch Substitution des so benannten Exponenten statt $\frac{p}{q}$ sogleich anwendbar gemacht werden; so versteht sich von selbst, was Glenie sagt: „daß er mit gleicher Leichtigkeit ohne Ende so fortgehe;" daß man für das Verhältniß, welches die Summe der Würfel der Seiten zum Würfel der Grundlinie haben soll, auch z. B. „ein Verhältniß nehmen könne, welches zwischen die Verhältnisse 2 : 1 und 3 : 1 fällt;" daß er „ganz leicht ohne Ende fortgehen könnte, solche Aufgaben durch ebene Geometrie zu verzeichnen, hätte er nur Zeit genug dazu." (a. a. O. 20. 23.)

12. Ueberflüssig ist aber wohl zu erinnern, daß, wenn Glenie seine Analyse von solchen Aufgaben einem gewissen eigenthümlichen Besitz geometrischer Grundlehren zuschreibt, und sich aus dem Felde, worein sie gehören soll, eine hochgepriesene Erweiterung reiner Geometrie verspricht (ebendas 23.), die hier gegebene im Gegentheil sich aller solcher Ansprüche begeben muß.

IV, c.

Ueber Glenie's Construktionen verschiedener geometrischer Aufgaben (Arch. d. Math. 4. Heft. S. 481 u. f.); von M. Jacob Wilhelm Becker, Pfarrer zu Klein-Brembach unweit Buttstädt.

---

1. Glenie rühmt sich (l. c. §. 23.) des Besitzes geometrischer Grundlehren, durch die sich ausserordentlich viel leisten lasse; die ein ganz neues Feld eröffnen, unbegränzt und voll unzähliger Mannichfaltigkeit ꝛc. ꝛc. Zum Beweise, was er dadurch bewirken könne, liefert er einige Construktionen, wo Dreyecke, in denen die Würfel ihrer Seiten ein gegebenes Verhalten gegen einander bekommen sollen, durch den Kreis und gerade Linien verzeichnet werden.

2. Wenn diese Beyspiele neue geometrische Grundlehren voraussetzen: so dürfte ich mich auch wohl solcher rühmen, weil ich dieselben Aufgaben, weit einfacher als Glenie, construire, auch durch den Kreis und gerade Linien, aber mit Vermeidung aller Irrationalität. Hier ist meine Construktion

3.

Aufgabe No.	Radius IH = IR	RG	RF
I	152	124	279.
II	639	198	550.
III	5	1	4.
IV	56	36	93.
V	40	12	63.
VI	184	36	285.

Nach einem beliebigen Maßstabe fasse ich aus hier stehender Tafel den Radius IH = IR; ziehe mit ihm einen Kreis, und im Kreise einen Durchmesser RH, auf

den ich, vom Anfangspunkte R an, aus derselben Tafel und nach dem nämlichen Maßstabe, die beyden Stücke RG; FR trage. Nun ziehe ich, senkrecht auf RH, durch G und F, die beyden Sehnen BC; AE, von welchen die untere die Basis, ein Endpunkt der obern, A oder E, die Spitze des gesuchten Dreyecks ist.

4. BC wird der gegebenen Grundlinie freylich nicht gleich seyn, es müßte zufällig treffen. Indeß verzeichnet man nun leicht, durch eine Parallele mit BC, ein anderes ähnliches Dreyeck von gegebener Basis. — Oder statt der Basis könnte auch eine andere Seite des Dreyecks gegeben seyn.

Ueberhaupt bestimmt das gegebene Verhalten der Seiten nur Formen von Dreyecken, die auch nach ihrer Größe bestimmt werden, sobald eine Seite gegeben ist.

5. Nennt Herr Hofrath Kästner (l. c. §. 25.) Glenie's Construktionen Blumen, welche das Auge des Verstandes weiden: so läßt sich von der gegenwärtigen dasselbe doch wohl auch sagen, weil sie, ohne mehr Linien zu bedürfen, durch rationale Größen vollführt wird; weshalb sie um so eher eine Stelle in der unbestimmten geometrischen Analyse verdient.

6. Zugleich liefere ich auch das Verfahren, wie diese Blumen erzogen wurden, was der Herr Hofrath Kästner vermißt und wünscht (l. c. §. §. 25. 38). So wichtige und geheime Kunstgriffe, die sogar Newton's Erfindungen beschämen sollen (l. c. §. 23.), werden nicht nöthig seyn; weiter nichts, als eine leichte Analyse und bekannte geometrische und trigonometrische Sätze. So lange aber auch Herr Glenie von seinen Geheimnissen nichts weiter bekannt macht, als was in dem 3ten und 4ten Hefte des Archivs steht, wird er erlauben, daß man seine wichtigen Entdeckungen noch in Zweifel ziehe. Ein Paar einfache Differentialformeln und leichte Construktionen berechtigen noch nicht zum Glauben an mathematische Geheimnisse.

7. Die

7. Die erste allgemeine Aufgabe ist (l. c. §. 23. I.) Ueber einer gegebenen Grundlinie ein Dreyeck zu machen, daß die Summe der Würfel der beyden andern Seiten zur Grundlinie ihrem sich verhalte wie e : 1.

8. Die gegebene Basis BC sey = a; der beyden übrigen Seiten

Summe = a . s ; Unterschied = a . d

d und s sind Zahlen, die Exponenten der beyden Verhältnisse der gedachten Summe und Differenz zur Basis.

Die beyden Seiten selbst könnten nur durch eine unreine quadratische Gleichung gefunden werden, weil ein Zeichen beyde zugleich ausdrücken würde.

9. Aus Summe und Unterschied finden sich die beyden Seiten

$$a.(\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}d) \quad \text{und} \quad a.(\tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}d)$$

10. Nun soll seyn

$$a^3 e = a^3 (\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}d)^3 + a^3 (\tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}d)^3$$

oder $e = (\tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}d)^3 + (\tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}d)^3$

a fällt aus der Rechnung heraus, weil es auf die Form des Dreyecks keinen Einfluß hat. (vergl. 4.)

11. $e = \tfrac{1}{4}s^3 + \tfrac{3}{4}sd^2$; daher endlich

$$d = \sqrt{\frac{4e - s^3}{3s}}$$

wo man s nach Belieben annehmen darf.

12. Damit aber das Dreyeck möglich werde, muß:

I. s positiv seyn.

II. $s > 1$

III. auch $1 > d$; d. i. $1 > \dfrac{4e - s^3}{3s}$

oder $s^3 + 3s > 4e$

IV. Man hat von s zwey minima zu bemerken. Setzt man das erste, 1, statt s in $s^3 + 3s$, so wird 4 daraus.

Ist daher $e = 1$ so sagen beyde Gränzen II und III einerley.

$e < 1$ so ist die Gränze II anzuwenden.

$e > 1$ . . . . III . . .

V. Das maximum von s ist: s nicht $> \sqrt[3]{4e}$

VI. Das maximum (V) darf mit den minimis nicht im Widerspruche stehen, darum muß, II und V verglichen, $\sqrt[3]{4e} > 1$, oder $e > \frac{1}{4}$ seyn. Das ist die Einschränkung (l. c. §. 23. I.) III und V widersprechen sich nie, was auch der Werth von e ist. Denn wenn s nicht $> \sqrt[3]{4e}$,

so ist $s^3 + 3s$ nicht $> 4e + 3\sqrt[3]{4e}$

aber $s^3 + 3s \quad > 4e$

beydes kann zusammen bestehen.

Anmerk. Ganz läßt sich die kubische Gleichung doch nicht wegbringen, wenigstens als Gränze der unbestimmten Größe zeigt sie sich wieder.

13. Die beyden gesuchten Seiten des Dreyecks sind nun (9)

$$\tfrac{1}{2} a (s \pm d) = \tfrac{1}{2} a \, . \left(s \pm \sqrt{\frac{4e - s^3}{3s}}\right)$$

14. Diese allgemeinen Formeln wende ich auf Glenie's drey besondere Fälle (l. c. §. 18. I. II. III.) an, wo $e = 1$; $= 2$; $= 3$ ist; dabey wähle ich für s die Werthe, die Glenie's Dreyecke geben; wie ich sie gefunden habe, zeigt unten (30)

Aufgabe	I	II	III
es ist $e =$	1	2	3
man nehme $s =$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	2
so wird $d =$	$\frac{1}{6}\sqrt{5}$	$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{91}{15}} = \frac{\sqrt{1365}}{45}$	$\frac{1}{3}\sqrt{6}$

Für

Für Nr. I sind die beyden Seiten a = 1 gesetzt $\frac{3}{4} \pm \frac{1}{12}\sqrt{5}$

$$\frac{3}{4} = 0,75$$
$$\frac{1}{12}\sqrt{5} = 0,18633900$$

größere Seite = 0,9363390...;
kleinere Seite = 0,5636609...
(vergl. l. c. §. 34. das Resultat des Hrn. Hofr. Kästners.)

15. Schon die hier gefundenen Formeln haben offenbare Vorzüge vor denen des Herrn Glenie; sie geben die unbekannten Seiten des Dreyecks selbst, die sich alsdann leichter mit der gegebenen Basis vergleichen lassen. Zugleich enthalten sie nur eine ebenfalls bloß quadratische Irrationalgröße, von der man überdieß untersuchen kann, ob sie sich durch eine geschickte Annahme von s heben lasse, und man die Seiten des Dreyecks insgesammt rational machen könne oder nicht. Z. B.

e = 1; und überhaupt = einem Würfel, läßt wegen der Gleichung (9) keine rationalen Werthe zu.

e = 2; man setze auch s = 2, so wird d = 0, und das Dreyeck gleichseitig, in welchem offenbar die Summe von den Würfeln zweyer Seiten das doppelte des Würfels der dritten Seite ausmacht.

u. s. f. vergl. Eulers Algebr. 2 Th. II. Abschn. Kap. 9, 10.

16. Von den gefundenen Formeln leite ich nun auch Glenie's beyde Construktionen, so wie meine gleich anfangs gegebene, sehr leicht ab. Ich werde in der Folge die Größe d beybehalten, ohne den für sie in (11) gefundenen Werth zu substituiren. Die Ausdrücke werden einfacher, und lassen sich alsdann auch sogleich auf die zweyte Hauptaufgabe anwenden.

17. Die eine Construktion des Herrn Glenie, deren er sich bey der 4ten, 5ten und 6ten Aufgabe bedient, die aber auf die drey ersten eben so gut anwendbar ist, verzeich-

net

net das Dreyeck durch das Perpendikel von der Spitze und die dadurch entstandenen Segmente der Basis. Hierzu bedarf man

GD die Entfernung des Perpendikels AD von der Mitte der Basis G.

AD = GF die Größe des Perpendikels selbst.

Ich benenne die Seiten des Dreyecks mit den Buchstaben der gegenüberstehenden Winkel, aber aus dem kleinen lateinischen Alphabete.

$$18.\ GD = \frac{(c+b)(c-b)}{2a} = \frac{as.ad}{2a} = \tfrac{1}{2}a.s.d.$$

$$19.\ AD = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} : \tfrac{1}{2}a$$
$$= \frac{1}{2a}\sqrt{.(a+as)\ (as-a)\ (a+ad)(a-ad)}$$
$$= \tfrac{1}{2}a\sqrt{(s^2-1)(1-d^2)}$$

20. Aus (18. 19) berechnet man die Größe von AD, GD für die drey Fälle in (14)

Aufgabe I	II	III
$GD = a\ \frac{1}{8}\sqrt{5}$	$a.\frac{1}{18}\sqrt{\frac{5.91}{3}}$	$a.\sqrt{\frac{2}{3}}$
$AD = a\ \frac{1}{24}\sqrt{5.31}$	$a.\frac{4}{9}\sqrt{\frac{11}{15}}$	$a\ \frac{1}{2}\ a$

für das Perpendikel AD = GF sind die Ausdrücke völlig dieselben, die auch Glenie nach (l. c. §. 36.) angiebt.

21. Die Construktion, deren sich Glenie bey den drey ersten Aufgaben bedient, setzt ausser dem Perpendikel AD = FG noch die Linie GH voraus. Es ist aber:

$$GH = BG . \cot BHG = \tfrac{1}{2}a . \cot \tfrac{1}{2}A$$

Um GH zu finden, und zugleich die oben (3) gelieferte Construktion zu entwickeln, berechne ich die Winkel des Dreyecks, wobey ich den Radius der trigonometrischen Linien = 1 setze.

22. Von den beyden Winkeln an der Basis BC sey die halbe Summe = S; die halbe Differenz = D

so

so sind die drey Winkel selbst

$S+D$ der Seite $\frac{1}{2}a(s+d)$ gegen über

$S-D$ . . $\frac{1}{2}a(s-d)$ . . .

$180^\circ - 2S$ . . a . . .

23. Nun ist $\frac{1}{2}a(s+d) = a \cdot \frac{\sin(S+D)}{\sin 2S}$

$$\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d = \frac{\sin S \cdot \cos D + \sin D \cdot \cos S}{2 \sin S \cdot \cos S}$$

$$s + d = \frac{\cos D}{\cos S} + \frac{\sin D}{\sin S}.$$

24. Auf gleiche Art findet man

$$\frac{1}{2}a(s-d) = a\,\frac{\sin(S-D)}{\sin 2S}$$

oder $s - d = \dfrac{\cos D}{\cos S} - \dfrac{\sin D}{\sin S}$.

25. Aus 23 und 24 folgen die beyden Gleichungen

$$s = \frac{\cos D}{\cos S}\ ; \quad d = \frac{\sin D}{\sin S}$$

woraus man D und S durch ihre trigonometrischen Linien findet; nämlich

26. $\sin S = \sqrt{\dfrac{s^2 - 1}{s^2 - d^2}}$

$$\cos S = \sqrt{\frac{1 - d^2}{s^2 - d^2}}$$

$$\text{tang } S = \frac{1}{\cot S} = \sqrt{\frac{s^2 - 1}{1 - d^2}}.$$

27. Und $\sin D = d \cdot \sin S$

$\cos D = s \cdot \cos S$

$$\text{tang } D = \frac{1}{\cot D} = \frac{d}{s} \cdot \text{tang } S.$$

28. Nun

28. Nun hat man auch

$$GH = \frac{1}{2} a . \cot \frac{1}{2} A ; (21) = \frac{1}{2} a \cot (90^\circ - S) ; (22)$$

$$= \frac{1}{2} a \operatorname{tang} S = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{s^2 - 1}{1 - d^2}} ; (26).$$

29. Für die drey Fälle (14) wird GH

I) $= a \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{31}}$; II) $= a \sqrt{\frac{15}{11}}$; III) $= \frac{3}{2} a$
eben so wie Glenie (l. c. §. 36.)

30. Aus den (19. 28) gefundenen allgemeinen Ausdrücken für AD = FG und GH und den Werthen, die Glenie für diese Größen angiebt, findet man, welche Werthe von s in seinen Angaben vorausgesetzt werden. Denn es wird $s^2 = \frac{4 GF . GH}{a^2} + 1$

z. B. Für die I. Aufgabe

$$s^2 = \frac{4 . 3}{2 . 24} . \sqrt{\frac{5 . 5 . 31}{31}} + 1 = \frac{9}{4}$$

und $s = \frac{3}{2}$; wie ich es (14) auch angenommen habe.

31. So wären Glenie's Construktionen entwickelt, dargethan und mit neuen Construktionen vermehrt, die aber, im Allgemeinen, insgesammt die Verzeichnung von Irrationalgrößen erfordern. Letztere fallen weg, wenn man $\cos 2 S$ und $\cos 2 D$ zur Verzeichnung anwendet, denn für sie erhält man rationale Ausdrücke:

$$\cos 2 S = 2 \cos^2 S - 1 = 2 . \frac{1 - d^2}{s^2 - d^2} - 1$$

$$\cos 2 D = 2 \cos^2 D - 1 = 2 . s^2 \frac{1 - d^2}{s^2 - d^2} - 1.$$

32. Es ist aber, wenn man auch IR = RH = 1 setzt,

$$IG = \cos RC = \cos A = \cos (180^\circ - 2S) = - \cos 2S$$

$$\text{u. } RG = 1 - IG = 1 + \cos 2 S = 2 \frac{1 - d^2}{s^2 - d^2}.$$

33. Fer-

33. Ferner IF = cos AH = cos 2 D und

$RF = 1 + IF = 1 + \cos 2D = 2s^2 \frac{1-d^2}{s^2-d^2} = s^2 RG.$

34. Beyde Formeln (32. 33) liefern die in der Tabelle (3) enthaltenen Zahlen zu IH; RG; RF für die Aufgaben I. II. III. (14). Eigentlich sollte, nach (32) IH = 1 stehen; ich habe aber dafür die kleinsten ganzen Zahlen von denselben Verhältnissen in die Tafel gesetzt.

35. Genau auf die bisherige Art wird auch die zweyte Hauptaufgabe behandelt:

Ueber einer gegebenen Grundlinie BC = a ein Dreyeck zu verzeichnen, daß der Ueberschuß des Würfels der einen Seite über der andern ihren, zum Würfel der Grundlinie eine gegebene Verhältniß e : 1 habe.

Gegenwärtige Aufgabe entsteht sogar aus der vorigen, wenn man d > 1, s < 1 annimmt, und die Bedeutungen von d und s verwechselt. Ich werde aber die vorigen Bedeutungen beybehalten, und die Analyse auch bey dieser Aufgabe ganz kurz durchführen.

36. Aus der Gleichung $a^3 e = a^3 \left(\frac{s+d}{2}\right)^3 - a^3 \left(\frac{s-d}{2}\right)^3$,

findet man $s = \sqrt{\frac{4e-d^3}{3d}}$.

37. s wird durch d so bestimmt, wie oben (11) d durch s. Damit auch hier das Dreyeck möglich werde, muß

I. d positiv seyn.

II. $s > 1$; d. i. $1 < \frac{4e-d^3}{3d}$; oder $d^3 + 3d < 4e$, worin zugleich die Bedingung $d^3 < 4e$ steckt, welche die Formel für s (36) erfordert.

III. $d < 1$.

IV. Für $e = 1$ treffen beyde Gränzen II u. III zusammen. Für $e < 1$ muß man II anwenden. Für $e > 1$ muß man III anwenden.

V. Einen kleinsten Werth von d giebt es nicht, und e kann hier jeden Werth haben.

38. Herrn Glenie's drey letzte Aufgaben (l. c. §. 21, IV. V. VI.) gehören hierher; in denselben ist e = 1; 2; 3. Man erhält die Glenieschen Dreyecke, wenn man $d = \frac{1}{2}$ setzt; es wird alsdann

IV) $s = \sqrt{\frac{31}{12}}$; V) $s = \frac{1}{2}\sqrt{21}$; VI) $s = \sqrt{\frac{95}{12}}$

woraus sich die Dreyecke verzeichnen lassen (vergl. 15).

39. Weil man zu diesen Dreyecken dieselben Stücke, wie oben (16) hat: so lassen sich auch die vorigen Construktionen hier insgesammt anwenden.

40. Zur Verzeichnung durch das Perpendikel und die Segmente der Basis, die Glenie im gegenwärtigen Falle gebraucht hat, dienen die Formeln (18. 19); aus ihnen findet man für (38):

	IV	V	VI
SD =	$a.\frac{1}{8}\sqrt{\frac{31}{3}}$	$a.\frac{1}{8}\sqrt{21}$	$a.\frac{1}{8}\sqrt{\frac{95}{3}}$
AD =	$a.\frac{1}{8}\sqrt{19}$	$a.\frac{1}{8}\sqrt{51}$	$a.\frac{1}{8}\sqrt{83}$

41. (l. c. §. 37) enthält Herrn Glenie's Ausdrücke, für Nr. IV genau dieselben wie hier. Die Auflösung der folgenden zwey Aufgaben V. VI gründet er ganz unnöthig auf die Auflösung von Nr. IV, von welcher sie doch im geringsten nicht abhängen. Man reducire sein FG; FL und GH; HK ebenfalls auf BC = a, so kommen meine Ausdrücke heraus.

V. $GF = GE\sqrt{\frac{63}{31}} = BC.\frac{1}{8}\sqrt{\frac{63}{31}.\frac{31}{3}} = BC\frac{1}{8}\sqrt{21}$

$FL = ED\sqrt{\frac{51}{19}} = BC.\frac{1}{8}\sqrt{\frac{51}{19}.19} = BC\frac{1}{8}\sqrt{51}$

VI. $GH = ED\sqrt{\frac{95}{31}} = BC.\frac{1}{8}\sqrt{\frac{95}{31}.\frac{31}{3}} = BC\frac{1}{8}\sqrt{\frac{95}{3}}$

$HK = ED\sqrt{\frac{83}{19}} = BC.\frac{1}{8}\sqrt{\frac{83}{19}.19} = BC\frac{1}{8}\sqrt{83}$

42. Die in (21) angegebene, auch hier brauchbare Construktion durch GF = AD und GH erfordert, daß man nach (28) nach GH berechne.

	IV	V	VI
GH	$= a\frac{1}{6}\sqrt{19}$	$= a\frac{1}{6}\sqrt{51}$	$= a\frac{1}{6}\sqrt{83}$

43. Endlich giebt (32. 33) die zur rationalen Verzeichnung erforderlichen Grössen IH; RF; RG her, die in ihren kleinsten ganzen Zahlen in der Tafel (3) stehen.

V.

V.

Zusatz zu Herrn Prof. Hindenburgs Abhandlung über die cyklischen Perioden; v. Hrn. M. Jacob Wilhelm Becker.

(Leipziger Magazin der Mathematik. 3tes St. 1786.)

Der 6te §. (S. 293) gedachter vortrefflichen Abhandlung enthält mehrere sehr einfache Regeln, zu einer gegebenen Complexion in einer gleichfalls gegebenen cyklischen Periode die Ordnungszahl zu finden, wofern die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ relative Primzahlen sind. Im 9ten §. (S. 306 ff.) wird hierauf der Fall untersucht, wenn die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ nicht insgesamt Primzahlen unter sich sind. Hierbey unterscheidet der Herr Verfasser vier besondere Fälle, von welchen er die drey ersten auf jene Regeln (§. 6.) zurückführt, aber bey dem sehr gewöhnlichen vierten ein eigenes weitläuftigeres Verfahren vorschreibt, nach welchem man arithmetische Reihen mit einander vergleichen muß. Es wäre recht Schade, wenn die schönen Regeln (§. 6.) nicht ganz allgemein wären und jenen Fall nicht auch umfaßten; indeß läßt er sich demselben auch unterordnen, man darf nur No. IV. im 9ten §. (S. 308) etwa so umändern:

IV. a) Ueberhaupt, wenn die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ keine Primzahlen unter sich sind: so kann es doch durch Divisionen mit gemeinschaftlichen Faktoren jederzeit dahin gebracht werden, daß man relative Primzahlen erhält, deren Produkt den Dividuus minimus giebt. Die so abgekürzten Zahlen nehme man statt der gegebenen Reihen- oder Cykelzahlen an, und suche für ihren Cykel die Ord-

nungszahl der gegebenen Complexion (nach §. 6.), die man aber, wenn sie gefunden ist (nach §. 5.) noch prüfen muß.

b) Im 10ten §. wird das Beyspiel gegeben

$$\begin{matrix} (12) & (15) & (20) & (24) & (36) \\ 5 & 14 & 9 & 17 & 5 \end{matrix}$$

der Dividuus minimus ist 5. 8. 9 (= 360) in seine drey relative Primzahlen zerlegt, welche als Faktoren in den gegebenen Zahlen 20; 24; 36 enthalten sind. Man nehme daher statt des gegebenen Cykels den neuen an

$$\begin{matrix} (5) & (8) & (9) \\ 9 & 17 & 5 \end{matrix} \text{ oder abgekürzt (nach §. 4. III.) } \begin{matrix} (5) & (8) & (9) \\ 4 & 1 & 5 \end{matrix}$$

für die beyden übrigen Zahlen (12) (15) sollte man 1; 1 setzen, d. i. man läßt sie einstweilen ganz weg.

c) Zu dieses Cykels Complexion 4, 1, 5 findet man die Ordnungszahl nach (§. 6.). Es lassen nehmlich (das. V. VI.)

$$\frac{8.9}{5} \text{ den Rest } 2; \quad \frac{5.9}{8} \text{ den Rest } 5; \quad \frac{5.8}{9} \text{ den Rest } 4$$

daher wird die Ordnungszahl

$$\frac{5.A+4}{2}.8.9 + \frac{8B+1}{5}.5.9 + \frac{9C+5}{4}.5.8$$

(für A = 0; B = C = 3) = 2.8.9 + 5.5.9 + 8.5.8 = 689; und die kleinste 689 — 360 = 329 *).

d) Beweis. Von den beyden Cykeln aus den Reihenzahlen

(20) (24) (36); (⊙) und (5) (8) (9); (☽)

hat jede Periode des einen so viele, insgesammt verschiedene, Complexionen als die des andern. Dabey erhält man aus jeder Complexion a, b, c von (⊙) die gleich-

zählige

*) Für A = 0; C = 3; aber B = — 2, käme sogleich 2.8.9 + 8.5.8 — 3.5.9 = 464 — 135 = 329, die kleinste Ordnungszahl. Z.

zählige Complexion in (☽), wenn man von jeder Zahl a, b, c der ersten, die zugehörige des abgekürzten Cykels aus 5, 8, 9 so oft als möglich abzieht, und bloß den Rest beybehält. Dieß folgt aus der Construktion beyder Cykeln deutlich genug. Man halte nur ihre beyden ersten Kolumnen für 20 und 5 gegen einander; ich schreibe sie horizontal unter einander:

1 2 3 4 5 6 7 8 ... 15 16 17 18 19 20 | 1 2 ...
1 2 3 4 5 1 2 3 ... 5 1 2 3 4 5 | 1 2 ...

In der ersten Kolumne zählt man bis 20 fort; in der andern nur bis 5, von den Zahlen über 5 behält man bloß die Reste. Und weil 20 ein Multiplum von 5 ist, so fallen beyder Gränzen, 20 und 5, zusammen, und beyde Columnen fangen zugleich wieder mit 1 an. Der allgemeine Ausdruck für die Ordnungszahl eines Gliedes aus der Reihe für 20, ist $20A+a$, der mit 20 dividirt den Rest a läßt; man dividire ihn mit 5, so bleibt kein anderer Rest als den a giebt. — Was bisher im Beyspiele von 20 und 5 gesagt ist, gilt von jedem Paar Zahlen, deren eine ein Vielfaches der andern ist.

Ist also 9; 17; 5 eine Complexion von (☉), so ist auch 4; 1; 5 die eben so vielste Complexion in (☽), deren Ordnungszahl man nach (§. 6.) findet.

e) Es giebt aber mehrere scheinbare Complexionen des Cykels (☉), die insgesammt die einzige Complexion 4; 1; 5 in (☽) bestimmen. Statt 4 könnte man die vier Werthe 4; 9; 14; 19 setzen; statt 1 die Zahlen 1; 9; 17; statt 5 die Zahlen 5; 14; 23; 32 *). Das gäbe

*) Diese verschiedenen Werthe für die Complexion 4, 1, 5 findet man, wenn man zu ihren Zahlen, oder den Resten 4; 1; 5 die zugehörigen Reihenzahlen (5) (8) (9) so oft und so lange addirt, als solche die größern Reihenzahlen (20) (24) (36) nicht übersteigen; oder, wenn man zu den beyden Calumnen für 20 und 5 (in d) noch zwo andere, für 24 und 8, für 36 und 9 macht, und ihre zusammengehörigen Zahlen mit einander vergleicht. H.

zusammen 4 . 3 . 4 = 48 Complexionen in (⊙), aus welchen allen die einzige 4; 1; 5 in ( ) folgte. Allein, nur eine von ihnen kann im Cykel (⊙) vorkommen, die übrigen 47 sind falsch. Damit stimmt überein, daß das Produkt 20 . 24 . 36 (die Anzahl aller Complexionen, wenn 20; 24; 36 relative Primzahlen wären) 48mal so groß ist, als 5 . 8 . 9 (die Anzahl der wirklichen Complexionen).

Deshalb muß man mit der gefundenen Ordnungszahl erst die Probe (§. 5.) anstellen.

f) Diese Probe muß nicht bloß mit 20; 24; 36 vorgenommen werden, sondern auch mit den übrigen Zahlen 12 und 15, die bisher aus der Rechnung ganz wegfielen. Sie müssen für sich zur Rechnung passen, oder die Aufgabe ist unmöglich.

g) Statt nach (§. 5.) die Probe durch die Division anzustellen, vergleicht man von den Zahlen α; β; γ; δ... jede niedere nicht relative Primzahl mit der oder den höhern, die ihre gemeinschaftlichen Faktoren erschöpfen, und untersucht bey jedem solchen Paare, ob der Unterschied ihrer zugehörigen Reste denselben Theiler habe, wie die beyden Zahlen selbst; denn hierauf beruht die Möglichkeit der Auflösung. Z. B.

12 wird mit 24 verglichen, worin es aufgeht; der Unterschied ihrer Reste 17 — 5 ist auch durch 12 theilbar.

15 = 3 . 5 muß wegen des Theilers 3 mit 24; wegen des Faktors 5 mit 20 verglichen werden.

20 = 4 . 5 wegen 4 mit 24; 5 ist kein Theiler einer folgenden Zahl.

24 mit 36; beyde sind mit 12 theilbar, so auch 17 - 5.

Diese

Diese Probe kann man noch vor der Berechnung der Ordnungszahl vornehmen, damit man nicht etwas Unmögliches suche.

h) Eine Aufgabe dieser Art ist zugleich unbestimmt und überbestimmt. Vergl. §. 12. Ex. 2. Anmerk. 3. und hier f.

Anmerk. Indem man diesen Fall auf §. 6. reducirt, bekommt die dortige schöne Auflösung Allgemeinheit und Vollendung. Das Verfahren des Herrn Verfassers beruht auf abgekürzten Versuchen, und führt bey unbequemen Zahlen auf die Vergleichung weitläuftiger arithmetischer Progressionen.

Anmerkung des Herausgebers.

Herr M. Becker hat die Behandlung des Falls, wenn die Reihenzahlen α, β, γ, δ... nicht insgesammt Primzahlen unter sich sind (die Auflösung der Aufgabe §. 9.) auf die Vorschriften, wenn diese Zahlen durchaus relative Primzahlen sind (auf die Auflösung der Aufgabe §. 6.) gründlich zurückgeführt, und so den Umfang ihrer Regeln erweitert. Daß die Vorschriften der Auflösung bey der im vorhergehenden Aufsatze angegebenen Reduktion für §. 9. nicht so kurz sind, noch auch seyn können, als in dem Falle des 6ten §. erhellet, theils aus der Vorbereitung und Prüfung (hier IV, a, b), welche letztere man wegen der mehrern scheinbaren Complexionen des neu angenommenen, statt des gegebenen, Cykels sowohl, (e) als wegen der übrigen, anfangs übergegangenen Zahlen (f) vornehmen muß, theils aus der, noch vor der Berechnung, anzustellenden Vergleichung der Zahlen, (g) um unmög-

 liche

liche Fälle auszuschliessen. Es dürfte daher die hier vorgeschlagene Reduktion mit der zugehörigen Auflösung wohl nicht viel kürzer ausfallen, als die von mir gegebene, besonders wenn man bey letzterer auf die dortige Bemerkung (e. S. 309) Rücksicht nimmt. Wenn es also auf der einen Seite verdienstlich ist, den zweyten Fall (§. 9.) auf den ersten (§. 6.) reduzirt zu haben, so hat auch auf der andern Seite meine zweyte Auflösung (§. 9. IV) die eigenthümliche Empfehlung für sich, daß sie in ihren Gründen noch einfacher ist, als die erste, und daß sie ganz allgemein auch auf den ersten Fall (wo das Produkt aus allen Faktoren α, β, γ, δ... wie sie gegeben sind, den Dividuus minimus darstellt) sich erstreckt; wie schon (§. 10. Anm. 1.) erinnert worden ist.

Diese Auflösung also, mit den übrigen (§. 6. 8) zusammen, bewährt zugleich die vorlängst von mir gemachte Bemerkung von dem Reichthume combinatorischer Verfahren und Regeln bey Auflösung analytischer Aufgaben, und wie wichtig es sey, bey dergleichen Aufgaben sich umzusehen, mit welchen Combinationsaufgaben sie zusammenhängen oder übereinkommen, um auf diesem Wege die möglichst einfache und leichte Auflösung aufzufinden.

Einige Bemerkungen, diese Aufgaben betreffend, enthalten Herrn M. Lüdickens Aufsatz, und mein Zusatz dazu (Arch. H. VI. S. 206-220).

Hindenburg.

VI.

Berechnung des Kreises; von Hrn. Bürmann, öffentlichen Lehrer der Handlung zu Mannheim.

Bey numerischen Reihen kömmt es vornehmlich auf die leichte Umsetzung in Decimalen an, und die Güte einer Formel ist immer im umgekehrten Verhältnisse der Zeit ihrer Berechnung. Folgende Rektification dürfte auf diese Art den Vorzug vor convengentern erhalten. Herr Professor Klügel war ihr äusserst nahe, in seiner sinnreichen Abhandlung (Archiv der Mathem. Heft VII), welche ich mit Vergnügen und Nutzen gelesen habe. Indessen hat die Arbeit dieses Gelehrten die meinige keinesweges veranlaßt. Vor einigen Jahren schon habe ich meine Formel dem Herrn Obristwachtmeister Vega, und etwas später dem Herrn D. Kramp mitgetheilt.

Man erlaube mir elementarisch zu Werke zu gehen, und nichts vorauszusetzen als den trigonometrischen Satz:

$$\text{tang}\,(m+n) = \frac{\text{tang}\,m + \text{tang}\,n}{1 - \text{tang}\,m.\ \text{tang}\,n}.$$

§. 1. Weil Atang x mit x Null verschwindet, und für die negative Tangente nur das Zeichen ändert, so kann dessen Entwicklung nach Potenzen von x, bloß

$x + \boxed{3}\, x^3 + \boxed{5}\, x^5 + \boxed{7}\, x^7 +$ etc seyn, wo die Coefficienten $\boxed{3}$, $\boxed{5}$ etc zu bestimmen sind.

Atang (x + a) ist demnach

$$= x + a + \boxed{3}\,(x+a)^3 + \boxed{5}\,(x+a)^5 + \text{etc.}$$

$$= x + \boxed{3}\,x^3 + \boxed{5}\,x^5 + \text{etc.}$$

$$+ (1 + 3\,\boxed{3}\,x^2 + 5\,\boxed{5}\,x^4 + \text{etc})\,a +$$

die höhern Potenzen von a.

Hieraus folgt für Atang $(x+a)$ — Atang x
$=$ Arc. tang. tang [Atang $(x+a)$ — Atang x]

$$= \text{Atang}\ \frac{a}{1+x^2+ax},$$

$$(1+3\,\boxed{3}\,x^2+5\,\boxed{5}\,x^4+\text{etc})\,a+a^2\,(\text{etc})$$

$$= \frac{a}{1+x^2+ax}+a^3\,[\text{etc}].$$

Beyderseits mit a dividirt, erhalten wir

$$1+3\,\boxed{3}\,x^2+5\,\boxed{5}\,x^4+\text{etc}+a\,(\text{etc})$$

$$= \frac{1}{1+x^2+ax}+a^2\,[\text{etc}],$$

eine Gleichung, welche für jeden Werth von a besteht; also auch für $a=0$. Diese Annahme giebt

$$1+3\,\boxed{3}\,x^2+5\,\boxed{5}\,x^4+7\,\boxed{7}\,x^6+\text{etc}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+\text{etc}.$$

Aus der nothwendigen Identität beyder Reihen, entspringen die Bedingnisse $3\,\boxed{3}=-1$, $5\,\boxed{5}=+1$, $7\,\boxed{7}=-1$, $9\,\boxed{9}=+1$ etc und wir haben demnach Atang $x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{etc}$ mit der Gewißheit, daß die Divisoren die Folge der ungeraden Zahlen ausmachen.

§. 2. Für $x=1$, die einzige rationale Tangente eines bekannten Bogens läuft die Reihe sehr träge ab. Es sey darum Atang $1+$ Atang $p = 4$ Atang $\frac{1}{5}$. Man schreite zu den Tangenten über und es kömmt

$$\frac{1+p}{1-p} = \frac{\frac{4}{5}-\frac{4}{125}}{1-\frac{6}{25}+\frac{1}{625}} = \frac{120}{119};\ \text{also}\ p = \frac{1}{239}\ \text{und}$$

$$\text{Atang}\ 1 = 4\ \text{Atang}\ \tfrac{1}{5} - \text{Atang}\ \tfrac{1}{239}$$

$$= \frac{8}{10} - \frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{8.4}{1000} - \frac{1}{239.57121}\right) +$$

$+\frac{1}{5}$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{8\cdot 4^2}{100000}-\frac{1}{239\cdot 57121^2}\right)$$
$$-\frac{1}{7}\left(\frac{8\cdot 4^3}{10000000}-\frac{1}{239\cdot 57121^3}\right)+\text{etc},$$

eine Reihe, deren Vierfaches das Verhältniß des Kreises zu seinem Durchmesser ist.

§. 3. Ueberschlag der Zeit, um Lagny's Rektification zu prüfen.

Ich nehme einen guten Rechner an, welcher über jedes Verfahren die kurzen Proben durch 9 und 11 anzustellen weiß.

$$\frac{8\cdot 4^n}{(2n+1)10^{2n+1}} \text{ und } \frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}} \text{ beyde} = \frac{1}{10^{127}}$$

gesetzt, geben in ganzen Zahlen 90 Glieder von der ersten und 26 von der zweyten Form.

90	steigende Multiplicationen durch 4, deren höchste 55 Ziffern hat . Stunden	10
26	Divisionen durch 57121. Für die erste von etwa 800 Ziffern setze ich $1\frac{1}{2}$ Stunde an, und für alle, da sie immer in arithmetischer Progression abnehmen .	20
26	abnehmende Subtraktionen, die größte zu einer $\frac{1}{2}$	7
90	abnehmende Divisionen durch die ungeraden Zahlen von 3 bis 181, eine in die andere zu 20 Minuten . .	30
2	große Additionen, 1 Subtraktion und endlich eine Multiplication durch 4 .	6
	Wer Uebung und Vorsicht hat, bekömmt auf meine Art nur kleine Fehler zu verbessern, für welche ich schon zugegeben habe. Jedoch zum Ueberflusse runde ich noch die Zahl mit .	7
	Stunden	80

Ein Rechner, der nichts Besseres zu thun hat, kann demnach in 8 Tagen fertig werden. Während dem zwölftägigen Bombardement unsrer Stadt, wo ich natürlich ohne Bibliothek und Geschäfte war, hatte ich zum Zeitvertreibe die Ausrechnung in 163 Decimalen angefangen und bereits weit gebracht. Aber in der Unordnung jener Greuelscene verlor ich einmal einen Theil der Papiere und mit ihnen die Lust wieder anzufangen. Meine Absicht war die Kreisberechnung in einem Bändchen von etwa hundert Seiten vollständig abdrucken zu lassen, mit allen Resten, damit jeder Liebhaber mein Verhältniß nachrechnen und nach Belieben fortsetzen könne.

§. 4. Da ich in keinem der mir bekannten Lehrbücher eine systematische Anleitung zu großen Berechnungen weiß, so will ich einige der Vortheile herschreiben, auf die mich etwas Nachdenken und viel Uebung gebracht haben. Sehr zu wünschen wäre es, daß unsere großen praktischen Mathematiker ähnliche Beyträge lieferten: Anfänger und Nichtanfänger würden dabey gewinnen. Wer viel rechnen muß, hat freylich seine Verkürzungen; alle hingegen sind nicht gleich gut, und ich kenne berühmte Analysten, welche mittelmäßige Rechner sind.

a) Meine Ziffern mache ich alle gleich groß, senkrecht und sehr deutlich. Damit die Columnen sich nicht verwechseln, schreibe ich die Ziffern dicht unter einander und entferne sie etwas von der Rechten zur Linken.

b) Von 5 zu 5 Ziffern ziehe ich Perpendicularen, welche ich abwechselnd verdoppele und überschreibe.

c) Große Berechnungen mache ich laut, doch spreche ich so wenig als möglich aus. Im Addiren sage ich nie, auch nicht einmal im Sinne, 9 und 4 ist 13, 13 und 8 ist 21; sondern bloß 13, 21. In 7.8+5 spreche ich 56, 61 aus, und wenn ich bereits ein paar Stunden gerechnet habe, auf der Stelle 61. Seitdem ich mich beym Subtrahiren des bleibt soviel entwöhnet habe, verwechsele ich das Behaltene äußerst selten. Ueberhaupt ermüdet das

viele

viele, laute oder nichtlaute, Aussprechen den Geist und macht ihn irre: Das gute Rechnen hängt mit dem geschwinden Rechnen genau zusammen. Man kann es durch eine zweckmäßige Uebung dahin bringen, so geschwind zu rechnen als man Ziffern schreibt.

d) Wenn die Bestandtheile einer arithmetischen Regel nicht sehr viel Ziffern haben, so halte ich für sie und für das Facit keine bestimmte Stelle. Beym Dividiren ziehe ich dann das Produkt ab, indem ich es mache. Das Einmaleins und die Mehrfachen von 11, 12, 15 und 25 geben mir, da ich immer mit der nächsten Zahl frage, in jedem Falle schnell den Quotienten. Die folgende Ziffer setze ich auch in großen Divisionen nicht herab. Das schräge Abziehen vermeidet hier viele Fehler: es ist nicht schwer, und jeder meiner Schüler ist den dritten Tag daran gewöhnt. Raum und Zeit wird damit gewonnen. Ὁ βιος βραχὺς, ἡ δὲ τέχνη μακρή. Divisionen wie folgende erfodern, sammt der Probe durch 9, $1\frac{1}{2}$, höchstens 2 Minuten.

Divis. 19876.496907 Quot. Neunerprobe $4.8+4=4.9$

Divid. 98765 43210
19261 07878
−1373 486
−180 59
−11
− Ueberschuß

e) Für weitläuftige Multiplicationen und Divisionen mache ich auf einem besondern Papiere durch Addition eine Tabelle, welche ich durch multipliciren berichtige. Im Großen stelle ich den Quotienten, Ziffer für Ziffer, über den Dividend; bey jedem Abzuge mache ich die Neunprobe, und bey jeder Abtheilung von 10 Ziffern prüfe ich den Quotient durch 9 und 11. Weil das Abschreiben großer Zahlen eine ergiebige Fehlerquelle ist, so vermelde ich es ganz, dadurch daß ich jedes Facit gleich auf die Stelle rechne, wo ich es brauche. Durch das Biegen eines Blattes und das Unterlegen eines andern ist dieß immer leicht. Meine gleichfernen überschriebenen Perpendicularen gestatten kein Verschieben der Stellen. Das Umständlichere mag beygehendes Beyspiel lehren.

Tabelle

Tabelle der Mehrfachen des Divisors

1	57121	1	7
2	114242	2	5
3	171363	3	3
4	228484	4	1
5	285605	5	8
6	342726	6	6
7	399847	7	4
8	456968	8	2
9	514089	9	0

Diese Tabelle macht sich am besten schräge, wenn der Divisor sehr groß ist; man biegt dann das Papier, damit der Subtrahend Ziffer für Ziffer über den Minuend komme, und man zieht von oben herunter ab.

Der Dividend ist die sehr einfache Periode von $\frac{1}{239}$, und der Quotient ist also $= \frac{1}{239 \cdot 57121}$.

10		
Quotient	732	49775
Neunreste	056	20416
Divid. 418	41004	18410
18	56372	79745
1	42633	84238
	28482	06691
	5543	00474
	443	23112

50		
Quotient	93176	21207
Neunreste	76716	08250
Dividend	18410	94184
	25344	83987
	63819	68934
	54188	38164
	52614	39899
	10104	34203

90		
Quotient	84532	90705
Neunreste	13334	00001
Dividend	04184	10041
	20652	20346
	49013	25330
	76803	35741
	61403	39041
	50403	44041

130		
Quotient	80678	03508
Neunreste	53317	48677
Dividend	10041	84100
	30473	81602
	37903	20632
	58000	60635
	52094	63603
	02204	03235

	20		30		40
36125	14108	82235	67690	37378	55461
78343	57634	13830	50423	30072	46764
04184	10041	84100	41841	00418	41004
78069	06943	02975	84251	73140	96643
46657	13977	67262	32354	27689	87324
33042	03974	34694	61316	88613	30210
98365	06230	28391	21214	81165	13803
02005	41123	34350	24244	33231	51143

	60		70		80
68516	13315	31486	52581	36969	60844
60736	86307	76608	23241	75886	70452
10041	84100	41841	00418	41004	18410
52535	71895	10465	58937	15145	58676
81303	14589	92734	07211	86852	51789
20690	73947	42072	48183	78782	66284
57888	07879	70436	71959	44485	78508
01103	10243	31340	23535	30422	42311

	100		110		120
87072	77709	45608	45255	52781	26100
13005	41556	65154	66727	00853	64804
84100	41841	00418	41004	18410	04184
07138	74142	65810	06859	66739	88084
57683	20153	52852	91748	21004	56087
58305	40007	82805	75186	42987	46087
54405	46244	85041	10546	74450	46384
44405	23304	23133	31440	13000	40344

	140		150		160
06359	16459	80319	68985	45911	384
01346	68666	10063	46807	82430	3706
41841	00418	41004	18410	04184	10041
45592	94069	61795	50535	69273	826
19409	66972	64402	91826	50056	13
73482	19882	23432	81270	59917	6
29664	55181	59168	16326	71848	
03235	40115	35543	23500	2421	

Wegen

Wegen meines von Jugend auf blöden Gesichtes, hat mir das Abschreiben dieser Division mehr Zeit als ihre Berechnung gekostet. Ich hatte sie noch übrig, und habe sie, um ganz sicher zu seyn, wiederholt, wozu ich etwas über 1 ½ Stunde gebraucht habe, nachdem, der Dividend stand. Die Uebereinstimmung großer Berechnungen, zu verschiedenen Zeiten oder von verschiedenen Rechnern gemacht, ist ein guter Beweis der Richtigkeit: ein besserer ist das Endresultat auf einem andern Wege zu finden.

Dergleichen Arbeiten sind nicht in jedem Betrachte nugae difficiles: dem jungen Mathematiker sind sie sehr anzurathen: er erlangt dadurch jene Fertigkeit und Aufmerksamkeit, ohne welche man in keiner Wissenschaft viel leistet.

Sollte die combinatorische Analysis nicht ein Gesetz auffinden können, um die Ziffern der Ordnung nach hin zu schreiben? *)

*) Die Anforderung, die der Herr Verfasser der obigen, für die Praxis bey großen und weitläuftigen Berechnungen sehr nützlichen Bemerkungen, an die combinatorische Analysis hier macht, dürfte wohl manchem Leser etwas zu gewagt scheinen. Das ist sie gleichwohl nicht; denn die Combinationslehre kann wirklich ein Verfahren nachweisen, durch welches man die Ziffern der Quotienten ganz mechanisch, nicht nur nach der Ordnung, sondern auch ausser der Ordnung, von jeder beliebigen Ziffer aus der Mitte anfangend, und zwar, nach Willkühr, vor oder rückwärts, so weit man will, finden und hinschreiben kann. Ich habe zwar das Verfahren dafür im Wesentlichen schon anderwärts öffentlich bekannt gemacht; es scheint aber doch, daß eine speciellere Nachweisung und Anwendung auf vorkommende Fälle erst noch hinzukommen müsse, um eine so nützliche Erfindung in Gang zu bringen. Davon also in einem der folgenden Hefte ausführlich.

Von mechanischen und andern (aus figürlicher, combinatorischer größtentheils involutischer Anordnung der Zahlen und Ziffern abgeleiteten) Rechnungsvortheilen, meine Beschreibung einer ganz neuen Art — Zahlen — bequem und sicher zu finden — der ausführliche Titel dieser Schrift und deren Inhaltsanzeige steht Archiv H. II. S. 243 f. H.

VII.
Versuch einer vereinfachten Analysis; ein Auszug eines Auszuges von Herrn Bürmann.

Vorerinnerung des Herausgebers.

Herr Bürmann hat mir von seinem unten angeführten Essai de Calcul fonctionnaire aux Constantes ad-libitum einen Auszug fürs Archiv mitgetheilt, der aber für das gegenwärtige Heft zu spät eingieng. Ich gebe also hier nur einen Auszug aus jenem Auszuge, und werde die ausführlichere Uebersicht des vortrefflich gearbeiteten Ganzen in meiner zweyten Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen, an welcher bereits gedruckt wird, aufführen. Sie verdient um so mehr darinn einen Platz, da Herr Bürmann vornehmlich dahin arbeitet, die combinatorische Analysis (über die er sehr vortheilhaft sich äussert) mit der Funktionen-Analysis in die engste Verbindung zu setzen, und beyde mit einander zu verschwistern. Die Erfahrung nehmlich hat Herrn Bürmann gelehrt, daß die Funktionen-Analysis, die meisterhaft sagt was zu thun ist, in verwickelten Fällen nur selten die Ausführnng übernimmt, sondern solche der combinatorischen überläßt; wodurch also ein großer Theil der ganz allgemeinen Formeln erst wirkliche Brauchbarkeit erhält, und solche sonach aufhören bloße Spiele des Witzes und Scharfsinns ihrer Erfinder zu seyn. Dieser Weg, wenn er einmal geebnet ist, führt sehr weit — Ce n'est qu'en généralisant les combinaisons et en simplifiant leurs symboles que l'ame distingue les parties d'un Tout immense. C'est en soulageant ainsi la memoire, que l'imagination dispose de toutes ses forces, que l'homme concentre, pour ainsi dire, l'Univers au foyer de son esprit. *Essai de Calc. fonct. Sect. I.*

Hindenburg.

Erster

Erster Abschnitt. Erste Grundsätze der Gränzbestimmung. $\Gamma, \overset{0}{\Gamma}, \overset{1}{\Gamma}, \overset{2}{\Gamma}$ etc vor oder über einer Größe lesen sich Funktion dieser Größe. Gleiche Zeichen deuten einen gleichen Bau an.

In ungemeiner Kürze und elementarischer Evidenz, werden, in einer andern Bezeichnung, die Werthe von

$$\frac{d(\overset{0}{\Gamma}v.\Gamma v)}{dv},\ \frac{d.\Gamma v^n}{dv},\ \frac{d^n\overset{0}{\Gamma}v}{d\Gamma v^n} = d^{n-1}\left[\frac{d\overset{0}{\Gamma}v}{dv}\left(\frac{\Gamma A-\Gamma v}{A-v}\right)^{-n}\right] : dv^{n-1}$$

herausgebracht, und damit im

Zweyten Abschnitte, die Reihen von $(1+x)^n$, b^x, $l(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$ erwiesen.

Dritter Abschnitt. Analytische Hauptformel:

$$\overset{0}{\Gamma}x = \overset{0}{\Gamma}v + \overset{1}{\Gamma}v\frac{(\Gamma x-\Gamma v)}{1} + \overset{2}{\Gamma}v\frac{(\Gamma x-\Gamma v)^2}{1.2} + \overset{3}{\Gamma}v\frac{(\Gamma x-\Gamma v)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

In dieser identischen Gleichung sind x, v, und der Bau von $\overset{0}{\Gamma}$, Γ willkührlich. Man hat zum Haupt-Coefficienten der Reihe

$$\overset{n}{\Gamma}v = \frac{d^n\overset{0}{\Gamma}v}{d\Gamma v^n} = d^{n-1}\left[\frac{d\overset{0}{\Gamma}v}{dv}\left(\frac{\Gamma A-\Gamma v}{A-v}\right)^{-n}\right] : dv^{n-1}$$

wo A der constante Endwerth von v ist.

Jeder Coefficient ist auch das Differential des vorhergehenden, durch $d\Gamma v$ dividirt. Taylors berühmte Formel wird als Einzelfall abgeleitet.

Allgemeine Entwickelungs-Aufgabe. Eine Funktion nach den Potenzen einer gleichartigen Funktion ordnen:

Man setze $\Gamma v = 0$, so ist

$$\overset{0}{\Gamma}x = \overset{0}{\Gamma}v + \overset{1}{\Gamma}v\frac{\Gamma x}{1} + \overset{2}{\Gamma}v\frac{\Gamma x^2}{1.2} + \overset{3}{\Gamma}v\frac{\Gamma x^3}{1.2.3} + \text{etc}$$

Diese

Diese Reihe verträgt so viele Gestalten, als $\overset{a}{|v}$ durch die verschiedenen Wurzeln von $|v = 0$, Werthe erhalten kann.

Beyspiel. xa^x in Reihe nach xc^x verwandeln.

$vc^v = 0$ giebt $v = 0$ und damit $\overset{n}{|v} =$
$d^{n-1}(v\,la+1)h^{v(la-nlc)} = (la-lc)(la-nlc)^{n-2}$ und

$$xa^x = xc^x + (la-lc)\frac{(xc^x)^2}{1} + (la-lc)(la-3lc)\frac{(xc^x)^3}{1.2}$$

$$+ (la-lc)(la-4lc)^2\frac{(xc^x)^4}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Allgemeine Umkehrungs-Aufgabe. Aus dem bekannten Werthe einer Funktion, jede gleichartige Funktion bestimmen.

$|x = 0$ enthalte diesen Werth; damit ist

$$\overset{b}{|x} = \overset{0}{|v} - \overset{1}{|v}\frac{|v}{1} + \overset{2}{|v}\frac{|v^2}{1.2} - \overset{3}{|v}\frac{|v^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Je weniger sich das ganz willkührliche v von x entfernt, desto schneller läuft die Reihe ab: sie kann demnach alle Werthe von $\overset{b}{|x}$ erhalten und ausdrücken.

Beyspiel. Durch $x^3 - 100x^2 + 200 = 0$ werfe man x^4 aus. Wir haben,

$$\overset{n}{|v} = 4d^{n-1}[v^3(v^2+(A-100)v+A(A-100))^{-n}] : dv^{n-1}.$$

Für $A = 0$ geben vier Coefficienten

$$x^4 = 99919991,99359440.$$

Vermittelst $|x = u$, $\overset{a}{|x}$ in Reihe nach U finden.

Beyspiel. $X \sec X^{2\sqrt{3}}$ in Reihe von U darstellen, durch $\sin X \cos X = U$.

Schwerere Aufgabe. Beweis der schönen Lagrangischen Reversionsformel, Einzelsatz der meinigen. Verschiedene nützliche und unnütze Allgemeinheiten.

Vierter Abschnitt. Verwandlung der Hauptformel in Integral-Reihe.

$$\Sigma^s.\overset{\circ}{\lceil x}.\Delta X^s = \begin{cases} \overset{\circ}{\lceil v}.\Sigma^s.\Delta\lceil x^s + \overset{1}{\lceil v}\dfrac{\Sigma^s(\lceil x-\lceil v)\Delta\lceil x^s}{1} \\ \quad + \overset{2}{\lceil v}\dfrac{\Sigma^s(\lceil x-\lceil v)^2\Delta\lceil x^s}{1.2} \\ \quad + \overset{3}{\lceil v}\dfrac{\Sigma^s(\lceil x-\lceil v)^3\Delta\lceil x^s}{1.2.3} + \text{etc} \\ + \overset{0}{\smile} + \overset{1}{\smile}\lceil x + \overset{2}{\smile}\lceil x^2 + \overset{3}{\smile}\lceil x^3 + \ldots + \overset{s-1}{\smile}\lceil x^{s-1} \end{cases}$$

$$\overset{n}{\lceil v} = d^{n-1}\left[\frac{d\left(\dfrac{\overset{\circ}{\lceil v}.\Delta v^s}{\Delta\lceil v^s}\right)}{dv}\left(\frac{\lceil A-\lceil v}{A-v}\right)^{-n}\right] : dv^{n-1}$$

ist der Haupt-Coefficient.

$\overset{0}{\smile}, \overset{1}{\smile}, \overset{2}{\smile}$ etc sind die s Constanten, welche den Bedingnissen des Integrales entsprechen müssen. Da in der Reihe $\lceil v$ und $\Delta\lceil x$ constant sind, so sind ihre Integralen $\Sigma^s(\lceil x-\lceil v)^r\Delta\lceil x$ von der bekannten Form $\Sigma^s.z^r$.

v und der Bau von $\lceil$ sind willkührlich: man vermeidet damit immer die ungereimten Resultate und giebt der Reihe eine beliebige Convergenz.

Vertauscht man Σ und Δ gegen $\int$ und d, so kömmt

$$\int^s\overset{\circ}{\lceil x}.dx^s = \overset{\circ}{\lceil v}\frac{\lceil x^s}{1.2.3..s} + \overset{1}{\lceil v}\frac{(\lceil x-\lceil v)^{s+1}}{1.2.3..s+1}$$
$$+ \overset{2}{\lceil v}\frac{(\lceil x-\lceil v)^{s+2}}{1.2.3..s+2} + \text{etc}$$
$$+ \overset{0}{\smile} + \overset{1}{\smile}\lceil x + \overset{2}{\smile}\lceil x^2 + \overset{3}{\smile}\lceil x^3 + \ldots + \overset{s-1}{\smile}\lceil x^{s-1}.$$

Der Haupt-Coefficient ist

$$\overset{n}{\lceil v} = d^{n-1}\left[\frac{d\left(\dfrac{\overset{\circ}{\lceil v}\,dv}{d\lceil v}\right)}{dv}\left(\frac{\lceil A-\lceil v}{A-v}\right)^{-n}\right]$$

Und

Und hiemit ist die Benennung analytische Hauptformel, sattsam, wie ich hoffe, gerechtfertigt. Diese Formel macht den Hauptgegenstand meines Essai de Calcul fonctionnaire aus, welchen der verehrungswürdige Lalande verflossenes Frühjahr dem Französischen National-Institute gütigst überreichte.

Es ist zu verwundern, daß eine so natürliche und leichte Methode nicht längst gefunden worden ist: aber das Leichte ist es nur, wenn man es kennt. Seit zwanzig Jahren war ich hundertmal auf meiner Entdeckung, und nahm sie immer nicht wahr: so mag es andern auch gegangen seyn.

Durch obige Formeln werden drey große Aufgaben der Analysis allgemein aufgelöst:

1) Eine Funktion nach Potenzen einer andern Funktion entwickeln.

2) Aus dem Werthe einer Funktion, den Werth jeder gleichartigen Funktion (fonction isogene, ou de la meme variable) in beliebiger Convergenz schliessen.

3) Für ein Integral, von welcher Ordnung es sey, endlicher oder verschwindender Differenzen, einen immer brauchbaren Ausdruck angeben.

Die Methode wird weiter ausgedehnt, und auf die widerspenstigen Partial-Differenzen angewendet werden.

VIII.

Auszüge aus Briefen, verschiedene Nachrichten und Anzeigen.

---

1. Aus einem Briefe von Herrn D. Kramp an den Herausgeber.

Homburg, den 23. März, 1798.

— Noch etwas über die Horizontalrefraktion. Die äusserst einfache Formel $\frac{w\sqrt{\pi}}{\sqrt{2c}}$ (Archiv. H. VII. S. 382, 2) ist eigentlich nur das erste Glied der Reihe, die sie ausdrückt. Die Reihe ist sehr convergent, und aus diesem Grunde hatte ich anfangs auf die folgenden Glieder nicht geachtet. Nachher aber bemerkte ich, daß diese Glieder nicht unbedeutend sind, und sich wohl auf einige Minuten belaufen können. Dies veranlaßte eine genauere Untersuchung der

Reihe, vornehmlich in Absicht auf die Zeichen ihrer Glieder. Wäre z. B. das zweyte Glied bejaht, so würde das eine Horizontalrefraktion von 36 bis 37 Minuten geben, und so die Reihe ganz unbrauchbar seyn. Ich habe mich aber durch überzeugende Gründe versichert, und es zur vollen Gewisheit gebracht, daß die Glieder meiner Reihe abwechselnd bejaht und verneint sind, also das zweyte Glied verneint ist.

Die Horizontalrefraktion ist, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, ganz genau, ohne Weglassung irgend einer, noch so unbedeutenden Größe, gleich $\frac{w\sqrt{w}}{\sqrt{2c}}$, multiplicirt mit $1 - \frac{w}{c}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$+ \frac{ww}{2cc}\left(1 - \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) - \frac{w^3}{2.3c^3}\left(1 - \frac{3}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{16\sqrt{4}}\right)$$

$$+ \frac{w^4}{2.3.4c^4}\left(1 - \frac{4}{8\sqrt{2}} + \frac{6}{27\sqrt{3}} - \frac{4}{64\sqrt{4}} + \frac{1}{125\sqrt{5}}\right) - \text{etc.}$$

Wenden Sie dies auf den Fall an, wo das Barometer auf 28 Zoll, das Reaumurische Thermometer auf + 10 Graden steht; da dann $w = 0,0002358$ und $c = \frac{h}{a} = \frac{4218 \text{ Tois.}}{3277123 \text{ Tois.}}$, der Subtangente nehmlich der Logistica, durch den Halbmesser der Erde dividirt, so findet sich die Horizontalrefraktion 32′ 34″. Lalande bestimmt sie für diese Temperatur, aus Beobachtung, auf 32′ 30″. Eine größere Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung hat wohl die gesamte Astronomie nicht aufzuweisen.

Es lebe das Mariottische Gesetz, die Facultäten-Rechnung, und die combinatorische Analysis!!! denn dies alles habe ich gebraucht, um mein sehr schweres Problem aufzulösen, das ohne diese Hülfsmittel unaufgelöst geblieben seyn würde.

2. Zweytes Schreiben, von eben dem Verfasser.

Homburg, den 29. April, 1798.

Ich habe Ihnen bereits in einigen vorhergegangenen Schreiben (Arch. H. VII. S. 380 – 384. und hier S. 499.) von meinen Fortschritten in der Lehre der astronomischen Strahlenbrechung Nachricht gegeben. Die Freude über meine allgemeine Formel der Horizontal-Refraktion werden Sie um so viel verzeihlicher finden, da dieselbe das Resultat einer mehrjährigen Untersuchung war, da ich die größten analytischen Schwierigkeiten zu überwinden hatte, und da die äusserste Kürze und Einfachheit der Formel sowohl, als ihr genaues Zusammentreffen mit dem was die Beobachtung lehrt, weit über meine Erwartung hinausgieng. Ausserdem schien mir meine Theorie der astronomischen Strahlenbrechung auch für den Meteorologen und Physiker wichtig; für den erstern, weil sie uns über gewisse noch streitige Punkte der Wissenschaft, die bey allen Bergreisen, bey allen Höhenmessungen, unentschieden geblieben waren, Gewißheit ertheilt; für den letztern, weil sie uns durch Beobachtung Dinge lehrt, über welche

sich

sich entweder gar nicht, oder nur mit äusserster Mühe, und bey einem ganz besondren Zusammenfluß günstiger Umstände, Versuche anstellen lassen. Ich habe alles dieses zum Gegenstande einer Reihe von Briefen gemacht, die ich Ihnen zuzuschicken, mir die Freyheit nehmen werde, und die Sie mit eben der Nachsicht, wie meine andern Arbeiten, aufzunehmen belieben.

Der bey meiner Formel für die Horizontal-Refraktion als gegeben vorausgesetzten Größen, sind, wie Sie wissen, nicht mehr als drey an der Zahl. Nämlich:

a; Entfernung des Beobachters vom Mittelpunkt der Erde. Auf der Oberfläche der Erde ist a der Halbmesser selbst; und unter dem Aequator haben wir demnach $a = 3277123$ Toisen.

h; Subtangente der Logistica, wodurch die Abnahme der Densität in den verschiedenen Höhen der Atmosphäre ausgedrückt wird. In meiner Geschichte der Aërostatik habe ich bewiesen, daß diese Subtangente im ganzen, der specifischen Federkraft der atmosphärischen Luft proportional bleibt, indem sie sich beständig zur Barometerhöhe verhalten muß, wie die Dichte des Quecksilbers zur Dichte der Luft. Aus der bekannten Beobachtung des de Luc, daß bey $16\frac{3}{4}$ Graden des Reaumurischen Thermometers, der Unterschied der gemeinen Logarithmen zweyer Barometerstände, den Unterschied der Höhen in Toisen zu erkennen giebt, folgt unmittelbar, daß bey derselben Temperatur, die Subtangente 4343 Toisen gleich seyn müsse. Für jeden andern Grad des Thermometers fällt diese Subtangente anders aus: und verhältnißmäßig mit ihr ändert sich auch die spezifische Federkraft der gemeinen Luft. Es ist äusserst unangenehm, daß hier der verschiedenen Angaben der Beobachter eben so viele, als der Beobachter selbst sind. De Luc nimmt vom erwähnten Punkte an, für jeden Grad des Thermometers $\frac{1}{215}$; folglich vom Gefrierpunkte aus, $\frac{1}{198\frac{1}{4}}$ an. Ich habe hier aus mehrern Beobachtungen ein Mittel genommen; und so gefunden, daß beym zehnten Grade des Reaumurischen Thermometers die Subtangente 4218 Toisen betragen muß. Auf diese Angabe, $h = 4218$, ist die Berechnung meiner Refraktionentafel für die Temperatur, 28 Zoll Barometer, und 10° Reaum. Thermometer gegründet; und da diese, vom Zenith an bis zu 84° scheinbarer Entfernung, auch nicht um eine Secunde von der Beobachtung abweicht, so folgt, daß die besagte Angabe für h sehr zuverlässig seyn muß.

$1 : 1 + w$; Verhältniß der Sinusse des Einfalls- und Brechungswinkels beym Durchgange aus der Luft in den leeren Raum. Da dieses Verhältniß sich der Einheit sehr nähert, so ist w ein sehr kleiner, der Dichte der Luft proportionaler Bruch; der sich also verhält, gerade wie die Barometerhöhe, und umgekehrt wie die specifische Federkraft der Luft, oder die ihr proportionale Subtangente h. Am besten nimmt man diesen Bruch aus der Refraktionentafel selbst. Da nach allem, was Theorie und Beobachtung gelehrt hat, das Verhältniß der Sinusse der scheinbaren und wahren Entfernung, vom Zenith an bis über sechzig Grade hinaus, vollkommen beständig ist, so wird w sehr genau der Bruch seyn, der die Tangente irgend einer dieser scheinbaren Entfernungen zum Nenner, und die zugehörige

Refraktion zum Zähler hat. In der lalandischen Refraktionentafel steht bey der scheinbaren Höhe von 45°, die Refraktion 59″; und so wird demnach für die besagte Temperatur, $\omega = 0,000469$.

Diese drey Größen nunmehr, a, h, ω, sind die gegebenen Bestandtheile meiner Berechnung der Horizontalrefraktionen. Wundern Sie sich nicht, daß dieses wichtige Problem bis auf diese Stunde unaufgelöst geblieben ist; und der ganze theoretische Theil dieser Lehre ungefähr eben so aussieht, als etwa die Kenntniß des Planetenlaufes vor Kepler ausgesehen haben mag. Das Problem ist bey weitem eines der schwersten, das die Analysis bisher gekannt hat. Die große, beynahe unüberwindliche Schwierigkeit, liegt in der ungeheuern Divergenz der hier vorkommenden Reihen. Meines Wissens ist de la Place bis jezt der einzige Geometer, der diese ganz eigene Klasse von Schwierigkeiten tief gefühlt, merklich erleichtert, aber bey weitem nicht ganz gehoben hat. Auch gestehe ich aufrichtig, daß ich die vorzüglich hieher gehörige Abhandlung, *sur l'approximation des formules, qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances, Mem. de l'Acad. Année 1783*, des großen Mannes nicht ganz würdig finde. De la Place erreicht auf ungeheuern, mühsamen Umwegen, das vorgesezte Ziel doch nicht. Er kannte meine Facultäten-Rechnung nicht. Seine Integrale $\int t^{n-1} e^{-t^n} dt$, genommen von $t = 0$ bis $t = \infty$, deren Berechnung er uns zu lehren ganz vergessen, und eigentlich nichts über sie gelehrt hat, als daß er sie, und dies nur in gewissen besondern Fällen, auf andere transcendente Größen reducieret, deren Berechnung um nichts leichter ist, sind nichts anders als sehr einfache Facultäten mit gebrochenen Exponenten. In meinem nächst herauskommenden Werke über die Refraktionen werden Sie dieses, und noch weit mehreres andere, erörtert finden.

Auf Wegen also die für die Analysis noch ganz neu sind, habe ich für die Horizontal-Refraktion folgende sehr einfache und allgemeine Formel gefunden: $\frac{\omega\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2h}}$. Sie können leicht erachten, mit welcher Ungeduld ich nach dieser Formel meine Berechnung anstellte. Innerhalb einer Minute sollte es entschieden seyn, ob meine ganze Arbeit anwendbar oder vergeblich war. Entsprach meine Berechnung dem, was die Beobachtung lehrt, so hatte ich wirklich eine Entdeckung gemacht, die in mehr als einer Rücksicht für die Wissenschaft neu und wichtig war; fiel die Berechnung anders aus, so war auch mein Arbeit für Astronomie und Kenntniß der Atmosphäre verloren; und konnte höchstens noch für den Analysten von einigem Werthe seyn. Mehrere Gründe ließen mich das leztere befürchten. Von jeher ruhte auf den Strahlenbrechungen für die ersten acht bis zehn Grade scheinbarer Höhe, das allgemeine Vorurtheil, daß sie sich durchaus keiner Berechnung unterwerfen ließen, daß hier die Theorie ihre Gränze finde, und daß bey der Unmöglichkeit derselben es für Astronomen am besten sey, sich aller Horizontal-Beobachtungen gar zu enthalten. Ausserdem versichert Lalande in seiner größern Astronomie ausdrücklich, daß die Anwendung der Physik und Analysis für die Horizontal-Refraktion funfzig Sekunden gebe: und führt dies als einen Beweis an, daß die Theorie hier nichts vermöge. Es war also an einem günstigen Erfolge meiner Berechnung wenig Wahrscheinlichkeit vorhanden.

Der

Der Ausgang lehrte es indessen ganz anders. Die erst gegebene Formel giebt für die angenommenen Werthe der gegebenen Größen, nämlich a = [illegible], b = [illegible], und c = [illegible], also für die Temperatur von 28 Zoll Barometerhöhe, und 10 Graden des Reaumürischen Thermometers, die Horizontal-Refraktion zu 32' 07 [illegible] Sekunden an. Und ich habe alle Ursache, diese Angabe für so vollkommen genau zu halten, daß ich ihr sogar den Vorzug über die Beobachtung einräumen möchte.

Die Lalandische Tafel hat 32' 24''; sie weicht also von dem Resultat meiner Formel um zwey Minuten ab. Es ist aber auch nirgends gesagt, daß diese Angabe auf eine Beobachtung sich gründe, die gerade bey der Temperatur 28 Zoll Barom. und 10° Reaum. angestellt wäre. Die Tafel ist nach einer Formel berechnet, die weder auf einer physischen Theorie, noch auf einem analytischen Calcul beruht, sondern allein das Resultat einer Induktion ist, die gewisse einzelne, zerstreute Beobachtungen, wir wissen nicht einmal welche, für sich haben soll. Sind diese Beobachtungen auf der königlichen Sternwarte selbst gemacht, so müssen sie uns äußerst verdächtig seyn, indem es ja bekannt genug ist, daß sich auf ihr von der Stadtseite her gar keine, und gegen das Feld hin, nicht immer zuverläßige Beobachtungen machen lassen.

La Caille, der unter dem heitern, schönen Himmel des Vorgebirgs der guten Hoffnung ganz andere Ansprüche auf richtige Beobachtungen zu machen hatte, fand dort die Horizontal-Refraktion 33' 20'' Sekunden gleich, also um mehr als eine Minute größer. Und gleichwohl mußte sie in jenem warmen Klima, wo die specifische Federkraft der Luft größer, folglich die Strahlenbrechungen durchgehends geringer sind, immer noch kleiner ausfallen, als sie unter unserm kältern Himmel ist. Hier scheint nun meine Formel noch gerade so viel hinzuzusetzen, als der Angabe des la Caille aus sehr einleuchtenden Gründen noch fehlen muß: und so ist demnach für ihr vollkommenes Zusammentreffen mit der Erfahrung, die größte Wahrscheinlichkeit vorhanden. Sollte ja noch einiger Unterschied übrig seyn, so fällt dieser vermuthlich auf die Größe b zurück, die auf den von verschiedenen Beobachtern, so sehr verschiedenen Höhenmessungen beruht. Außer dem hat die Genauigkeit in jeder Sache ihre Gränze; und bey einem Dinge, wie die Horizontal-Refraktion ist, wird jeder Beobachter zufrieden seyn, wenn er ihr bis auf zehn oder zwölf Sekunden nahe gekommen ist.

Ich werde nunmehr aus meiner Formel einige Corollarien ziehen; und ich hoffe, daß sie dem Physiker und Meteorologen nicht gleichgültig seyn werden.

1. Ich habe bey meiner ganzen Berechnung, die beyden von Mariotte und Newton zuerst angegebenen Naturgesetze zum Grunde gelegt. Vermöge des erstern, ist die Dichtigkeit der Luft dem Drucke proportional: vermöge des letztern, verhält sich die anziehende Kraft der Körper auf das Licht, bey sonst gleichen Umständen, wie die Dichtigkeit derselben. Und da meine auf diesen Voraussetzungen gegründete Berechnung, mit der Erfahrung zusammentrifft, so erhellt es besser hieraus, als kein physischer Versuch uns belehren könnte, daß jene beyden Gesetze vollkommen richtig, und die Zweifel, die man verschiedentlich gegen sie aufbrachte, ungegründet sind. Den besondern

festen Körpern bemerkte bereits Newton, daß ihre brechende Kraft grösser sey als sie der Regel nach seyn sollte; allein, bey unserer Atmosphäre, scheint auch diese, die brennbaren Bestandtheile betreffende Ausnahme, nicht mehr statt zu finden. Die Allgemeinheit des Mariottischen Gesetzes vom Horizonte bis in die höchsten Regionen der Atmosphäre wurde von großen Gelehrten aus wirklich wahrscheinlichen Gründen bezweifelt; von einer Seite glaubte man zwar theoretisch, aber nicht minder gewiß, schließen zu können, daß die brennbaren Bestandtheile der atmosphärischen Luft vermöge ihrer Leichtigkeit sich in die höhern Regionen erheben, und dort eine sehr weit sich ausdehnende Luftschicht von weit grösserer specifischer Federkraft bilden müßten, als in den untern Gegenden statt haben könnte; von der andern Seite, glaubte man zwischen der Regel, die das Mariottische Gesetz gegeben hatte, und den wirklich angestellten Höhenmessungen, wesentliche und beständige Unterschiede gefunden zu haben, und schloß daraus, daß jene Regel nur als Näherung brauchbar sey. Lambert gab sich viele Mühe, diese Unterschiede einer besondern Regel zu unterwerfen, und brachte eine Ergänzungsformel heraus, bey welcher er offenbar annahm, daß die Subtangente der Logistica nicht beständig sey, sondern mit der Höhe über dem Horizonte zunehme. Es verhalte sich nun mit jenen theoretischen Gründen, und diesen Höhenmessungen wie es wolle, so erhellt nunmehr aus der Richtigkeit meiner Formel über die Horizontal Refraktion, daß jenes Mariottische Gesetz mehr als Näherung sey, und daß die geglaubten Abweichungen desselben von der Erfahrung, auf Rechnung des Beobachters, und nicht der Atmosphäre geschrieben werden müssen.

2. Man sieht offenbar, daß die Refraktionen bey ganz geringen Höhen sich mit eben der Präcision wie andere berechnen lassen, und daß das bisherige Mistrauen der Astronomen gegen sie sehr ungegründet war. Es kam blos darauf an, sie nach richtigen Gesetzen zu berechnen. Ich gebe indeß gerne zu, daß es Fälle giebt, wo keine Regel weiter anwendbar ist; so wie es auch Zeiten giebt, wo keine Beobachtungen sich machen lassen. Beydes setzt voraus, daß die Atmosphäre ruhig sey, daß ihre verschiedenen Schichten sich dem Mariottischen Gesetze gemäß in ihr gehöriges Gleichgewicht gesetzt haben; und nur unter dieser Voraussetzung sind astronomische Beobachtungen zuverlässig, Berechnungen anwendbar. Denn ausserdem sind wir durch Erfahrung belehrt, daß selbst die Refraktion von ganz nahen, mittelmäßig erhabenen Bergspitzen her, sich nicht nur, wie in mehreren physischen Büchern gesagt ist, auf dreyßig Minuten, sondern selbst auf mehrere Grade belaufen könne. Ich erinnere mich sehr wohl, da ich im Jahre 17[illegible] auf einer meiner Schweizerreisen, in einer finstern stürmischen Nacht, den hohen Berg Rigi am Ufer des Lucernersees bestieg, um Zeuge der atmosphärischen Revolution beym Aufgange der Sonne zu seyn, ich dort besser, als ich es je in Büchern gelesen hatte, belehrt wurde, wie weit die Refraktion gehen könne. Lange schon hatte ich mit meinem Reisegefährten, auf der höchsten Spitze des Berges stehend, die Sonne erwartet und noch nichts von ihr gesehen, als auf einmal die von ihr zurückgedrängten Wolkenmassen, gleichsam erschrocken auf uns zuströmten, und eine Atmosphäre um uns bildeten, die wenigstens eben so undurchdringlich war, als diejenige gewesen seyn soll, in welcher Venus ihren Sohn Aeneas in Carthago einziehen ließ. Keiner sah, keiner hörte den andern; in der ganzen Natur war nichts

sichtbar

sichtbar für uns, als die dunkelrothe, glühende Kugel, die sich eben sich über den Horizont erhoben hatte, und die Wolken vor sich her scheuchte. Ziemlich lange dauerte der Kampf zwischen Sonne und Nebel, bis endlich die letztern von der höhern Kraft der erstern herunter geschleudert, die Höhen verließen, in die Tiefe zusammenstürzten, und nach Verlauf einer halben Stunde etwa, unter der trügerischen Gestalt eines künstlichen, plötzlich entstandenen Weltmeeres, die Abgründe überall ausfüllten. Nun fiengen auch die Bergspitzen wieder an sichtbar zu werden; aber nicht da, wo wir sie vermutheten. Der Höhe unsers Standpunktes bewußt, hatten wir sie nie anders als unter uns, oder höchstens in wagerechter Linie gesehen; jetzt sahen wir sie weit über uns, und wenigstens unter einer scheinbaren Höhe von vier bis fünf Graden, über die Wolken hervorragen. Sie erhielten sich dort bis der Himmel überall aufgehellt, der ganze Horizont sichtbar war, die Nebel in der Tiefe sich vollends aufgelöst hatten, und die Sonne sich in dem unter uns liegenden Gewässer zu spiegeln anfieng. So wie dies geschah, so senkten sich auch die Bergspitzen allmählig vor uns herab, und blieben endlich auf der scheinbaren Höhe stehen, die sie haben sollten. Solche Refraktionen wird wohl niemand berechnen wollen, so wie auch bey einem solchen Kampfe der Natur niemand Beobachtungen anstellen wird. Allein solche Revolutionen, so häufig sie sich, besonders in bergichten Gegenden ereignen, dauern doch nie lange. Das große Naturgesetz, das die Dichte der Luft dem Drucke proportional macht, behauptet immer zuletzt seine Rechte; und sobald es wieder in Gleichgewicht eingetreten ist, sobald wird es auch möglich seyn, die Horizontal-Refraktionen so gut wie jede andere, mit der größten Genauigkeit zu bestimmen.

3. Die Refraktion verhält sich bey unveränderter elastischer Federkraft, gerade wie die Dichte der Luft, indem a die Entfernung des Beobachters vom Mittelpunkt der Erde, und noch mehr die Quadratwurzel dieser Größe, vom Horizonte an bis auf die Spitzen der höchsten Berge, als beständig angesehen werden kann. So wie wir daher uns vom Horizonte erheben, so nimmt auch die Horizontal-Refraktion in eben dem Verhältnisse ab, in welchem das Barometer fällt. Bey der Temperatur 10° Reaum. wird sie also auf einer Höhe von 1000 Toisen um den vierten Theil, und auf 2000 Toisen um die Hälfte vermindert seyn; und auf der erstern noch 25' 51", auf der letztern noch 17' 14" betragen. Diese Regel gehet übrigens nicht die Horizontal-Refraktion allein an; sie ist allen Refraktionen gemein.

4. Allein die sonst allgemein angenommene Regel, nach welcher auch die Reduktion der Strahlenbrechung von einer Temperatur zur andern gemacht wird, ist nur so lange richtig, als man ohne merklichen Fehler die Strahlenbrechung der Tangente der scheinbaren Entfernung proportional nehmen kann; das ist, vom Zenith an bis gegen 70 Grade hin, oder über zwanzig Graden scheinbarer Höhe. Bey niedrigern Höhen ist die analytische Verbindung zwischen Dichte der Luft und Refraktion kein einfaches geometrisches Verhältniß mehr, sondern eine sehr zusammengesetzte transcendente Gleichung, von welcher ich Sie ein andermal unterhalten werde. Der Ausdruck der Horizontal-Refraktion hat vor den andern soviel voraus, daß er einfacher ist; sie verhält sich nämlich sehr genau, gerade wie die Dichte der Luft, und umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der spezifischen Federkraft. Da nun die erstere sich selbst gerade wie die Barometer-

höhe,

höhe, und umgekehrt, wie die specifische Federkraft verhält, so ist demnach die Horizontal-Refraktion dem Bruche proportional $\frac{B}{E\sqrt{E}}$; und so ist demnach bey gleicher Barometerhöhe, das gerade Verhältniß des Quadrats der Horizontal-Refraktion, das umgekehrte des Würfels der specifischen Federkraft.

Der Unterschied ist keine Kleinigkeit. Gesetzt das Thermometer falle auf acht Grade unter dem Gefrierpunkte, so ist nach der gewöhnlichen Regel 1,035 die Zahl, mit der man die Refraktion bey 10° zu multipliciren hat, um sie auf die veränderte Temperatur anzuwenden. Bey Refraktionen über zwanzig Graden scheinbarer Höhe, mag dieses wahr seyn; allein bey der Horizontal-Refraktion ist der Multiplicator nicht 1,035, sondern 1,125. Nach der erstern, üblichen Regel, wäre die Horizontal-Refraktion der Lalandischen Tafel aus 32′ 24″ in 33′ 9″ übergegangen. Nach dem hier gelehrten, wahren Verhältnisse hingegen, wird die Horizontal-Refraktion 34′ 27″ zu 38′ 4″. Der Unterschied 3′ 37″ ist doch gewiß nicht gleichgültig; und so ist es dann kein Wunder, wenn Beobachtungen, die nach so fehlerhaften Regeln berichtigt sind, in der Praxis unzuverlässig befunden werden.

Indessen ist dies noch nicht alles. Meine vorzüglichste Beschwerde bezieht sich darauf, daß wir über die Scale der Ausdehnbarkeit der gemeinen Luft für die verschiedenen Grade der Wärme überhaupt noch sehr unrichtig belehrt sind.

Den Versuchen der Herren Morveau und du Vernois verdanken wir eine solche Scale, nicht nur für die gemeine Luft, sondern auch für noch einige andere Luftarten. Ihnen zufolge ist die specifische Federkraft der gemeinen Luft

bey 0	Grad	Reaumur	1,0000;
bey 20	—	—	1,0759;
bey 40	—	—	1,2570;
bey 60	—	—	1,6574;
bey 80	—	—	1,9368.

Ich gestehe indeß, daß mein Zutrauen zu dieser Scale nicht sehr groß ist. Zuerst hat das hier angegebene Volumen der Luft beym Siedpunkte, die Zeugnisse aller andern Physiker offenbar gegen sich. Nach de Luc ist dasselbe 1,372; nach Bonne in Lalande's Astronomie 1,414; nach Vandermonde, Berthollet und Monge 1,4329; nach Morveau soll es nun auf einmal 1,9368 seyn; also die wirkliche Vermehrung des Volumens, mehr als doppelt so viel ausmachen, als es der Angabe aller übrigen zufolge, seyn sollte.

Sodann empfiehlt sich die Scale durch ihren regelmäßigen Gang nicht sehr. Ihre ersten Differenzen schon sind sehr ungleich; die zweyten von 0° bis 60° bejaht, von dort bis zu 80° auf einmal verneint. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß die Natur in einer so einfachen Sache sich dergleichen Sprünge erlauben werde.

Drittens widerspricht diese Scale den beyden andern Scalen für das Stickgas und das Sauerstoffgas offenbar. Aus beyden ist die gemeine Luft in dem Verhältniß von 73 : 27 zusammengesetzt; durch die beyden erstern Scalen sollte nun die letztere schon für sich gegeben seyn. In meiner Geschichte der Aerostatik habe ich die Regel aufgesucht und mit geometrischer Schärfe erwiesen. Statt dieser Regel zu entsprechen, steht hier die Ausdehnbarkeit nicht einmal in der Mitte der

beyden

beyden andern, wie doch wenigstens dieses seyn sollte. Nach der Scale des Morveau müßte von 0° bis 40° die gemeine Luft ausdehnbarer seyn, als jeder ihrer Bestandtheile für sich ist; von 40° bis 80° wäre umgekehrt jeder dieser letztern ausdehnbarer als sie. Es ist schwer abzusehen, was dieser Physiker gemacht haben muß, um so verkehrte Resultate zu erhalten.

Endlich fehlt bey dieser Scale gerade der Theil von ihr, der für die Astronomie der wichtigste ist, der Theil unter dem Gefrierpunkte. Aus mehrern astronomischen Beobachtungen wird es ganz zuverläßig, daß die gemeine Luft unter dem Gefrierpunkte sich nach Verhältnissen zusammenziehet, von welchen sich die Physik bisher noch gar keinen Begriff machte. Der Astronom Lemonnier ist meines Wissens der erste der hierauf aufmerksam wurde. In seiner Abhandlung: *Examen des causes Générales des principes de Physique, et de ce qui a porté les Observateurs du Siecle précédent, a publier des Tables de Réfractions qui différent les unes des autres pour les mêmes hauteurs, Mem. de l'Acad. Année* 1780. führt er Beyspiele von Horizontal-Refraktionen an, die von der gewöhnlichen Regel ausserordentlich abweichen.

Nach der oben gegebenen Regel, daß bey unveränderter Barometerhöhe, die Horizontal-Refraktion sich umgekehrt verhalten muß, wie die Quadratwurzel aus dem Würfel der specifischen Federkraft, läßt sich aus einer gegebenen Horizontal-Refraktion allemal berechnen, wie groß die specifische Federkraft der Luft zu derselben Zeit gewesen seyn muß. Ich werde nach dieser Regel, einige der Beyspiele, die Lemonnier anführt, beurtheilen.

Aus einer Beobachtung des Picard vom 2. Januar 1675, um 7 Uhr 52′ 38″ wahrer Zeit, schien der obere Rand der Sonne um 25′ 35″ über den Horizont erhöht. Die Refraktion war also für diese Zeit, und diese scheinbare Höhe 34′ 5″; und dies giebt eine Horizontal-Refraktion von wenigstens 40 Minuten. Das Verhältniß dieser Refraktion, und der meinigen von 34′ 27″ bey 10° Reaum. ist demnach . . . 2400:2067

Logarithme dieses Verhältnisses	9,9351293
Mit zwey multipliciret . .	9,8702586
Durch drey dividiret . .	9,9567529

Also, die specifische Federkraft bey 10° der Einheit gleich gesetzt, mußte sie damals gewesen seyn 0,905. Dies setzte nun nach den gewöhnlich angenommenen Verhältnissen 16° der Kälte voraus.

Es möchte dies immer noch hingehen, da eine solche Kälte zwar ausserordentlich, aber nicht ohne Beyspiel ist, und man zu derselben Zeit noch keine übereinstimmende Thermometer hatte. Allein, den folgenden Tag, um 7 Uhr 48′ 18″ wahrer Zeit, schien der obere Rand der Sonne bereits um sechs Minuten über den Horizont erhaben. Die Rechnung giebt hier eine Refraktion von 44′ 43″, und eine Horizontal-Refraktion von wenigstens 45′. Das Verhältniß beyder Horizontal-Refraktionen ist hier . . 2700:2067

Logarithme desselben . .	9,8839767
Mit zwey multipliciret .	9,7679534
Durch drey dividiret . .	9,9226511

Es war demnach die specifische Federkraft 0,8368. Nach der gewöhnlichen Regel müßte dies beym 30° Reaum. geschehen seyn; und dies ist wenigstens auf der Pariser Sternwarte gerade zu unmöglich. Selbst

Lemonnier vermuthet hier eine Kälte, die nur unter 5°, und also etwa 8° oder 10° gewesen seyn mag; und so folgt aus dieser Beobachtung, daß vom zehnten Grad über dem Gefrierpunkte, bis etwa zum achten Grade unter ihm, sich die Luft in dem Verhältniß von 100:84 verdickt, folglich einen vollen sechsten Theil ihres Volumens verliert.

Dies ist indeß noch lange nicht alles. Die Geschichte der Wissenschaft hat Beobachtungen von Horizontal-Refraktionen aufgezeichnet, die auf mehrere Grade gehen. Aus dem im Jahr 1599 gedruckten Tagebuche der Holländer, die zwey Jahre vorher, unter 76 Graden Norderbreite, auf Nova-Zembla überwintern mußten, und mehrere Monate lang die Sonne gar nicht sahen; und aus der Zeit, da sie ihnen wieder aufzugehen schien, erhellet, daß die Horizontal-Refraktion wenigstens 4° 30′ betragen haben muß. Was giebt dies für eine specifische Federkraft? Wir wollen sehen:

Verhältniß beyder Refraktionen	16200:2067
Logarithme desselben , ,	9,1058255
Mit zwey multiplicirt , ,	8,2116510
Durch drey dividirt , ,	9,4038837

Man erhält hieraus die specifische Federkraft der Luft 0,25345; also etwa dem vierten Theile ihrer gewöhnlichen gleich. Und bey welchem Kältegrade? höchstens doch bey demjenigen, in welchem das Quecksilber gefriert; also etwa 40° unter dem Gefrierpunkte. Es folgt also hieraus, daß von 10° über dem Gefrierpunkte, bis zu 40° unter ihm, die Luft etwa um drey Viertheile ihres Volumens verdickt wurde.

Der Respiration stand diese so sehr verminderte specifische Federkraft gar nicht im Wege, indem es bey ihr nur auf die absolute Elasticität ankömmt, die deswegen immer dieselbe war. Allein, daß durch höchstens funfzig Grade Kälte, die Luft bis auf den vierten Theil ihres Volumens zusammengepreßt werden könne, dies weicht wenigstens von den bisher bekannt gewordenen Verhältnissen ausserordentlich ab, und zeigt, wie weit wir noch in dieser Lehre zurück sind.

3. Aus Herrn D. Kramp's neuestem Schreiben.

Strasburg, den 25. Früktidor, VI.

Es freuet mich, daß Sie einen Verleger meines Werks über die astronomische Strahlenbrechung gefunden haben. Es wird gewiß, wegen der darinn enthaltenen wichtigen Entdeckungen, den Beyfall der Kenner nicht verfehlen. Auch A — mit welchem ich seit meiner Rückkehr unsere ehemalige Freundschaft wieder erneuert habe, versichert mich, daß das in meinem Buche enthaltene, und sorgfältig von ihm geprüfte, vollkommen neu und wichtig sey; sagte mir aber zugleich, daß de la Place und Borda seit einiger Zeit mit dem nämlichen Gegenstande beschäftigt sind, und vielleicht noch diesen Winter eine weitläuftige Ausarbeitung darüber herausgeben werden. Es ist möglich, daß sie auf die nämlichen Resultate gerathen; um so mehr wünsche ich mit dem Drucke meines Werkes, dessen Inhalt mich, wie Sie wissen, schon so lange Zeit beschäftiget hat, nicht zurück zu bleiben.

Eine

Eine äusserst sonderbare Bemerkung ist, daß Newton's Tabula Refractionum, die in den *Lectionibus Opticis* und den *Philosoph. Transact.* von 1721. No. 368 steht, mit meinen Formeln genau, und weit besser als keine andere Refraktionstafel übereinstimmt. Ich kann mir die Sache nicht anders denken, als daß Newton meine Formel gekannt haben muß. Dies hat aber auch wieder seine Schwierigkeiten; denn es folgte daraus, daß Newton von gewissen Methoden der höhern Analysis eine Kenntniß gehabt haben müßte, die Eulern im Jahr 1754, und überhaupt allen, selbst den größten Analysten, den einzigen de la Place (1781) ausgenommen, noch vollkommen fremde war. Nächst Newtons Tafel, bin ich mit den drey Refraktionstafeln von Bouguer in der Zona torrida am besten, und immer noch sehr wohl zufrieden. Mit Bradley verträgt sich meine Analysis schon weniger; und von Lacaille's Refraktionstafel bin ich überzeugt, daß sie gar nichts taugt.

Sie werden in meinem Buche auch die Fälle bestimmt finden, in welchen die Horizontal-Refraktion unendlich groß wird, und die gar nicht unmöglich, und selbst in unserm Klima nicht einmal selten sind. Daß man die Beobachtung der Holländer auf Nova-Zembla 1598 über die Horizontal-Refraktion von 4° 30′ in Zweifel zog, daran hatte man großes Unrecht. Es wird weiter nichts dazu erfordert, als eine um die Hälfte verminderte specifische Elasticität der Luft; und dieses ist ein gar nicht seltener Fall, von dem ich durch zuverläßige Beobachtungen, vollkommen überzeugt bin.

Alles dieses hat mich auf die Nothwendigkeit der Erfindung eines besonders genauen Dichtemessers (Manometers) geführt, mit welchem ich nächstens auftreten werde. Die Scale dieses äusserst empfindlichen Instruments giebt für jeden Augenblick an:

1) Das Verhältniß der Dichte der Luft und des Quecksilbers; oder die Zahl, die mit der Barometerhöhe multiplicirt, die Subtangente der atmosphärischen Logistica giebt

2) Das Refraktions-Verhältniß für die Luft, oder den der Dichte der Luft proportionalen Bruch w; vorausgesetzt, daß $1 : 1 + w =$ sin. Incid : sin. Refract. Der hiesige Mechaniker Diebord verfertiget itzt dieses Werkzeug, von welchem ich Sie, wenn es fertig ist, noch weiter unterhalten werde.

4. Aus zween Briefen von Herrn Bürmann.

Mannheim, d. 17. Aug. u. 15. Sept. 1798.

— Die combinatorische Analysis lernte ich zuerst aus Toepfers polemischer Schrift kennen, die mir unser Freund Kramp zu lesen gab. Diese lehrte mich die ersten combinatorischen Zeilen. Die schönen Aufsätze Ihres Archivs, Praßens Usus Logarithmorum Infinitinomii und die von Ihnen neuerlich herausgegebene Schrift: polynomischer Lehrsatz 2c. erweiterten meine Kenntniß, und haben mich vollkommen überzeugt, daß die combinatorische Analysis, vornehmlich in verwickelten Fällen, ungleich mehr vermag, als die gewöhnliche.

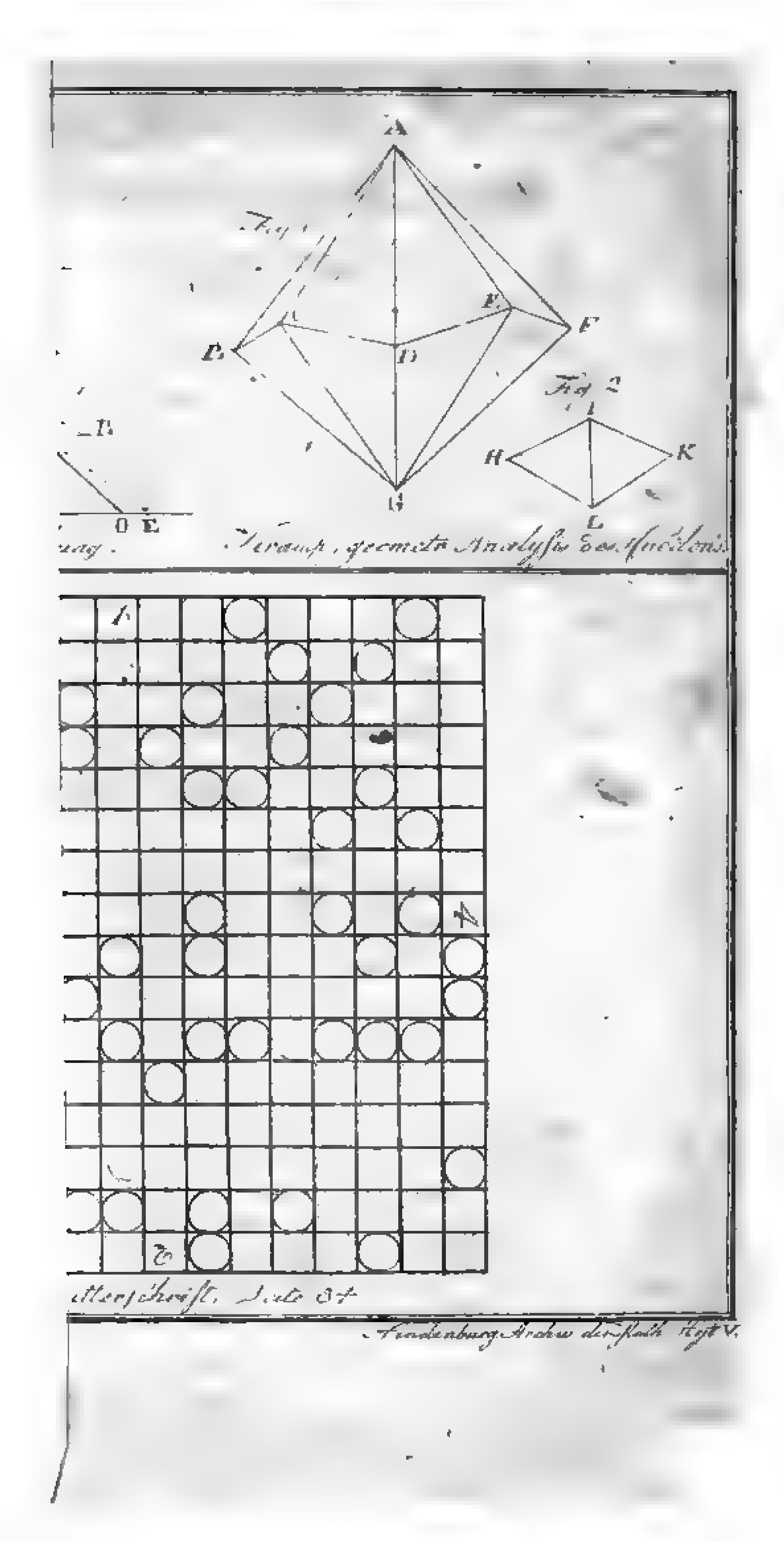
Ich

Ich hatte anfangs, ich gestehe es, nicht viel Zutrauen zu der combinatorischen Methode, da ich sie nur obenhin kannte, und schien mir selbige wenig Aufmerksamkeit zu verdienen; um so weniger wird man mir einen Vorwurf daraus machen, daß ich ihr jetzt das Wort rede, nachdem ich sie, nach abgelegtem Vorurtheile, genauer habe kennen lernen. Ich habe seitdem, bey so vielen von mir gemachten, nicht unerheblichen Anwendungen, häufig Gelegenheit gehabt, der combinatorischen Verfahren mich zu bedienen, aber nie vorher diese Einfachheit, und diesen direkten Gang gemuthmaßet. Darum sage ich auch in meinem hier beyfolgendem Auszuge aus meinem Essai de Calcul fonctionnaire „das Einfache liegt im Verwickelten tief vergraben, und das Leichte ist unendlich schwer zu entdecken, wenn es ein vollständiges System ausmacht.“

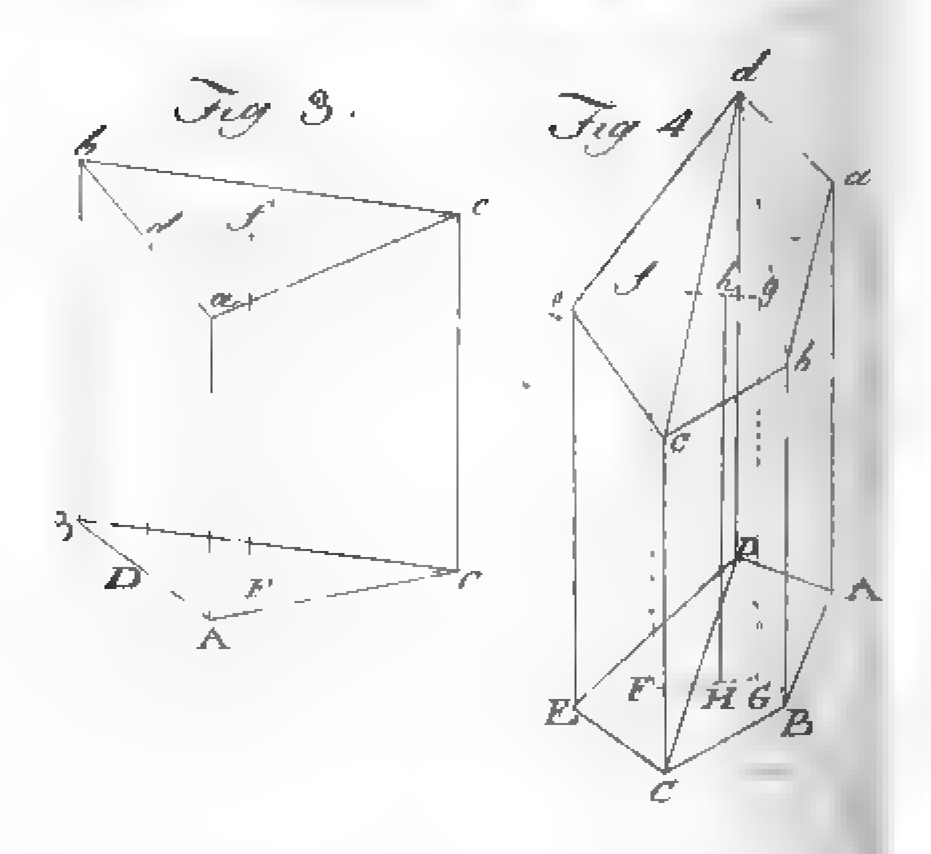
Was Sie von großen Analysten in Betreff der combinatorischen Analysis sagen, ist sehr wahr, und erstreckt sich weiter. Ich hatte einen großen Mann in dem Fache um ein Urtheil über mein Werk: Essai de Calcul fonctionnaire gebeten; er ist auch von Andern mehrmals daran erinnert worden, aber immer vergebens. Ich weis nun, daß er es nur durchblättert und nicht gelesen hat, à cause du Néologisme, welcher doch bey neuen Gegenständen, oder neuer und besserer Darstellung der alten unumgänglich nöthig ist. Wenige, *seltene Fälle* ausgenommen, haben nur junge Leute, die frey von Vorurtheilen sind, Sinn für nützliche Neuerungen; und auf diese muß man also am meisten rechnen.

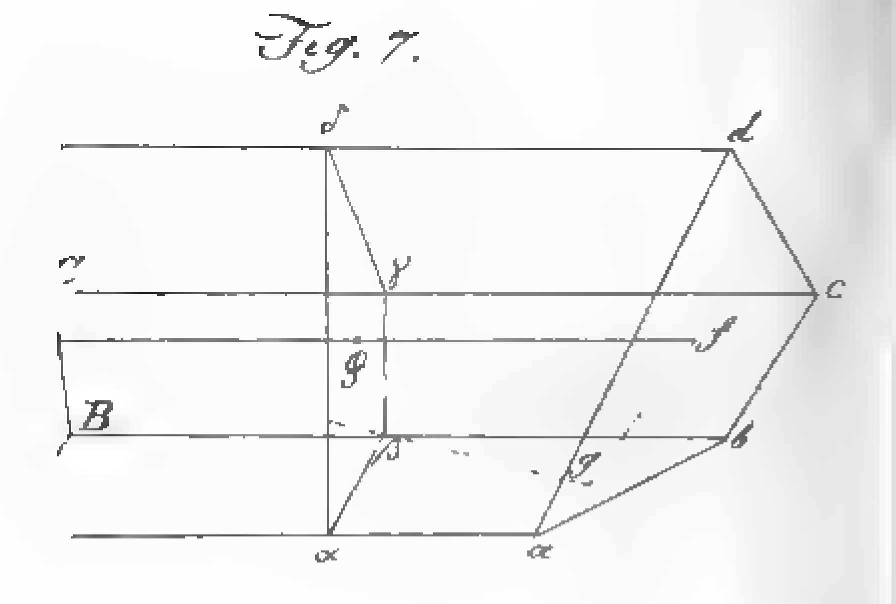
In meinen frühern Jahren, wo durch vieles Reisen und Lesen die Neigung zu schwierigen Unternehmungen in mir erregt und genährt worden war, wollte ich des großen Leibnitz herrlichen Gedanken einer Universal-Schriftsprache ausführen. Da ich aber nichts vorgearbeitet fand, schreckte mich bald die so schwere und weitläuftige Arbeit der Ideen-Classification ab. Geduldigere und einsichtsvollere Männer haben indessen die Bahn gebrochen, und meine vorigen Ideen wieder in mir aufgeweckt. Die Versuche der deutschen Universalschreiber kenne ich nur aus der Allgem. Litt. Zeitung. Memieu's Pasigraphie habe ich gesehen und gefunden, daß meine Idéographie analytique, wie ich sie nenne, ungleich einfacher, reichhaltiger und leichter ist. Seitdem ich mit Ihrer combinatorischen Analysis vertrauter geworden bin, habe ich meinen Plan noch sehr verbessert, und alles auf das Zahlensystem zurückgebracht; doch nicht mechanisch, wie Jaucour in der Encyclopédie vorschlägt. In der That kann nur ein Mathematiker ein solches Werk gut ausführen.

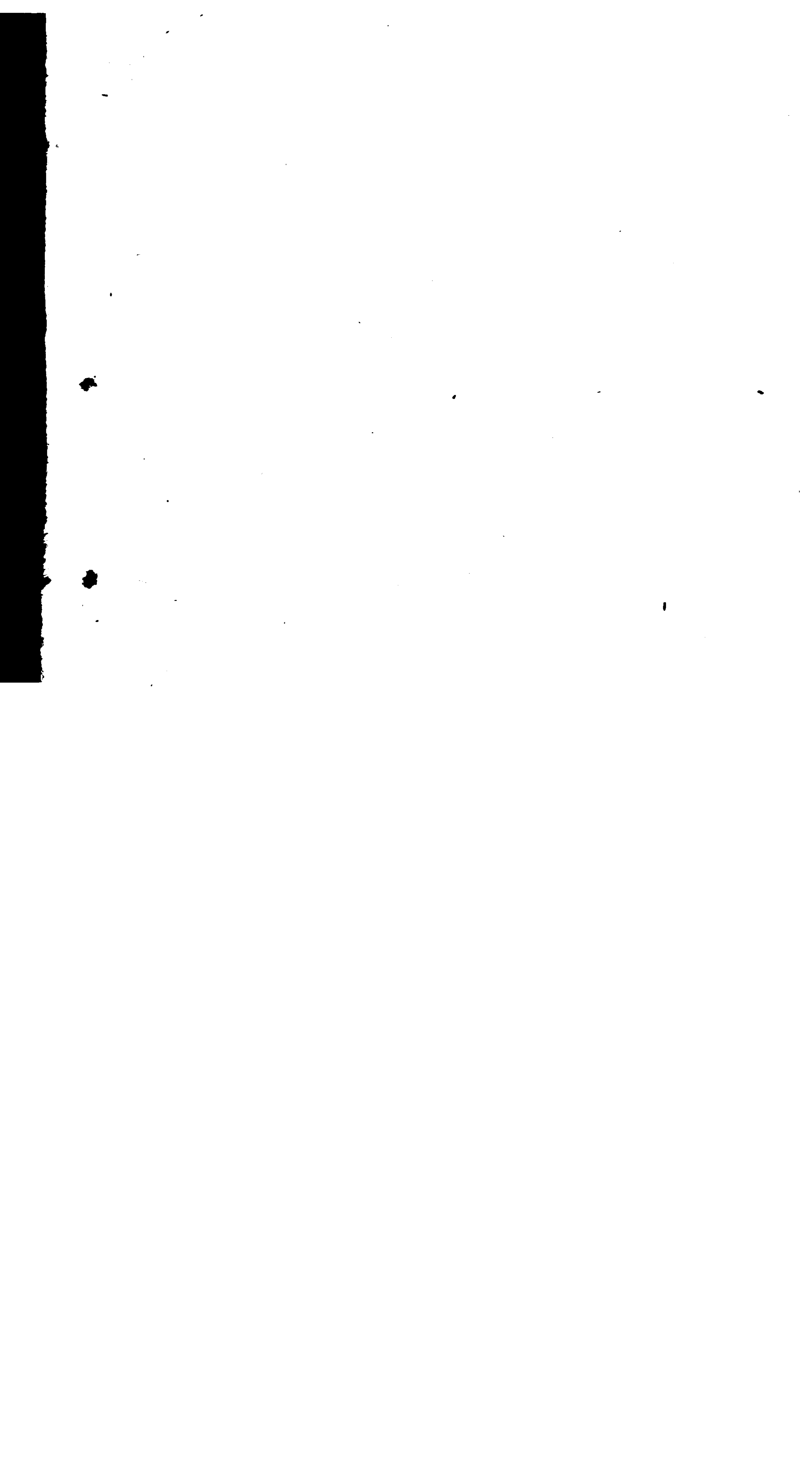
Ich gedenke einst Anfangsgründe der Mathematik zu ideographiren. Um der allgemeinen Verständlichkeit willen, werde ich gar keine Buchstaben (im eigentlichen Sinne) gebrauchen. Durch die combinatorische Anordnung, und mit der ganz freyen Wahl in den Zeichen, werde ich Deutlichkeit und Leichtigkeit in einem hohen Grade vereinigen. In meiner Ideographie habe ich, was die combinatorischen Symbole anbetrift, Ihre Alphabete bloß übersetzt, und damit die schöne Harmonie, welche Ihrer Bezeichnung eigen ist, ganz beybehalten. —

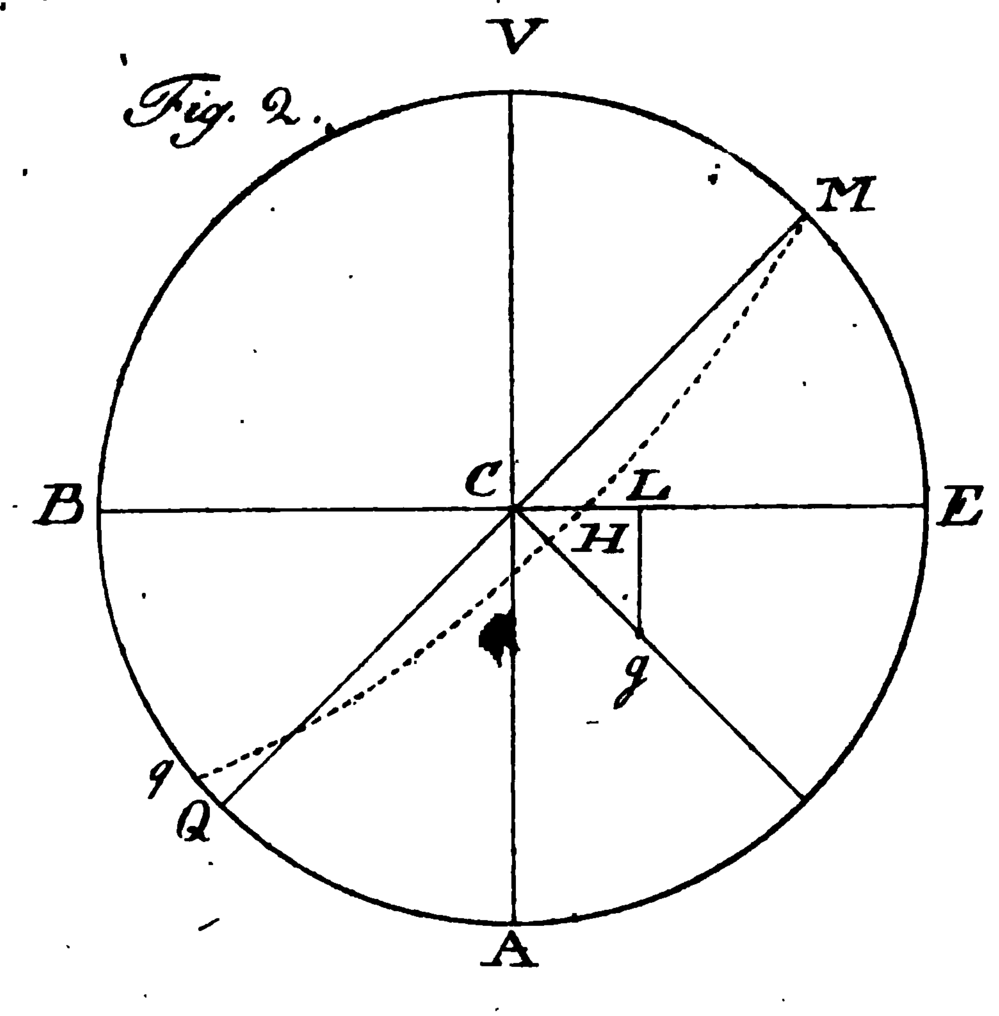

A
B
D
E
F
G
Fig. 2
H
I
K
L
Hindenburg Archiv der Math. Heft V.




Fig 3.
Fig 4


Fig. 7.





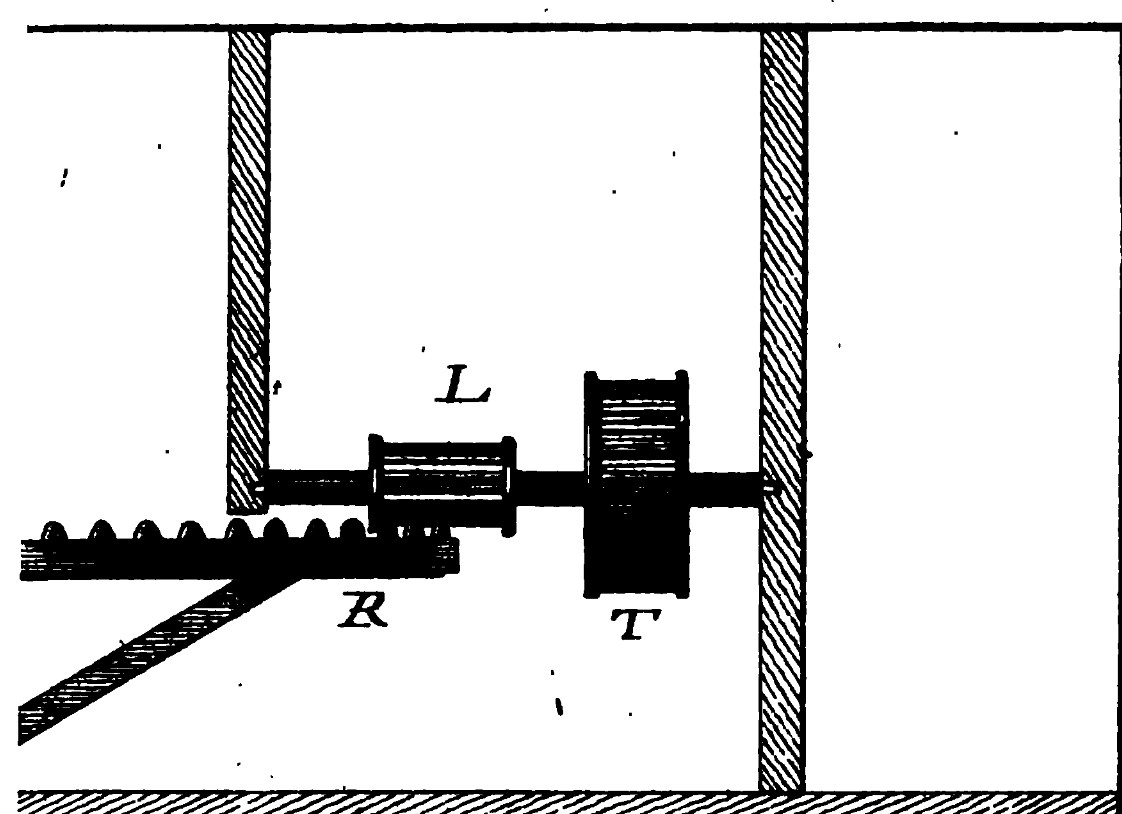


Fig. 3.

D

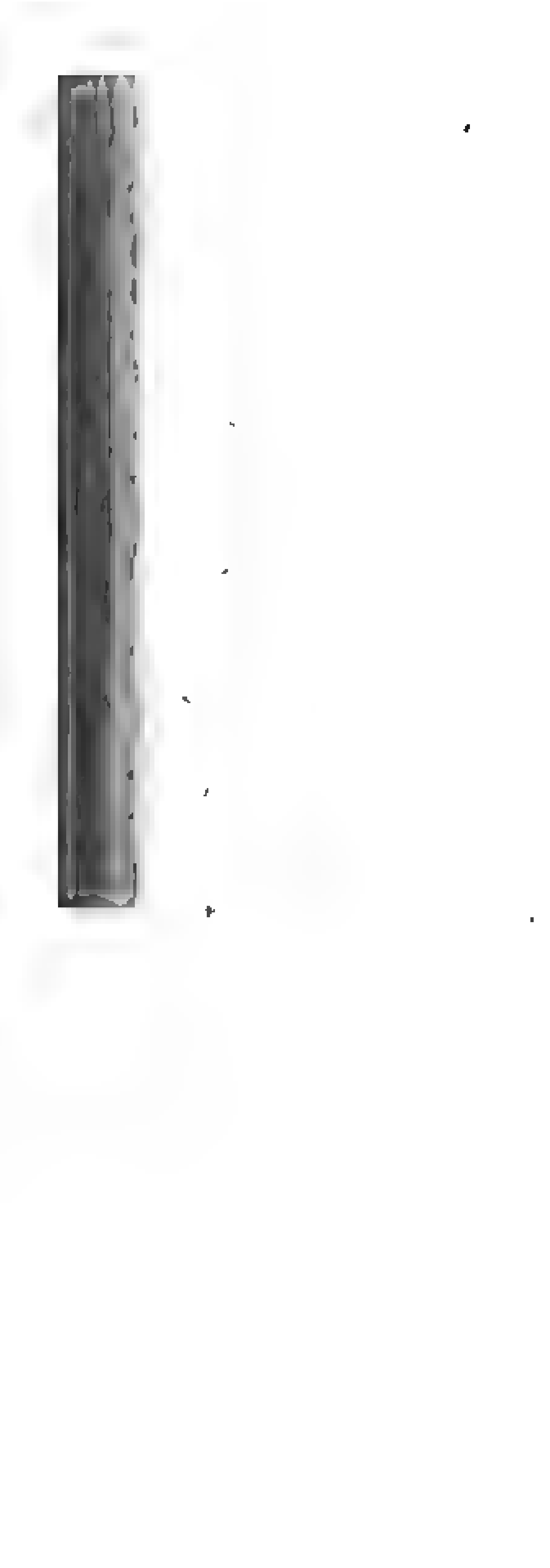


Fig. 3. *Tab. II.*

Fig. 4.

